Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XV, 1951

О СВЯЗИ МЕЖДУ НАПРЯЖЕНИЯМИ И ДЕФОРМАЦИЯМИ В НЕЛИНЕЙНО УПРУГОЙ СРЕДЕ

В. В. Новожилов
(Ленинград)

Упругие свойства нелинейно упругой изотропной среды характеризуются заданием трех скалярных функций от инвариантов деформации [1]. Данные функции могут быть названы обобщенными модулями упругости, поскольку они играют в соотношениях между напряжениями и деформациями для нелинейно упругих тел роль, аналогичную роли упругих констант в формулах закона Гука. При записи закона Гука можно пользоваться различными системами упругих постоянных (например, постоянными Ляме или модулем Юнга и коэффициентом Пуассона). Подобно этому и при записи нелинейного упругого закона можно пользоваться той или иной системой обобщенных модулей упругости, в связи с чем возникает вопрос, какая из них наиболее удобна (в смысле лучшего раскрытия физического содержания формул и возможностей их исследования).

В настоящей работе в качестве обобщенных модулей упругости принимаются

$$K = \frac{1}{3}\frac{s_1}{e_1}, \qquad G = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{s_2}{e_2}}, \qquad \omega = \xi - \psi$$

Первая величина K — обобщенный модуль объемного расширения (равная отношению среднего нормального напряжения к объемному расширению) превращается при переходе к линейному упругому закону в обычный модуль объемного расширения; вторая G — обобщенный модуль сдвига (пропорциональная отношению интенсивностей касательных напряжений и деформаций сдвига) превращается в случае линейного упругого закона в обычный модуль сдвига.

Третья величина ω может быть названа фазой подобия девиаторов напряжения и деформации. Эта функция, не имеющая аналога в классической теории упругости, является мерой отклонения от закона подобия девиаторов напряжения и деформации. Она равна разности угла вида напряженного состояния ξ и угла вида деформации ψ (два последних инварианта рассматривались в работах В. Розенберг; см., например, [2]).

Фундаментальная роль функций K и G хорошо известна из теории пластичности, ввиду чего выбор их в качестве основных модулей для записи нелинейного упругого закона вряд ли может вызвать какие-либо возражения.

Что касается третьей функции — фазы подобия девиаторов, то она имеет второстепенный характер по сравнению с двумя предыдущими функциями. Вносимые ею в соотношения, связывающие напряжения с деформациями, поправки обычно невелики и во многих случаях ими можно быть пренебрегать. Однако без этой функции нельзя объяснить и теоретически учесть свойства некоторых изотропных материалов (в частности, наблюдаемое иногда различие между сопротивлениями на растяжение и сжатие или аномальное соотношение между сопротивлениями на растяжение и кручение). Следует отметить, что излагаемая ниже общая теория связи между напряжениями и деформациями в нелинейно упругой среде представляет интерес и для теории пластичности. Последнее обусловлено тем, что малая упруго-пластическая деформация, осуществляемая весьма медленно при постоянной температуре и при зависимости внешней нагрузки от одного параметра [3], является равновесным необратимым процессом, из чего следует, что она может быть на каждом участке нагрузки (разгрузки) описана уравнением состояния некоего эквивалентного нелинейно упругого тела [4]. Данная аналогия между нелинейно упругими и упруго-пластическими телами является одной из руководящих идей в современной теории пластичности. Она дает возможность широко использовать в этой теории ряд энергетических теорем (как, например, теорему Кастильяно) и позволяет выводить формулы теории пластичности из формул нелинейной теории упругости [1]. На основании сказанного излагаемая ниже теория связи между напряжениями и деформациями помимо своей прямой цели может рассматриваться также как попытка уточнения соответствующих формул теории пластичности в направлении учета отклонений от закона подобия девиаторов напряжения и деформации.

1. Инварианты. Известно, что три главных удлинения ε_1, ε_2, ε_3 являются корнями уравнения

$$\varepsilon^3 - a_2\varepsilon^2 + a_1\varepsilon - a_0 = 0 \tag{1.1}$$

где

$$a_2 = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$$

$$a_1 = \varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{zz}\varepsilon_{xx} - \frac{1}{4}\left(\varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{xz}^2 + \varepsilon_{yz}^2\right) \tag{1.2}$$

$$a_0 = \begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\varepsilon_{xy} & \frac{1}{2}\varepsilon_{xz} \\ \frac{1}{2}\varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \frac{1}{2}\varepsilon_{yz} \\ \frac{1}{2}\varepsilon_{xz} & \frac{1}{2}\varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{vmatrix}$$

Следуя обычному правилу решения кубических уравнений, введем новую неизвестную:

$$z = \varepsilon - \frac{1}{3}a_2 \tag{1.3}$$

Тогда уравнение (1.1) примет вид:

$$z^3 - e_2 z + \frac{1}{3}e_3 = 0 \tag{1.4}$$

Здесь e_2 и $\frac{1}{3}e_3$ — второй и третий инварианты девиатора деформации:

$$e_2 = \frac{1}{3}\left(a_2^2 - 3a_1\right) = \frac{1}{6}\left[(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2-\varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3-\varepsilon_1)^2\right] =$$
$$= \frac{1}{6}\left[(\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{yy})^2 + (\varepsilon_{yy}-\varepsilon_{zz})^2 + (\varepsilon_{zz}-\varepsilon_{xx})^2 + \frac{3}{2}\left(\varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{xz}^2 + \varepsilon_{yz}^2\right)\right]$$

$$e_3 = -3a_0 + a_1a_2 - \frac{2}{9}a_2^3 = \frac{1}{9}(\varepsilon_1+\varepsilon_2-2\varepsilon_3)(\varepsilon_2+\varepsilon_3-2\varepsilon_1)(\varepsilon_3+\varepsilon_1-2\varepsilon_2) =$$
$$= -3\begin{vmatrix} \varepsilon_{xx}-\frac{1}{3}a_2 & \frac{1}{2}\varepsilon_{xy} & \frac{1}{2}\varepsilon_{xz} \\ \frac{1}{2}\varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy}-\frac{1}{3}a_2 & \frac{1}{2}\varepsilon_{yz} \\ \frac{1}{2}\varepsilon_{xy} & \frac{1}{2}\varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz}-\frac{1}{3}a_2 \end{vmatrix} \tag{1.5}$$

Три корня уравнения (1.4) всегда вещественны, что позволяет написать для них следующие выражения: (1.6)

$$z_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{e_2}\sin\psi, \qquad z_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{e_2}\sin\left(\psi + \frac{2}{3}\pi\right), \qquad z_3 = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{e_2}\sin\left(\psi + \frac{4}{3}\pi\right)$$

где

$$\alpha = \sin 3\psi = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{e_3}{e_2^{3/2}}, \qquad -\frac{1}{6}\pi \leqslant \psi \leqslant \frac{1}{6}\pi \tag{1.7}$$

Отсюда имеем окончательные выражения для главных удлинений:

$$\varepsilon_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{e_2}\sin\psi + \frac{1}{3}e_1$$

$$\varepsilon_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{e_2}\sin\left(\psi + \frac{2}{3}\pi\right) + \frac{1}{3}e_1 \qquad (\varepsilon_2 \geqslant \varepsilon_1 \geqslant \varepsilon_3) \tag{1.8}$$

$$\varepsilon_3 = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{e_2}\sin\left(\psi + \frac{4}{3}\pi\right) + \frac{1}{3}e_1$$

где

$$e_1 = a_2 = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} \tag{1.9}$$

В правые части формул (1.8) входят три независимых инварианта деформации: e_1 — объемное расширение, e_2 — с точностью до постоянного множителя квадрат интенсивности деформаций сдвига, ψ — угол вида деформации. Этот последний инвариант характеризует отношение радиусов кругов Мора (для деформации), т. е. играет роль [3, 4], аналогичную параметру Лоде μ_ε, с которым он связан зависимостью

$$\mu_\varepsilon = \frac{2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3}{\varepsilon_2 - \varepsilon_3} = \sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\psi \tag{1.10}$$

Название «угол вида деформации» мы заимствуем у В. Розенберг [2], в работах которой впервые было придано значение этому инварианту деформации (или, точнее говоря, инварианту $\psi + \frac{1}{6}\pi$, отличающемуся от ψ на постоянное слагаемое).

Как очевидно, формулы, аналогичные (1.8), могут быть написаны и для главных напряжений, а именно

$$\sigma_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{s_2}\sin\xi + \frac{1}{3}s_1$$

$$\sigma_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{s_2}\sin\left(\xi + \frac{2}{3}\pi\right) + \frac{1}{3}s_1 \qquad (\sigma_2 \geqslant \sigma_1 \geqslant \sigma_3) \tag{1.11}$$

$$\sigma_3 = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{e_2}\sin\left(\xi + \frac{4}{3}\pi\right) + \frac{1}{3}s_1$$

где

$$s_1 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}$$

$$s_2 = \frac{1}{6}[(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\sigma_{xy}{}^2 + \sigma_{xz}{}^2 + \sigma_{yz}{}^2)] = \frac{1}{3}\sigma_i{}^2$$

$$s_3 = -3\begin{vmatrix} \sigma_{xx} - \frac{1}{3}s_1 & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} - \frac{1}{3}s_1 & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} - \frac{1}{3}s_1 \end{vmatrix} \tag{1.12}$$

$$\beta = \sin 3\xi = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{s_3}{s_2{}^{3/2}}, \qquad -\frac{1}{6}\pi \leqslant \xi \leqslant \frac{1}{6}\pi \tag{1.13}$$

Входящие в формулы (1.10), (1.11) инварианты напряжения представляют собой: $\frac{1}{3}s_1$ — среднее нормальное напряжение, s_2 — с точностью до постоянного множителя квадрат интенсивности касательных напряжений, ξ — угол вида напряженного состояния.

Параметр Лоде (для напряжений) связан с инвариантом ξ формулой

$$\mu_\sigma = \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_2 - \sigma_3} = \sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\xi \tag{1.14}$$

2. Связь между инвариантами напряжения и деформации. Зависимость между напряжениями и деформациями в идеально упругом изотропном теле, деформированном при постоянной температуре, определяется в наиболее общем виде формулами [1]

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{\partial\Phi}{\partial a_2} + \frac{\partial\Phi}{\partial a_1}(\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + \frac{\partial\Phi}{\partial a_0}\left(\varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz} - \frac{1}{4}\varepsilon_{yz}^2\right) \quad \text{и. т. д.} \\ \sigma_{xy} &= -\frac{1}{2}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial a_1}\varepsilon_{xy} - \frac{\partial\Phi}{\partial a_0}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_{xz}\varepsilon_{yz} - \varepsilon_{zz}\varepsilon_{xy}\right)\right] \quad \text{и. т. д.} \end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь функция $\Phi(a_2, a_1, a_0)$ есть удельная работа деформации, задание которой вполне характеризует упругие свойства рассматриваемой среды.

Роль обобщенных модулей упругости в формулах (2.1) играют производные $\partial\Phi / \partial a_2$, $\partial\Phi / \partial a_1$, $\partial\Phi / \partial a_0$.

Недостатком этих обобщенных модулей является неясность их физического смысла (неясность их связи с теми инвариантами напряжения и деформации, в которых обыкновенно производится обработка механических испытаний материалов).

Ввиду этого конечной целью дальнейшего является выражение скалярных коэффициентов формул (2.1), т. е. $\partial\Phi / \partial a_2$, $\partial\Phi / \partial a_1$ и $\partial\Phi / \partial a_0$ через обычно употребляемые при обработке опытов инварианты e_1, e_2, μ_ε, s_1, s_2, μ_σ (приведенные выше).

При этом с точки зрения упрощения дальнейших выкладок и формул целесообразно заменить параметры Лоде μ_ε и μ_σ однозначно с ними связанными согласно (1.10) и (1.14) параметрами ψ и ξ (углами вида деформации и напряжения).

Из формул (2.1), (1.2) и (1.12) вытекают следующие соотношения между инвариантами напряжения и деформации:

$$\begin{aligned} s_1 &= 3\frac{\partial\Phi}{\partial a_2} + 2\frac{\partial\Phi}{\partial a_1}a_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial a_0}a_1 \\ s_2 &= \frac{1}{3}\left[(a_2^2 - 3a_1)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial a_1}\right)^2 + (a_2a_1 - 9a_0)\frac{\partial\Phi}{\partial a_1}\frac{\partial\Phi}{\partial a_0} + (a_1^2 - 3a_2a_0)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial a_0}\right)^2\right] \\ s_3 &= \frac{1}{9}\Big[(2a_2^3 - 9a_1a_2 + 27a_0)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial a_1}\right)^3 + \\ &\quad + (3a_2^2a_1 - 18a_1^2 + 27a_2a_0)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial a_1}\right)^2\frac{\partial\Phi}{\partial a_0} + \\ &\quad + (18a_2^2a_0 - 3a_2a_1^2 - 27a_1a_0)\frac{\partial\Phi}{\partial a_1}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial a_0}\right)^2 + \\ &\quad + (-2a_1^3 + 9a_1a_2a_0 - 27a_0^2)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial a_0}\right)^3\Big] \end{aligned} \tag{2.2}$$

Осуществим в этих выражениях переход от дифференцирования по a_2, a_1, a_0 к дифференцированию по e_1, e_2, e_3.

Это нетрудно сделать, если учесть, что согласно (1.5) и (1.9)

$$\frac{\partial\Phi}{\partial a_2}=\frac{\partial\Phi}{\partial e_1}+\frac{2}{3}\frac{\partial\Phi}{\partial e_2}a_2+\frac{\partial\Phi}{\partial e_3}\left(a_1-\frac{2}{3}a_2^2\right)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial a_1}=-\frac{\partial\Phi}{\partial e_2}+\frac{\partial\Phi}{\partial e_3}a_2,\qquad \frac{\partial\Phi}{\partial a_0}=-3\frac{\partial\Phi}{\partial e_2} \tag{2.3}$$

Подставляя (2.3) в (2.2) и принимая затем во внимание формулы (1.5), будем иметь

$${}_3 s_1=\frac{\partial\Phi}{\partial e_1}$$

$$s_2=e_2\left(\frac{\partial\Phi}{\partial e_2}\right)^2+3e_3\frac{\partial\Phi}{\partial e_2}\frac{\partial\Phi}{\partial e_3}+3e_2^2\left(\frac{\partial\Phi}{\partial e_3}\right)^2 \tag{2.4}$$

$$s_3=e_3\left(\frac{\partial\Phi}{\partial e_2}\right)^3+6e_2^2\left(\frac{\partial\Phi}{\partial e_2}\right)^2\frac{\partial\Phi}{\partial e_3}+9e_2e_3\frac{\partial\Phi}{\partial e_2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial e_3}\right)^2+3\left(3e_3^2-2e_2^3\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial e_3}\right)^3$$

Формулы (2.4) проще, чем (2.2), и удобнее в том отношении, что в них инварианты напряжения s_1, s_2, s_3 выражаются через аналогичные им инварианты деформации e_1, e_2, e_3 и производные удельной работы по этим трем инвариантам.

Но еще более удобные выражения могут быть получены, если за независимые инварианты деформации принять не e_1, e_2, e_3, а e_1, e_2 и α

Последнее равносильно замене в формулах (2.4) аргументов e_2 и e_3 новыми аргументами

$$u=e_2,\qquad v=\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{e_3}{e_2^{3/2}} \tag{2.5}$$

Переход от дифференцирования по e_2, e_3 к дифференцированию по u и v осуществляется по формулам

$$\frac{\partial\Phi}{\partial e_2}=\frac{\partial\Phi}{\partial u}-\frac{3}{2}\frac{v}{u}\frac{\partial\Phi}{\partial v}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial e_3}=\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{u^{3/2}}\frac{\partial\Phi}{\partial v} \tag{2.6}$$

Подстановка этих выражений в (2.4) (после возвращения к старым обозначениям e_2 и α вместо u и v) дает

$$\frac{1}{3}s_1=\frac{\partial\Phi}{\partial e_1}$$

$$s_2=e_2\left(\frac{\partial\Phi}{\partial e_2}\right)^2+\frac{9}{4}\frac{1-\alpha^2}{e_2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}\right)^2$$

$$s_3=\frac{2}{\sqrt{3}}e_2^{3/2}\left[\alpha\left(\frac{\partial\Phi}{\partial e_2}\right)^3+\frac{9}{2}\frac{1-\alpha^2}{e_2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial e_2}\right)^2\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}-\right. \tag{2.7}$$

$$\left.-\frac{27}{4}\frac{\alpha\left(1-\alpha^2\right)}{e_2^2}\frac{\partial\Phi}{\partial e_2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}\right)^2-\frac{27}{8}\frac{\left(1-\alpha^2\right)^2}{e_2^3}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}\right)^3\right]$$

Эти формулы после введения в них переменной ψ, связанной с α соотношением $\alpha = \sin 3\psi$, принимают вид:

$$\frac{1}{3}s_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial e_1}, \qquad s_2 = e_2\left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial e_2}\right)^2 + \frac{1}{4e_2^2}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \psi}\right)^2\right]$$

$$s_3 = \frac{2}{\sqrt{3}} e_2^{3/2}\left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial e_2}\right)^3 \sin 3\psi + \frac{3}{2}\frac{1}{e_2}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial e_2}\right)^2\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \psi}\right)\cos 3\psi - \right. \tag{2.8}$$

$$\left. - \frac{3}{4}\frac{1}{e_2^2}\frac{\partial \Phi}{\partial e_2}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \psi}\right)^2 \sin 3\psi - \frac{1}{8}\frac{1}{e_2^3}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \psi}\right)^3 \cos 3\psi\right]$$

Из двух последних выражений следует, что

$$\beta = \sin 3\xi = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{s_3}{s_2^{3/2}} = \frac{(1 - 3X^2)\sin 3\psi + X(3 - X^2)\cos 3\psi}{(1 + X^2)^{3/2}} \tag{2.9}$$

где

$$X = \frac{1}{2e_2}\frac{\partial \Phi}{\partial \psi} \Big/ \frac{\partial \Phi}{\partial e_2} \tag{2.10}$$

Для приведения формулы (2.9) к окончательному виду введем в нее подстановку

$$X = \operatorname{tg}\omega \tag{2.11}$$

Тогда, учитывая, что

$$\cos 3\omega = (\cos^2\omega - 3\sin^2\omega)\cos\omega, \qquad \sin 3\omega = (3\cos^2\omega - \sin^2\omega)\sin\omega \tag{2.12}$$

из (2.9) имеем

$$\sin 3\xi = \sin 3(\psi + \omega) \tag{2.13}$$

Отсюда

$$\omega = \xi - \psi + \frac{2}{3}k\pi \tag{2.14}$$

где k — целое число, которому нужно придать какое-либо конкретное значение, чтобы связь между ξ, ψ и ω стала однозначной. Естественнее всего, разумеется, положить $k = 0$. Тогда

$$\omega = \xi - \psi \qquad \left(-\frac{1}{3}\pi \leqslant \omega \leqslant \frac{1}{3}\pi\right) \tag{2.15}$$

Здесь промежуток изменения ω установлен согласно (1.7) и (1.13).

Функция $\omega(e_1, e_2, \psi)$, подлежащая определению опытным путем, будет играть в дальнейшем роль одной из основных характеристик механических свойств нелинейно упругих материалов. Равенству $\omega = 0$ (и только ему) соответствует подобие девиаторов напряжения и деформации. Таким образом, функция ω является мерой отклонения от упомянутого подобия, в соответствии с чем представляется уместным назвать ее «фазой подобия девиаторов». Подставляя обозначение (2.11) в (2.8), будем иметь

$$\frac{1}{3}s_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial e_1}, \quad s_2 = \frac{e_2}{\cos^2\omega}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial e_2}\right)^2, \quad s_3 = \frac{2}{\sqrt{3}} e_2^{3/2}\frac{\sin 3(\psi + \omega)}{\cos^3\omega}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial e_2}\right)^3 \tag{2.16}$$

Эти последние формулы [а также формула (2.15)] и выражают связь между инвариантами напряжения и деформации в произвольной нелинейно упругой изотропной среде.

3. Приведение соотношений между напряжениями и деформациями к канонической форме. Формулы, полученные в предыдущем разделе, позволяют выразить производные от потенциальной функции Φ по инвариантам деформации через инварианты деформации и напряжения. Так, например, из формул (2.16) сразу имеем, что

$$\frac{\partial\Phi}{\partial e_1}=\frac{s_1}{3}=Ke_1, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial e_2}=\sqrt{\frac{s_2}{e_2}}\cos(\xi-\psi)=2G\cos\omega \tag{3.1}$$

где

$$K=\frac{1}{3}\frac{s_1}{e_1}, \qquad G=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{s_2}{e_2}} \tag{3.2}$$

Производная от Φ по ψ может быть получена из формул (2.10), (2.11) и (3.1), согласно которым

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\psi}=2e_2\frac{\partial\Phi}{\partial e_2}\operatorname{tg}\omega=4Ge_2\sin\omega \tag{3.3}$$

Полученные формулы относятся к случаю, когда удельная работа деформации Φ рассматривается как функция трех независимых инвариантов деформации e_1, e_2, ψ. Воспользовавшись этими формулами, а также выражениями (2.5), (2.6) можно преобразовать формулы (2.3) к виду

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\Phi}{\partial a_2}&=Ke_1+\frac{4}{3}Ge_1\frac{\cos(3\psi+\omega)}{\cos 3\psi}-2G\frac{e_2+{}^1/_3e_1^2}{\sqrt{3e_2}}\frac{\sin\omega}{\cos 3\psi}\\
\frac{\partial\Phi}{\partial a_1}&=-2G\left[\frac{\cos(3\psi+\omega)}{\cos 3\psi}-\frac{e_1}{\sqrt{3e_2}}\frac{\sin\omega}{\cos 3\psi}\right]\\
\frac{\partial\Phi}{\partial a_0}&=-2G\sqrt{\frac{3}{e_2}}\frac{\sin\omega}{\cos 3\psi}
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Эти выражения дают производные от удельной работы деформации для того случая, когда Φ рассматривается как функция от трех независимых инвариантов деформации a_2, a_1, a_0.

Подставляя (3.4) в (2.1), будем иметь

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx}=Ke_1+2G\Big\{&\frac{\cos(3\psi+\omega)}{\cos 3\psi}\left(\varepsilon_{xx}-\frac{1}{3}e_1\right)-\\
&-\sqrt{\frac{3}{e_2}}\frac{\sin\omega}{\cos 3\psi}\left[\left(\varepsilon_{xx}-\frac{1}{3}e_1\right)^2+\frac{1}{4}\varepsilon_{xy}^2+\frac{1}{4}\varepsilon_{xz}^2-\frac{2}{3}e_2\right]\Big\}
\end{aligned}$$

. . . .

$$\sigma_{xy}=G\left\{\frac{\cos(3\psi+\omega)}{\cos 3\psi}\varepsilon_{xy}+\sqrt{\frac{3}{e_2}}\frac{\sin\omega}{\cos 3\psi}\left[\left(\varepsilon_{zz}-\frac{1}{3}e_1\right)\varepsilon_{xy}-\frac{1}{2}\varepsilon_{xz}\varepsilon_{yz}\right]\right\} \tag{3.5}$$

. . . .

Шесть формул вида (3.5) могут быть объединены в следующее тензорное равенство:

$$\boldsymbol{D}_\sigma=2G\left\{\frac{\cos(3\psi+\omega)}{\cos 3\psi}\boldsymbol{D}_\varepsilon-\sqrt{\frac{3}{e_2}}\frac{\sin\omega}{\cos 3\psi}\left(\boldsymbol{D}_\varepsilon^2-\frac{2}{3}e_2\boldsymbol{I}\right)\right\} \tag{3.6}$$

где

$$\boldsymbol{D}_\sigma=\begin{pmatrix}\sigma_{xx}-\frac{1}{3}s_1 & \sigma_{xy} & \sigma_{xz}\\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy}-\frac{1}{3}s_1 & \sigma_{yz}\\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz}-\frac{1}{3}s_1\end{pmatrix} \qquad \left(\begin{matrix}\text{девиатор}\\ \text{напряжения}\end{matrix}\right)$$

$$D_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} - \frac{1}{3} e_1 & \frac{1}{2} \varepsilon_{xy} & \frac{1}{2} \varepsilon_{xz} \\ \frac{1}{2} \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} - \frac{1}{3} e_1 & \frac{1}{2} \varepsilon_{yz} \\ \frac{1}{2} \varepsilon_{xz} & \frac{1}{2} \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} - \frac{1}{3} e_1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \text{девиатор} \\ \text{деформации} \end{pmatrix}$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \text{единичный} \\ \text{тензор} \end{pmatrix}$$

Как частный случай при $\omega = 0$ из (3.5) и (3.6) получаются хорошо известные в теории пластичности формулы Генки.

4. Дифференциальные соотношения между обобщенными модулями упругости. Чтобы формулы (3.1) и (3.3) были совместны, между обобщенными модулями упругости K, G и фазой подобия девиаторов ω должны иметь место соотношения

$$\begin{gathered} \frac{1}{3} \frac{\partial s_1}{\partial e_2} = e_1 \frac{\partial K}{\partial e_2} = 2 \frac{\partial}{\partial e_1} (G \cos \omega) \\ \frac{1}{3} \frac{\partial s_1}{\partial \psi} = e_1 \frac{\partial K}{\partial \psi} = 4 e_2 \frac{\partial}{\partial e_1} (G \sin \omega) \\ \frac{\partial}{\partial \psi} (G \cos \omega) = 2 \frac{\partial}{\partial e_2} (e_2 G \sin \omega) \end{gathered} \tag{4.1}$$

Данные соотношения в совокупности с требованием, чтобы при всех значениях e_1, e_2, ψ, представляющих интерес для рассматриваемой задачи, функция $\Phi(e, e_2, \psi)$ была положительной, налагают некоторые ограничения на возможности задания K, G и ω в зависимости от инвариантов деформации.

Заметим, что если при обработке результатов механических испытаний материала обнаружатся заметные отклонения от закономерностей, выражаемых формулами (4.1), то это будет означать, что в той области деформаций и при том характере нагрузок, какие изучались испытаниями, рассматриваемый материал вел себя как не вполне упругое тело.

Наоборот, хорошее совпадение формул (4.1) с данными опыта должно рассматриваться как подтверждение опытом упругого характера процесса деформации или, точнее говоря, должно рассматриваться как доказательство того, что на рассмотренных этапах нагрузки (или разгрузки) существовала потенциальная функция Φ — удельная работа деформации. Последнее не всегда является признаком обратимости деформации [4].

5. Формулы, выражающие деформации через напряжения. Чтобы излагаемая теория связи между напряжениями и деформациями в изотропных упругих телах имела вполне законченный характер, следует дополнить формулы (3.5) и (3.6), выражающие тензор напряжения через тензор деформации, формулами, выражающими, наоборот, тензор деформации через тензор напряжения. При этом модули K, G и фазу подобия девиаторов ω будем рассматривать уже не как функции инвариантов деформации e_1, e_2, ψ, а как функции соответствующих инвариантов напряжения s_1, s_2 и ξ. При дальнейшем изложении этого раздела будут использованы (в несколько видоизмененной форме) результаты работы [5].

Допустим, что связь между девиатором деформации и девиатором напряжения может быть представлена в виде бесконечного ряда:

$$\boldsymbol{D}_\varepsilon = f_0\boldsymbol{I} + f_1\boldsymbol{D}_\sigma + f_2\boldsymbol{D}_\sigma^2 + \cdots + f_n\boldsymbol{D}_\sigma^n + \cdots \tag{5.1}$$

где $f_0, f_1, \ldots, f_n, \ldots$ — некоторые функции от каких-либо трех независимых инвариантов напряжения (например, от s_1, s_2, ξ). Есть основание думать, что формула (5.1) выражает связь между девиаторами деформации и напряжения в наиболее общей форме, поскольку дробные степени тензоров лишены физического смысла.

Покажем, что ряд (5.1) может быть сведен к отрезку аналогичного ряда, содержащему всего три члена. С этой целью обратимся к теореме Гамильтона-Кэйли [6] (стр. 269), на основании которой любой симметричный тензор второго ранга должен подчиняться уравнению, аналогичному тому, какому подчиняются главные значения тензора. В частности, согласно этой теореме тензор напряжения

$$\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

должен подчиняться равенству

$$\boldsymbol{S}^3 - b_2\boldsymbol{S}^2 + b_1\boldsymbol{S} - b_0\boldsymbol{I} = 0 \tag{5.2}$$

где

$$b_2 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = s_1, \qquad b_1 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1, \qquad b_0 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \tag{5.3}$$

а девиатор D_σ тензора S должен подчиняться равенству

$$\boldsymbol{D}_\sigma^3 - s_2\boldsymbol{D}_\sigma + \frac{1}{3}s_3\boldsymbol{I} = 0 \tag{5.4}$$

где s_2, s_3 определяются формулами (1.12).

Нетрудно видеть, что, последовательно применяя соотношение (5.4) в ряду (5.1), мы придем в конце концов к формуле вида

$$\boldsymbol{D}_\varepsilon = F_0\boldsymbol{I} + F_1\boldsymbol{D}_\sigma + F_2\boldsymbol{D}_\sigma^2 \tag{5.5}$$

где F_0, F_1, F_2 — функции от инвариантов s_1, s_2, ξ.

Заметим, что F_0 и F_2 не могут быть независимыми, — в противном случае правая часть формулы (5.5) не будет девиатором. Налагая на (5.5) это условие (требование, чтобы правая часть (5.5) была девиатором, т. е. чтобы первый инвариант тензора

$$F_0\boldsymbol{I} + F_1\boldsymbol{D}_\sigma + F_2\boldsymbol{D}_\sigma^2$$

был равен нулю), приходим к выражению

$$\boldsymbol{D}_\varepsilon = X\boldsymbol{D}_\sigma + Y\left(\boldsymbol{D}_\sigma^2 - \frac{2}{3}s_2\boldsymbol{I}\right) \tag{5.6}$$

где X и Y — некоторые функции инвариантов напряжения.

Формула (5.6) и является окончательным результатом работы [5].

Как видно из вышеизложенного, она выводится независимо от предположения о существовании потенциала деформации и основывается лишь на рассмотрении возможных форм функциональной связи одного девиатора с другим вне зависимости от того, какой физический смысл эти девиаторы имеют. Заметим, что если ввести обозначения

$$\begin{gathered} A = 2G\frac{\cos(3\psi+\omega)}{\cos 3\psi} = \sqrt{\frac{s_2}{e_2}}\,\frac{\cos(2\psi+\xi)}{\cos 3\psi} \\ B = -2G\sqrt{\frac{3}{e_2}}\,\frac{\sin\omega}{\cos 3\psi} = \frac{\sqrt{3s_2}}{e_2}\,\frac{\sin(\psi-\xi)}{\cos 3\psi} \end{gathered} \tag{5.7}$$

то формула (3.6) принимает вид, аналогичный (5.6), а именно

$$\boldsymbol{D}_\sigma = A\boldsymbol{D}_\varepsilon + B\left(\boldsymbol{D}_\varepsilon^2 - \frac{2}{3}e_2\boldsymbol{I}\right) \tag{5.8}$$

Поставленную задачу теперь можно сформулировать так: дана формула (5.8), включая ее коэффициенты A и B. Требуется найти X и Y. Решать эту задачу можно, например, следующим путем: подставим $\boldsymbol{D}_\sigma$ согласно (5.8) в правую часть формулы (5.6). Тогда эта правая часть превратится в полином четвертой степени относительно $\boldsymbol{D}_\varepsilon$. Но по теореме Гамильтона-Кэйли этот полином может быть превращен в полином второй степени, в результате чего соотношение (5.6) примет вид:

$$\boldsymbol{D}_\varepsilon = \Psi_0\boldsymbol{I} + \Psi_1\boldsymbol{D}_\varepsilon + \Psi_2\boldsymbol{D}_\varepsilon^2 \tag{5.9}$$

где Ψ_0, Ψ_1, Ψ_2 будут известными функциями от e_2, e_3, s_2, s_3, A, B, X и Y.

Поскольку равенство (5.9) должно выполняться тождественно, из него следует, что

$$\Psi_0 = 0, \qquad \Psi_2 = 0, \qquad \Psi_1 = 1 \tag{5.10}$$

Два из равенств (5.10) будут следствиями одно другого, вследствие чего (5.10) можно рассматривать как систему из двух уравнений с двумя неизвестными X и Y, из которой данные неизвестные и могут быть однозначно определены.

Намеченный выше путь рассуждений не представляет затруднений, однако мы воспользуемся другим, поскольку он еще более прост и позволяет написать искомый результат сразу. Забудем на некоторое время о тех выкладках, на основании которых ранее было получено соотношение (3.6), и предположим, что нам известно лишь, что связь между девиатором напряжения и девиатором деформации может быть представлена в виде (5.8). Составим далее на основании (5.8) выражения для инвариантов s_2, ξ. Тогда будем иметь два уравнения с двумя неизвестными A и B, на основании которых данные коэффициенты могут быть выражены через инварианты напряжения и деформации. При этом для них получатся формулы (5.7).

В соответствии со сказанным для вывода формулы (3.6) вовсе не было необходимости (как это было сделано в разделе 2) связывать выкладки с предположением о существовании потенциала деформации. Однако, целью выкладок в разделе 2 было не только получение формул (3.6), но и вывод дифференциальных соотношений (4.1). Вот почему вывод (3.6) был соединен с одновременным рассмотрением производных от Ф по различным инвариантам деформации.

Сейчас перед нами стоит задача — выразить X и Y в формуле (5.6) через инварианты напряжения и деформации, задача, совершенно аналогичная той, которая уже была решена. Отсюда ясно, что формулы для X и Y могут быть сразу написаны по аналогии с формулами (5.7), причем в последних формулах надо лишь поменять местами e_2 и s_2, ψ и ξ (соответственно). Иными словами,

$$\begin{aligned} X &= \sqrt{\frac{e_2}{s_2}}\,\frac{\cos(2\xi+\psi)}{\cos 3\xi} = \frac{1}{2G}\,\frac{\cos(3\xi-\omega)}{\cos 3\xi} \\ Y &= \frac{\sqrt{3e_2}}{s_2}\,\frac{\sin(\xi-\psi)}{\cos 3\xi} = \frac{1}{2G}\sqrt{\frac{3}{s_2}}\,\frac{\sin\omega}{\cos 3\xi} \end{aligned} \tag{5.11}$$

Подставляя эти значения X и Y в (5.6), приходим к следующему окончательному соотношению, выражающему девиатор деформации через девиатор напряжения:

$$\boldsymbol{D}_\varepsilon = \frac{1}{2G}\left\{\frac{\cos(3\xi-\omega)}{\cos 3\xi}\boldsymbol{D}_\sigma + \sqrt{\frac{3}{s_2}}\,\frac{\sin\omega}{\cos 3\xi}\left(\boldsymbol{D}_\sigma^2 - \frac{2}{3}s_2\boldsymbol{I}\right)\right\} \tag{5.12}$$

Эта формула эквивалентна шести соотношениям:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} = \frac{1}{9}\frac{s_1}{K} + \frac{1}{2G}\Bigg\{&\frac{\cos(3\xi-\omega)}{\cos 3\xi}\left(\sigma_{xx}-\frac{1}{3}s_1\right) + \\ &+\sqrt{\frac{3}{s_2}}\,\frac{\sin\omega}{\cos 3\xi}\left[\left(\sigma_{xx}-\frac{1}{3}s_1\right)^2+\sigma_{xy}^2+\sigma_{xz}^2-\frac{2}{3}s_2\right]\Bigg\} \end{aligned} \tag{5.13}$$

. . . .

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{G}\left\{\frac{\cos(3\xi-\omega)}{\cos 3\xi}\sigma_{xy} - \sqrt{\frac{3}{s_2}}\,\frac{\sin\omega}{\cos 3\xi}\left[\left(\sigma_{zz}-\frac{1}{3}s_1\right)\sigma_{xy}-\sigma_{xz}\sigma_{yz}\right]\right\}$$

. . . .

Напомним, что в формулах (5.12) и (5.13) обобщенные модули упругости K, G и фазу подобия девиаторов ω следует рассматривать как функции не инвариантов деформации, а инвариантов напряжения, т. е. как функции s_1, s_2, ξ.

6. Некоторые свойства фазы подобия девиаторов. Данная работа была начата с указания, что свойства произвольной нелинейно упругой изотропной среды могут быть характеризованы тремя скалярными функциями от инвариантов деформации, которые были названы обобщенными модулями упругости.

Теперь это утверждение следует несколько уточнить: функций, характеризующих упругие свойства нелинейной изотропной среды, действительно три, однако лишь две из них K и G имеют аналогию с модулями упругости. Третья функция — фаза подобия девиаторов — настолько существенно от них отличается (и по своим свойствам, о которых ниже, и по своему месту в полученных выше формулах), что называть ее «обобщенным модулем упругости» неуместно. Это именно фаза — некоторый угол, входящий в формулы через посредство своих тригонометрических функций.

Благодаря введению этого угла мы получаем возможность описывать теоретически свойства таких материалов, у которых кривые испытаний на растяжение и сжатие неодинаковы или у которых сопротивление на сдвиг и сопротивление на растяжение находятся в необычном соотношении. Как известно, современная теория малых пластических деформаций (формулы Генки) не дает такой возможности (именно ввиду того, что в ее основу положено предположение о подобии девиаторов). Любопытно отметить, что изотропный материал, работающий в области напряжений и деформаций, в которой фаза подобия девиаторов заметно отлична от нуля, будет в некоторой мере подобен анизотропному материалу. Сходство будет состоять в том, что у такого материала (как и у анизотропного) углы вида деформации и напряжения будут, как правило, неодинаковыми. В частности, чистому сдвигу по напряжениям, вообще говоря, не будет соответствовать чистый сдвиг по деформациям.

Мы подошли к важному вопросу, который в последнее время неоднократно обсуждался, а именно к вопросу о так называемой «деформационной анизотропии». Есть основание надеяться, что изложенная теория связи между напряжениями и деформациями является подходящим математическим аппаратом, в частности, для описания таких деформаций, при которых в теле происходят структурные изменения, различные в разных направлениях. Действительно, поскольку направления вышеуказанных структурных изменений будут не наперед заданными, не зависимыми от деформации направлениями, а наоборот, будут полностью определяться самой деформацией, постольку в данном случае мы будем иметь кажущуюся анизтропию такого типа, какой был описан выше. К этому, однако, необходимо добавить требование, чтобы в процессе деформации главные оси напряжений в каждой точке тела все время сохраняли свое направление (т. е. требование, чтобы нагружение по терминологии А. А. Ильюшина было простым [3]. В противном случае, т. е. если процесс деформации будет подразделяться на несколько этапов, в каждом из которых главные оси будут существенно изменять свои направления по сравнению с предыдущими этапами, «деформационная анизотропия», происходящая от предыдущих этапов, будет по отношению к последующим этапам уже не кажущейся, а настоящей анизотропией. Лишь когда главные оси напряжения будут в течение всего процесса нагрузки сохранять (точно или хотя бы приближенно) свои направления, можно ожидать, что тело со структурными изменениями, обусловленными деформацией, будет вести себя как изотропный материал с фазой подобия девиаторов, отличной от нуля.

Основным назначением вышеизложенной теории следует считать применение ее к обработке результатов механических испытаний изотропных материалов, не следующих закону Гука. При этом для материалов упругих данная теория может рассматриваться как вполне строгая. Применение же ее к упруго-пластическим телам возможно лишь с рядом указанных выше оговорок, причем окончательные выводы о пределах ее работоспособности в этой области следует сделать только после проведения специально направленных и тщательно поставленных опытов.

Поступила 5 I 1951

Ленинградский государственный университет

ЛИТЕРАТУРА

1. Новожилов В. В. Основы нелинейной теории упругости. Гостехиздат. 1948.
2. Смирнов-Аляев Г. А. Сопротивление материалов пластическим деформациям. Машгиз. 1949.
3. Ильюшин А. А. Пластичность. Ч. I. Гостехиздат. 1948.
4. Качанов Л. М. Механика пластических сред. Гостехиздат. 1948.
5. Prager W. Strain hardening under combined stresses. Journ. of Appl. Phys. 1945. Vol. 16. № 12 (имеется русский перевод в сборнике *Теория пластичности* издательства иностранной литературы).
6. Бохер М. Введение в высшую алгебру. ОНТИ. 1934.