

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ ТОНКОСТЕННОЙ КОНСТРУКЦИИ С УЧЕТОМ УПРОЧНЕНИЯ МАТЕРИАЛА

Р. А. Межлумян

(Москва)

В предыдущих работах [2,3] рассматривалось напряженное состояние цилиндрической оболочки, деформируемой под действием заданной внешней нагрузки. На практике встречается и обратная задача, когда заданы размеры оболочки и условия закрепления ее торцов, а величину внешней нагрузки требуется определить из условия достаточной прочности или несущей способности конструкции.

После исследования напряженного состояния стержня оболочки его несущую способность можно определить двумя способами:

- 1) без учета упрочнения, т. е. пользуясь условием пластичности Мизеса,
- 2) с учетом упрочнения материала.

Конечное соотношение между силами и моментами для тонкостенных стержней и цилиндрических оболочек получается в весьма простой форме, если не учесть упрочнения материала, т. е. в предположении, что интенсивность напряжений постоянна по всей оболочке и равна пределу текучести. Однако для материалов, обладающих упрочнением, это предположение приводит к погрешности, величина которой зависит от степени упрочнения материала.

Здесь в работе рассматривается задача об определении несущей способности тонкостенных стержней и цилиндрических оболочек с учетом упрочнения материала.

**1. Основные предположения.** Примем следующие предположения:

- 1) нагружение оболочки простое либо близко к простому [1];
- 2) зависимость между интенсивностью напряжений и интенсивностью деформаций берется в соответствии с экспериментальными данными, т. е. материал оболочки обладает истинным законом упрочнения;
- 3) объемная деформация происходит упруго.

**2. Распределение сил и моментов в тонкостенной конструкции за пределом упругости.** При упругих деформациях главные центральные оси инерции и центра изгиба являются чисто геометрическими характеристиками поперечного сечения, положения которых не зависят от напряженного состояния и физико-механических свойств материала.

Картина изменяется, когда наступает упруго-пластическая стадия работы конструкции.

При упруго-пластических деформациях, если поперечное сечение не обладает двумя осями симметрии, положение главных центральных осей инерции меняется в зависимости от напряженного состояния и механических свойств материала.

За пределом упругости приходится пользоваться двумя системами подвижных координат: *главными осями приведения* и *главной кинетической системой координат*.

Положение главной кинетической системы координат [2] определяется формулами (фиг. 1)

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{F_1} \left[ \int x dF - \sum_1^n \int_{F_{ij}} \chi_1(e_i) x dF \right] \\ y_1 &= \frac{1}{F_1} \left[ \int y dF - \sum_1^n \int_{F_{ij}} \chi_1(e_i) y dF \right] \end{aligned} \quad \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{2I_{xy1}}{I_{y1} - I_{x1}} \quad (2.1)$$

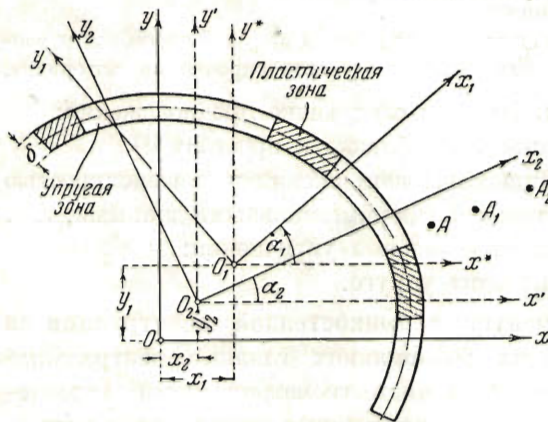
где  $x_1$  и  $y_1$  — координаты начала  $O_1$  в первоначально выбранной системе отсчета  $xy$ , а  $\alpha_1$  — угол между осями  $x$  и  $x_1$ .

Положение главных осей приведения определяется формулами [2]

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{1}{F_2} \left[ \int x dF - \sum_1^n \int_{F_{ij}} \chi_2(e_i) x dF \right] \\ y_2 &= \frac{1}{F_2} \left[ \int y dF - \sum_1^n \int_{F_{ij}} \chi_2(e_i) y dF \right] \end{aligned} \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{2I_{xy2}}{I_{y2} - I_{x2}} \quad (2.2)$$

где  $x_2$  и  $y_2$  — координаты приведенного центра тяжести  $O_2$  в той же системе отсчета  $xy$ , а  $\alpha_2$  — угол между осями  $x$  и  $x_2$ .

В обеих системах координат направление оси  $z$  остается неизменным, т. е. ось  $z$  перемещается параллельно самой себе (фиг. 2).



Фиг. 1

Понятие о центре изгиба за пределом упругости теряет смысл.

А здесь приходится пользоваться понятиями кинетического центра и центра приведения [2].

Если погонную внешнюю нагрузку привести в кинетический центр и присоединить к ней погонный крутящий момент, то формально можно отделить изгиб от кручения.

В главной кинетической системе отсчета можно отдельно рассматривать действия трех компонентов погонной внешней нагрузки  $q_x^*$ ,  $q_y^*$ ,  $q_z^*$  и погонного крутящего момента  $m_z^*$  от этой же нагрузки относительно кинетического центра.

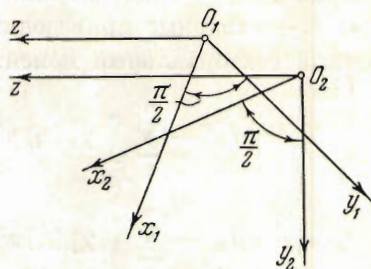
Кроме того, в этой же системе отсчета можно отдельно рассматривать действия поперечных сил  $Q_x$ ,  $Q_y$  и крутящего момента  $M_z$ .

Однако для того, чтобы отдельно рассмотреть действия продольных обобщенных сил, т. е. изгибающих моментов в двух плоскостях  $M_x$ ,  $M_y$ , осевой силы  $N$  и изгибно-крутящего бимоента  $B$ , надо пользоваться системой приведения. Систему приведения составляют центр приведения,

главная приведенная секториальная нулевая точка [2] и главные оси приведения инерции.

Как уже было доказано [2], положения системы приведения и главной кинетической системы зависят от величины и характера приложения внешней нагрузки, граничных условий закрепления торцов стержня (оболочки) и физико-механических свойств материала оболочки.

Поэтому за пределом упругости происходит перераспределение сил и моментов по конструкции. Для статически определенных систем имеем



Фиг. 2

$$Q_x = -I_{y1} \left\{ \int_0^z \frac{1}{I_{y1}} [q_x^* + \int_0^l \frac{\partial p_z}{\partial z} x ds + T_l' x_l - T_k' x_k] dz - \left( \frac{Q_x}{I_{y1}} \right)_0 \right\} + \int_0^l x p_z ds \quad (2.3)$$

$$Q_y = -I_{x1} \left\{ \int_0^z \frac{1}{I_{x1}} [q_y^* + \int_0^l \frac{\partial p_z}{\partial z} y ds + T_l' y_l - T_k' y_k] dz - \left( \frac{Q_y}{I_{x1}} \right)_0 \right\} + \int_0^l y p_z ds \quad (2.4)$$

Пренебрегая жесткостью свободного кручения, получим

$$M_k = -I_{\omega 1} \left\{ \int_0^z \frac{1}{I_{\omega 1}} [m_z + \int_0^l \frac{\partial p_z}{\partial z} \omega ds + T_l' \omega_l - T_k' \omega_k] dz - \left( \frac{M_k}{I_{\omega 1}} \right)_0 \right\} + \int_0^l \omega p_z ds \quad (2.5)$$

Продольные обобщенные силы определяются соотношениями

$$N = -F_2 \left[ \int_0^z \frac{(q_z + T_e - T_k)}{F_1} dz + \left( \frac{N}{F} \right)_0 \right] \quad (2.6)$$

$$M_x = I_{x2} \left[ \int_0^z \frac{1}{I_{x1}} \left( Q_y + \int_0^l y p_z ds \right) dz + \left( \frac{M_x}{I_{x2}} \right)_0 \right] \quad (2.7)$$

$$M_y = -I_{y2} \left[ \int_0^z \frac{1}{I_{y1}} \left( Q_x + \int_0^l x p_z ds \right) dz - \left( \frac{M_y}{I_{y2}} \right)_0 \right] \quad (2.8)$$

$$B = I_{\omega 2} \left[ \int_0^z \frac{1}{I_{\omega 1}} \left( M_k + \int_0^l \omega p_z ds \right) dz + \left( \frac{B}{I_{\omega 2}} \right)_0 \right] \quad (2.9)$$

В равенствах (2.1) — (2.9)  $I_{x1}$ ,  $I_{y1}$  — главные кинетические моменты инерции,  $I_{\omega 1}$  — главный кинетический секториальный момент инерции,  $I_{x2}$ ,  $I_{y2}$  — главные приведенные моменты инерции,  $I_{\omega 2}$  — главный приведенный секториальный момент инерции — определяются формулами

$$I_{x1} = I_x^* - \sum_1^n \int_{F_{ij}} \chi_1(e_i) y^2 dF, \quad I_{x2} = I_x' - \sum_1^n \int_{F_{ij}} \chi_2(e_i) y^2 dF \quad (2.10)$$

$$I_{y1} = I_y^* - \sum_1^n \int_{F_{ij}} \chi_1(e_i) x^2 dF, \quad I_{y2} = I_y' - \sum_1^n \int_{F_{ij}} \chi_2(e_i) x^2 dF \quad (2.11)$$

$$I_{\omega 1} = I_{\omega}^* - \sum_1^n \int_{F_{ij}} \chi_1(e_i) \omega^2 dF, \quad I_{\omega 2} = I_{\omega}' - \sum_1^n \int_{F_{ij}} \chi_2(e_i) \omega^2 dF \quad (2.12)$$

Здесь  $N$  — нормальная сила;  $B$  — изгибно-крутящий бимомент;  $T_e$ ,  $T_k$  — погонные сдвигающие усилия, приложенные по краям оболочки;  $T_e'$ ,  $T_k'$  — производные от сдвигающих усилий.  $I_x^*$ ,  $I_y^*$  — моменты инерции всей площади поперечного сечения относительно главных центральных кинетических осей,  $I_{\omega}^*$  — секториальный момент инерции всей площади поперечного сечения относительно кинетического центра.  $I_x'$ ,  $I_y'$  — моменты инерции всей площади поперечного сечения относительно главных осей приведения инерции,  $I_{\omega}'$  — секториальный момент инерции всей площади поперечного сечения относительно центра приведения; наконец, определение функции  $\chi_1(e_i)$  дано в работе [3], где она обозначена через  $\chi_3'(e_i)$ ; заметим также, что индексом нуль в формулах (2.4) — (2.9) указаны значения величин при  $z = 0$ .

Геометрическое место кинетических центров назовем *кинетической осью*. Координаты кинетического центра определяем соотношениями

$$\alpha_{x1} = \frac{1}{I_{x1}} \left[ \int_F y \omega_b dF - \sum_1^n \int_{F_{ij}} \chi_1(e_i) y \omega_b dF \right] \quad (2.13)$$

$$\alpha_{y1} = - \frac{1}{I_{y1}} \left[ \int_F x \omega_b dF - \sum_1^n \int_{F_{ij}} \chi_1(e_i) x \omega_b dF \right] \quad (2.14)$$

Геометрическое место центров приведения назовем *осью приведения*. Для определения координат центров приведения пользуемся соотношениями

$$\alpha_{x2} = \frac{1}{I_{x2}} \left[ \int_F y \omega_b dF - \sum_1^n \int_{F_{ij}} \chi_2(e_i) y \omega_b dF \right], \quad (2.15)$$

$$\alpha_{y2} = - \frac{1}{I_{y2}} \left[ \int_F x \omega_b dF - \sum_1^n \int_{F_{ij}} \chi_2(e_i) x \omega_b dF \right] \quad (2.16)$$

В общем случае закрепления торцов стержня оболочки и при произвольной внешней нагрузке продольные и поперечные обобщенные силы

определяются интегрированием дифференциальных уравнений равновесия в перемещениях:

$$\begin{aligned} E^* \zeta'' &= f_1(z), & E^* u^{IV} &= f_2(z) \\ E v^{IV} &= f_3(z), & E^* \theta^{IV} - \varphi(z) \theta'' &= f_4(z) \end{aligned} \quad (2.17)$$

Определение функций  $f_1, \dots, f_4$  и  $\varphi$  дано в работе<sup>[2]</sup>.

Не нарушая общности, положим, что края оболочки свободны от сдвигающих сил, т. е.  $T_e = T_k = 0$ , а внешняя погонная нагрузка является непрерывной функцией от  $z$ .

Методы решения первых трех уравнений аналогичны, поэтому напишем общий интеграл третьего уравнения, пользуясь методом начальных параметров А. Н. Крылова:

$$E^* I_x v = c_1 \frac{z^3}{3!} + c_2 \frac{z^2}{2!} + c_3 z + c_4 - \Phi(z) \quad (2.18)$$

Функция А. Н. Крылова и ее последующие производные до третьего порядка включительно определяются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{1}{3!} \int_0^z \varphi_2(t) (z-t)^3 dt, & \Phi''(z) &= \int_0^z \varphi_2(t) (z-t) dt \\ \Phi'(z) &= \frac{1}{2!} \int_0^z \varphi_2(t) (z-t)^2 dt, & \Phi'''(z) &= \int_0^z \varphi_2(t) dt \end{aligned} \quad (2.19)$$

Здесь  $\varphi_2$  — приведенная погонная нагрузка определяется формулой

$$\varphi_2(z) = \frac{I_x}{I_{x1}} q_y^* \quad (2.20)$$

Легко заметить, что при  $z = 0$   $\Phi(z)$  и ее последующие производные обращаются в нули; поэтому для определения произвольных постоянных имеем систему двух линейных алгебраических уравнений с двумя неизвестными произвольными постоянными.

Общий интеграл последнего уравнения (2.17) запишем в виде

$$\begin{aligned} \theta &= d_1 \frac{z^3}{3!} + d_2 \frac{z^2}{2} + d_3 z + d_4 + \frac{1}{3!} \int_0^z (z-t)^3 f_4(t) dt + \\ &+ \frac{1}{3!} \int_0^z (z-t)^3 \theta''(t) \varphi(t) dt \end{aligned} \quad (2.21)$$

Интегрирование дифференциальных уравнений (2.17) производим методом упругих решений, при этом имеем четырнадцать граничных условий, необходимых для определения произвольных постоянных на каждом этапе упругих решений<sup>[3]</sup>.

Для этого пользуемся соотношениями

$$N = E^* F_2 \zeta', \quad M_x = -E^* I_{x2} v''$$

$$B = -E^* I_{\omega 2} \theta'', \quad M_y = E^* I_{y2} u''$$

$$Q_y = -E^* I_{x3} v''' + \int_0^l y p_z ds, \quad Q_x = -E^* I_{y3} u''' + \int_0^l x p_z ds$$

$$M_k = G I_{d2} \theta' - E I_{\omega 3} \theta'' + \int_0^l \omega p_z ds$$

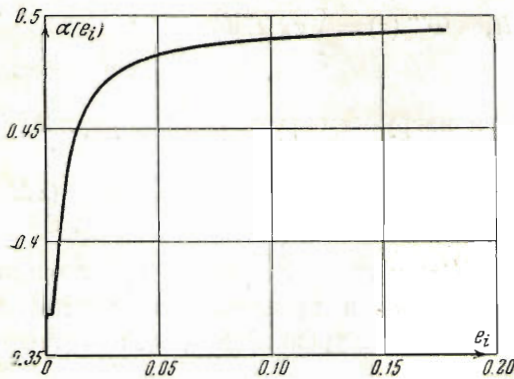
полагая в них  $z = 0$  и  $z = L$ , где  $L$  — длина оболочки.

Чтобы вычислить интенсивность деформаций, а по ней основные кинетические и приведенные характеристики поперечного сечения, необходимо иметь общий интеграл всех четырех дифференциальных уравнений на данном этапе упругих решений.

Каждое из дифференциальных уравнений (2.17) можно представить как систему дифференциальных уравнений, для которых при заданных граничных условиях сходимость метода последовательных приближений доказана.

Последнее уравнение (2.17) интегрируется на каждом этапе упругих решений методом последовательных приближений, т. е. в первом приближении полагаем  $\varphi(t) = 0$ , находим уравнение для угла закручивания.

Во втором приближении, заменяя  $\theta''$  результатом решения первого приближения, находим второе приближение и т. д. Сходимость метода последовательных приближений доказывается аналогичным методом, как и для первых уравнений. Таким образом, при любых внешних нагрузках и способе закрепления торцов стержня (оболочки) можно определить напряжения деформации и перемещения, а также остаточные напряжения деформаций и перемещения после разгрузки.



Фиг. 3

нания торцов стержня (оболочки) можно определить напряжения деформации и перемещения, а также остаточные напряжения деформаций и перемещения после разгрузки.

**3. Конечное соотношение между силами и моментами.** Пусть на тонкостенную конструкцию действует внешняя поверхностная нагрузка с компонентами  $p_x, p_y, p_z$ .

Продольные и поперечные обобщенные силы, действующие в каждом сечении, определяются методами, изложенными в предыдущем разделе.

Нормальные напряжения при совместном действии осевой силы, изгибающих моментов в двух плоскостях и изгибно крутящего бимоента

определяются соотношениями

$$\sigma_z = [1 - \chi_2(e_i)] \left[ \frac{N}{F_2} + \frac{M_x}{I_{x2}} y - \frac{M_y}{I_{y2}} x + \frac{B}{I_{\omega 2}} \omega \right]. \quad (3.1)$$

$$\sigma_s = \alpha(e_i) \sigma_z \quad (3.2)$$

Функция  $\alpha(e_i)$  определяется уравнением

$$\alpha(e_i) = \frac{(1 + \nu) - (1 - 2\nu)[1 - \chi(e_i)]}{2(1 + \nu) + (1 - 2\nu)[1 - \chi(e_i)]} \quad (3.3)$$

График этой функции приведен для дуралюминия на фиг. 3.

Касательные напряжения в любой точке оболочки равны:

$$\tau_{sz} = -\frac{1}{\delta(s)} \left[ \frac{Q_x}{I_{y1}} S_{y1}(s, e_i) + \frac{Q_y}{I_{x1}} S_{x1}(s, e_i) + \frac{M_\omega}{I_{\omega 1}} S_{\omega 1}(s, e_i) \right] \quad (3.4)$$

Здесь  $S_{x1}(s, e_i)$ ,  $S_{y1}(s, e_i)$  — кинетические статические моменты рассматриваемой части поперечного сечения относительно главных кинетических осей,  $S_{\omega 1}(s, e_i)$  — кинетический секториальный статический момент той же части сечения относительно кинетического центра.

Выведем конечное соотношение между силами и моментами из условий

$$\sigma_i = \sigma_b, \quad e_i = e_b \quad (3.5)$$

где  $\sigma_b$  — интенсивность напряжений, соответствующая началу стадии разрушения материала,  $e_b$  — интенсивность деформаций, при  $\sigma_b$ .

Проблема определения  $\sigma_b$  для материала конструкции является весьма трудной и требует дальнейших экспериментальных исследований для установления критерия подобия, позволяющего переходить от разрушающего напряжения образца к разрушающему напряжению конструкции. Для упрощения предполагается, что интенсивность напряжений  $\sigma_b$  в конструкции при разрушении известна<sup>1</sup> и равна интенсивности напряжения для материала образца. Имеем

$$\sigma_i = \sqrt{\beta(e_i) \sigma_z^2 + 3\tau_{sz}^2} \quad (3.6)$$

Здесь функция  $\beta(e_i)$  определяется уравнением

$$\beta(e_i) = \alpha^2(e_i) - \alpha(e_i) + 1 \quad (3.7)$$

Из уравнения (3.6) имеем

$$\beta(e_i) \sigma_z^2 + 3\tau_{sz}^2 = \sigma_b^2 \quad (3.8)$$

При  $\sigma_i = \sigma_b$  функции  $\alpha(e_i)$  и  $\beta(e_i)$  принимают определенные значения  $\alpha^*(e_i)$  и  $\beta^*(e_i)$ , т. е. для данного материала  $\alpha^*(e_i)$  и  $\beta^*(e_i)$  — известные величины. Тогда уравнение (3.8) в силу (3.1), (3.2), (3.4) примет вид:

$$\beta^*[1 - \chi_2^*(e_i)]^2 \left( \frac{N}{F_2} + \frac{M_x}{I_{x2}} y - \frac{M_y}{I_{y2}} x + \frac{B}{I_{\omega 2}} \omega \right)^2 + \frac{3}{\delta^2(s)} \left[ \frac{Q_x}{I_{y1}} S_{y1}(s, e_i) + \frac{Q_y}{I_{x1}} S_{x1}(s, e_i) + \frac{M_\omega}{I_{\omega 1}} S_{\omega 1}(s, e_i) \right]^2 = \sigma_b^2 \quad (3.9)$$

<sup>1</sup> В принципе задача решается при известной зависимости  $\sigma_b = F(\sigma_z, \tau_{sz})$ .

Здесь  $\chi_2^*(e_i)$  — значение функции  $\chi_2(e_i)$  при  $e_i = e_b$ .

Уравнением (3.9) установлено конечное соотношение между силами и моментами с учетом упрочнения и сжимаемости материала:

$$F(N, M_x, M_y, B, Q_x, Q_y, M_2) = 0 \quad (3.10)$$

Отсюда легко получается как частный случай конечное соотношение между силами и моментами без упрочнения материала, полагая  $\sigma_i = \sigma_T = \text{const}$  в (3.9) вместо  $\sigma_b$ ; здесь  $\sigma_T$  — напряжение предела текучести.

**4. Определение несущей способности.** Соотношением (3.9) можно определить несущую способность, если известны кинетические и приведенные характеристики поперечного сечения. Для вычисления этих характеристик необходимо знать значения интенсивности деформации. Из физических соображений приходим к заключению, что при разрушении конструкции во всех ее точках интенсивность деформаций принимает определенное значение. В самом деле, положение любой деформируемой плоскости поперечного сечения  $z = \text{const}$  определяется четырьмя функциями  $1, x, y, \omega$  [4]. Если  $1, x, y, \omega$  — линейно независимые функции, то можно создать такое напряженное состояние, при котором интенсивность деформаций в четырех точках достигает разрушающего значения ( $e_i = e_b$ ).

Возьмем на срединной линии контура (фиг. 4) четыре точки  $M_1, M_2, M_3, M_4$ . Прямоугольные и секториальные координаты этих точек обозначены соответственно  $(x_1, y_1, \omega_1), \dots, (x_4, y_4, \omega_4)$ . Полагая в этих точках  $e_i = e_b$  или принимая во внимание, что  $e_{zz} = e_i / B(e_i)$ , будем иметь [2]

$$\begin{aligned} \zeta' - u''x_1 - v''y_1 - \theta''\omega_1 &= e_{zz}^* \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \zeta' - u''x_4 - v''y_4 - \theta''\omega_4 &= e_{zz}^* \end{aligned} \quad (4.1)$$

Если определитель системы (4.1) отличен от нуля, то, решая ее, найдем  $\zeta', u'', v'', \theta''$ . Теперь осевые относительные удлинения в любой точке рассматриваемого сечения определяются соотношением [4]

$$e_{zz} = \zeta' - u''x - v''y - \theta''\omega \quad (4.2)$$

Определив осевые относительные удлинения в точках поперечного сечения, можно вычислить все кинетические и приведенные характеристики данного сечения и, следовательно, его несущую способность. Таким образом задача о несущей способности решается в замкнутой форме, не прибегая к методу упругих решений.

Поступила 30 XII 1950

Военно-воздушная инженерная академия

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ильюшин А. А. Пластичность, Гостехиздат. 1948.
2. Межлумян Р. А. ПММ. 1950. Т. XIV. Вып. 3.
3. Межлумян Р. А. ПММ. 1950. Т. XIV. Вып. 5.
4. Власов В. З. Тонкостенные упругие стержни. Госстройиздат. 1940.