

ПРИБЛИЖЕННАЯ ТЕХНИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК¹

Ю. Н. Работнов

(Москва)

Применение уравнений теории пластичности к расчету оболочек за пределом упругости встречает большие трудности, которые удалось преодолеть лишь в простейшей задаче об осесимметричной деформации цилиндрической оболочки. Попытки расширить класс решаемых задач остаются пока безуспешными вследствие огромного объема вычислений, необходимых для применения обычных методов. Поэтому представляется естественным пойти на некоторые упрощения в постановке задачи с тем, чтобы сделать ее решение в какой-то мере практически доступным хотя бы для некоторого класса оболочек, встречающегося в приложениях.

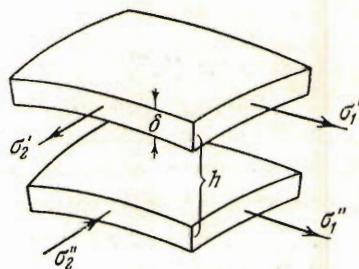
1. Рассмотрим оболочку, для которой приближенно выполняются следующие условия.

1. Вдоль одной из линий кривизны отсутствует искривление

$$\kappa_1 = 0$$

2. Вдоль перпендикулярной линии кривизны равно нулю усилие

$$T_2 = 0$$



Фиг. 1

Теорию таких оболочек будем условно называть «технической», ее уравнения обычно получаются на основе частных гипотез. Будем считать также, что сдвигающая сила и крутящий момент отсутствуют, хотя для теории достаточно равенства нулю одной из этих величин.

Приближенность теории состоит в том, что реальная оболочка заменяется двухслойной моделью (фиг. 1). Условие $T_2 = 0$ и, следовательно, $\sigma_2' = -\sigma_2''$, приводит к равенству [1] $e_2 = -\frac{1}{2}e_1$.

Считая материал в пластической области несжимаемым, напишем выражения для напряжений

$$\sigma_1 = G(3e_1 \pm 2\kappa_2 h), \quad \sigma_2 = \pm 4G\kappa_2 h$$

Здесь G — пластический модуль сдвига, известная функция от интенсивности деформаций

$$e_i^2 = e_1^2 + \frac{4}{3}\kappa_2^2 h^2 \quad (1.1)$$

¹ О работе сделано сообщение на Всесоюзной конференции по теории упругости, строительной механике и теории пластичности 7—10 декабря 1950 г.

Для усилия T_1 и момента M_2 имеем

$$T_1 = 6G\delta e_1, \quad M_2 = 8G\delta \kappa_2 h^2 \quad (1.2)$$

Величины δ и h выберем так, чтобы формулы (1.2) в упругой области совпали с обычными формулами для усилия и момента в упругой оболочке толщины $2b$

$$T_1 = 2Ebe_1, \quad M_2 = \frac{2Eb^3}{3(1-\nu^2)} \kappa_2$$

Отсюда

$$h = \frac{b}{2\sqrt{1-\nu^2}}, \quad G\delta = \frac{Eb}{3} \quad (1.3)$$

Последняя из формул (1.3) показывает, как следует выбирать произведение $G\delta$ в пластической области; здесь под E нужно понимать пластический модуль, т. е. σ_i / e_i . Введем следующие обозначения:

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \kappa_2 h = \frac{v}{\omega}, \quad e = u, \quad \frac{G}{G_0} = \omega$$

Здесь G_0 — любая константа, имеющая размерность напряжения, например упругий модуль сдвига. Из формул (1.2) и (1.1) следует

$$T_1 = 6G_0 \delta u \omega, \quad M_2 = 4\sqrt{3} G_0 \delta h v \quad (1.4)$$

$$u^2 + \frac{v^2}{\omega^2} = e_i^2(\omega) \quad (1.5)$$

Уравнение (1.5) определяет ω как функцию u и v . Это уравнение легко номографируется.

Введение двухслойной модели позволяет избежать рассмотрения упруго-пластических областей в оболочке, упругая часть непосредственно сопрягается с пластической частью.

2. Рассмотрим некоторые частные случаи.

а) *Осесимметричная деформация цилиндрической оболочки.* Уравнения равновесия и совместности деформаций будут здесь следующие:

$$\frac{d^2 M_2}{dx^2} + \frac{1}{a} T_2 + p = 0, \quad \frac{d^2 e_1}{dx^2} - \frac{1}{a} \kappa_2 = 0$$

Введем безразмерную координату

$$s = \frac{x}{l} \quad (l = \sqrt{ah} / \sqrt[4]{3})$$

Переходя в написанных уравнениях к переменным u и v , получим

$$v'' + 2u\omega + q = 0, \quad u'' - 2\frac{v}{\omega} = 0 \quad \left(q = \frac{pa}{3G_0\delta} \right) \quad (2.1)$$

б) *Чистый изгиб криволинейной трубы.* Обозначая радиус кривизны трубы R , радиус сечения трубы a , полярный угол радиуса θ и полагая $a \ll R$, получим: (в обозначениях Лява)

$$A = R, \quad B = a, \quad R_2 = a, \quad R_1 = \frac{R}{\cos \theta}$$

по формулам Лява

$$e_2 = \frac{v' - w}{a}, \quad e_1 = -\frac{v}{R} \sin \theta - \frac{w}{R} \cos \theta, \quad \kappa_1 = \frac{w'' + u'}{a^2}$$

Видно, что $e_2 \gg e_1$, поэтому условие $T_2 = 0$ сводится к условию $e_2 \approx 0$. Отсюда следует $w \approx v'$, Итак,

$$e_1 = -\frac{1}{R} (v \sin \theta + v' \cos \theta), \quad \kappa_2 = \frac{1}{a^2} (v''' + v')$$

Исключая отсюда функцию v , придем к уравнению совместности:

$$e_1''' + e_1' + \frac{a^2}{R} [(\kappa_2 \cos \theta)' - \kappa_2 \sin \theta] = 0 \quad (2.2)$$

Уравнения равновесия Лява приводятся здесь к следующей системе:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} T_2' + \frac{1}{R} T_2 \sin \theta - \frac{N_2}{a} &= 0, & \frac{1}{a} M_2' + N_2 &= 0 \\ \frac{1}{a} N_2' + \frac{1}{a} T_2 + \frac{\cos \theta}{R} T_1 &= 0 \end{aligned}$$

В результате исключения T_2 и N_2 получим

$$M_2''' + M_2' - \frac{a^2}{R} \{(T_1 \cos \theta)' - T_1 \sin \theta\} = 0 \quad (2.3)$$

Переходя в уравнениях (2.2) и (2.3) к переменным u и v , получим систему двух уравнений:

$$\begin{aligned} u''' + u' + v^2 \left\{ \left(\frac{v}{\omega} \cos \theta \right)' - \frac{v}{\omega} \sin \theta \right\} &= 0 \\ v''' + v' - v^2 \{ (u\omega \cos \theta)' - u\omega \sin \theta \} &= 0 \end{aligned} \quad \left(v^2 = \frac{a^2 V \bar{3}}{2Rh} \right) \quad (2.4)$$

в) Цилиндрическая оболочка средней длины. Следуя В. З. Власову [2], напишем уравнения равновесия и совместности деформаций в виде:

$$\Omega e_1 - \frac{\partial^2 \kappa_2}{\partial z^2} = 0, \quad \Omega M_2 + \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} = P \quad (2.5)$$

Здесь

$$\Omega = \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(R \frac{\partial^2}{\partial s^2} \right) + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial s} \right)$$

Положим $s = \alpha a$, $R = \rho a$, где a — характерный радиус. Тогда $\Omega = a^{-3} \Omega^*$, оператор Ω^* получается из оператора Ω заменой s на α и R на ρ . Уравнения (2.5) заменятся следующей системой:

$$\Omega^* u - \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \frac{v}{\omega} = 0, \quad \Omega^* v + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} (u\omega) = 0 \quad (2.6)$$

Здесь

$$\zeta = \frac{z}{l} \quad \left(l^2 = \frac{a^3 V \bar{3}}{2h} \right)$$

Для кругового цилиндра радиуса a

$$\frac{\partial^4 u}{\partial \alpha^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \left(\frac{v}{\omega} \right) = 0, \quad \frac{\partial^4 v}{\partial \alpha^4} + \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} (u\omega) = 0 \quad (2.7)$$

Уравнения (2.1), (2.4), (2.6) и (2.7) представляют собой нелинейные системы довольно простого вида, построенные в известном смысле симметричным образом. Здесь ω определяется как функция u и v с помощью уравнения (1.5). Рассмотрим некоторые частные случаи.

а) *Линейное упрочнение*

$$u^2 + \frac{v^2}{\omega^2} = e_T^2 \left(\frac{1-\kappa}{\omega-\kappa} \right)^2 \quad (2.8)$$

Здесь $\kappa = E_1 / E$ — отношение модуля упрочнения к модулю упругости, $G_0 = \frac{1}{3} E$.

б) *Степенное упрочнение* $\sigma = ae^\beta$. Полагая $a = G_0$, найдем

$$u^2 + \frac{v^2}{\omega^2} = \omega^{\frac{2}{\beta-1}} \quad (2.9)$$

В этом случае упругий участок вообще в рассмотрение не вводится. Уравнение (2.9) представляет интерес для изучения квазиустановившейся ползучести [3]. Для решения полученных систем уравнений применяются различные приближенные методы, а также численное интегрирование, если данные задачи делают его удобным. Некоторые примеры таких решений мы рассмотрим.

3. При решении краевых задач для ограниченной области представляется естественным метод последовательных приближений, связанный с представлением искомых функций в виде разложений по фундаментальным функциям некоторой системы линейных уравнений. Покажем применение этого приема к задаче о чистом изгибе криволинейной трубы. Будем искать решение уравнений (2.4) в следующем виде:

$$u = \sum a_k \cos k\theta, \quad (k = 1, 3, \dots), \quad v = \sum b_m \cos m\theta \quad (m = 0, 2, \dots)$$

Поскольку ω зависит от u^2 и v^2 , можно написать

$$\omega = \sum p_s \cos s\theta, \quad \frac{1}{\omega} = \sum q_s \cos s\theta \quad (s = 0, 2, \dots)$$

Внося в уравнение (2.4), умножая на $\sin k\theta$ и интегрируя, получим

$$a_k k(k^2 - 1) = -v^2 \sum b_m q_s \Gamma_{ms, k}, \quad b_m m(m^2 - 1) = v^2 \sum a_k p_s \Gamma_{ks, m}$$

Здесь

$$\Gamma_{ms, k} = \frac{2}{\pi} \left\{ k \int_0^\pi \cos m\theta \cos s\theta \cos k\theta \cos \theta d\theta + \int_0^\pi \cos m\theta \cos s\theta \sin \theta \sin k\theta d\theta \right\}$$

Ограничиваясь двумя членами в каждом ряде, получим

$$\begin{aligned} 0 &= 2q_0 b_0 + q_2 b_2 \\ 24 a_3 &= -v^2 [2q_0 b_2 + q_2 (2b_0 + \frac{1}{2} b_2)] \\ 6b_2 &= v^2 [p_0 (\frac{3}{2} a_1 + \frac{1}{2} a_3) + p_2 a_1] \end{aligned}$$

Из этих уравнений следует

$$\begin{aligned} a_3 &= -\frac{v^4}{48} p_0 q_0 \left[1 + \frac{1}{4} \frac{q_2}{q_0} \left(1 - 2 \frac{q_2}{q_0} \right) \right] \left(1 + \frac{2}{3} \frac{p_2}{p_0} \right) a_1 = -\mu a_1 \\ b_0 &= -\frac{q_2}{2q_0} b_2, \quad b_2 = \frac{v^2}{4} p_0 \left(1 + \frac{2}{3} \frac{p_2}{p_0} \right) a_1 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Изгибающий момент

$$M = \int_{-\pi}^{+\pi} T_1 a^2 \cos \theta d\theta = 6G_0 \delta a^2 \int_{-\pi}^{+\pi} \omega u \cos \theta d\theta = \\ = 12G_0 \delta a^2 \sum a_k p_s \int_0^\pi \cos k\theta \cos s\theta \cos \theta d\theta$$

Ограничиваясь двумя членами в каждом ряде, получим

$$a_1 = \frac{M}{3\pi G_0 \delta a^2} \frac{1}{2p_0 + (1-\nu)p_2} \quad (3.2)$$

Деформация изгиба определяется следующим образом:

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{R}{a} a_1 (1 + 3\mu) \quad (3.3)$$

В упругом случае предлагаемое решение несколько отличается от решения Кармана, а именно в обычных обозначениях получается:

поправка к жесткости

$$\frac{4\lambda^2 + 3}{4\lambda^2} \quad \text{вместо} \quad \frac{12\lambda^2 + 10}{12\lambda^2 + 1}$$

коэффициент при кубическом члене в выражении для напряжения

$$\frac{4}{3 + 4\lambda^2 / (1 - \nu^2)} \quad \text{вместо} \quad \frac{6}{5 + 6\lambda^2}$$

При больших λ , когда первое приближение достаточно, разница между этими решениями весьма мала.

При расчете трубы из пластического материала следует в исходном приближении принять $\omega = 1$; следовательно, $p_0 = q_0 = 1$, $p_2 = q_2 = 0$. Найдя a_1 по заданному моменту, a_3 и b_2 по формулам (3.1), строят график функций ω и $1/\omega$, находят p_0 , q_0 , p_2 и q_2 и повторяют расчет.

4. Задача о трубе под действием кольцевого давления решена А. А. Ильюшиным^[1]. Приближенное решение той же задачи для случая степенного упрочнения, или, что то же, квазиустановившейся ползучести, мы получим по методу Галеркина. Рассмотрим вспомогательную систему линейных уравнений

$$V'' + 2\lambda U = 0, \quad U'' - 2\mu V = 0$$

Решение ее, соответствующее граничным условиям бесконечной в обе стороны оболочки, нагруженной кольцевым давлением, будет

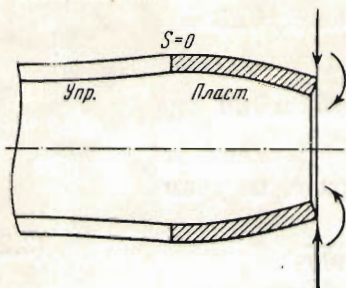
$$U = Ae^{-\alpha s} (\cos \alpha s + \sin \alpha s), \quad V = A \sqrt{\frac{\lambda}{\mu}} e^{-\alpha s} (\cos \alpha s - \sin \alpha s) \quad (\alpha = \sqrt[4]{\lambda\mu}) \quad (4.1)$$

Подберем параметры λ и μ таким образом, чтобы функции U и V аппроксимировали решение системы (2.1) наилучшим образом в смысле Галеркина. Для этого нужно, чтобы

$$2\lambda = \int_0^\infty p\omega d\xi / \int_0^\infty p d\xi, \quad 2\mu = \int_0^\infty \frac{q}{\omega} d\xi / \int_0^\infty q d\xi \quad (4.2)$$

Здесь

$$p(\xi) = e^{-\xi} (1 + \sin \xi), \quad q(\xi) = e^{-\xi} (1 - \sin \xi)$$



Положим

$$\omega = \psi \sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}, \quad A^2 = \left(\frac{\lambda}{\mu \sigma^2} \right)^{\frac{1}{\beta-1}}$$

Из уравнения (2.9) получим

$$p + \frac{q}{\psi^2} = (\sigma \psi)^{\frac{2}{\beta-1}} \quad (4.3)$$

Фиг. 2

Таким образом, ψ определено как функция ξ и σ . Заменяя ω в формулах (4.2), найдем

$$2 \sqrt{\lambda \mu} = 2 \alpha^2 = \frac{2}{3} \int_0^{\infty} p \psi d\xi = 2 \int_0^{\infty} \frac{q}{\psi} d\xi \quad (4.4)$$

Уравнения (4.3) и (4.4) определяют некоторые величины $\sigma = \sigma_0$ и $\alpha = \alpha_0$, зависящие только от показателя β .

Желая определить зависимость наибольшего прогиба A от приложенного давления P , заметим, что перерезывающая сила

$$N = \frac{4 \sqrt{3} G_0 \delta h}{l} v'$$

Вычисляя $v'(0)$ и полагая $N = \frac{1}{2} P$, $\bar{P} = \frac{Pl}{16 \sqrt{3} G_0 \delta h}$, найдем

$$\bar{P} = \alpha_0 \sigma_0 A^\beta \quad (4.5)$$

При решении уравнения (4.4) поступаем так. Положим

$$\sigma \psi = h p^{\frac{\beta-1}{2}}$$

и подставим в (4.3). Имеем

$$h^2 \left(1 - h^{\frac{2}{\beta-1}} \right) + q p^{-\beta} \sigma^2 = 0$$

Это уравнение легко номографируется так. Положим

$$\int_0^{\infty} h p^{\frac{\beta+1}{2}} d\xi = J_1(\sigma), \quad \int_0^{\infty} \frac{1}{h} q p^{\frac{1-\beta}{2}} d\xi = J_2(\sigma)$$

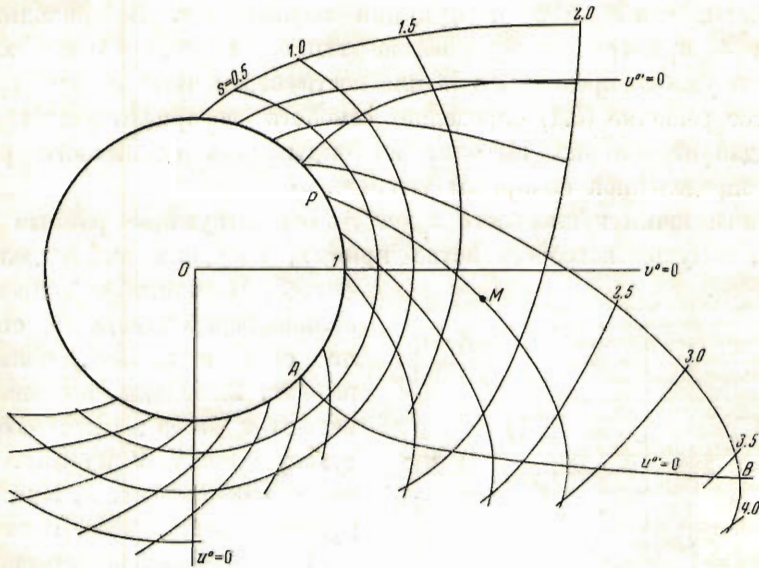
Уравнение (4.4) примет следующий вид:

$$\sigma^2 = \frac{3J_2}{J_1}$$

Вычисляя J_1 и J_2 для разных σ , можно подобрать его решение. Так, полагая $\beta = \frac{1}{3}$, мы нашли $\sigma_0 = 1.092$. При этом $J_2 = 0.490$, $J_1 = 1.76$, $\alpha_0 = 0.732$; следовательно,

$$\bar{P} = 0.798 \sqrt[3]{A}$$

5. Отсутствие упруго-пластической области в тех задачах, когда диаграмма $\sigma_i = \sigma_i(e_i)$ предполагается имеющей упругий участок, в некоторых случаях существенно упрощает задачу численного интегрирования.



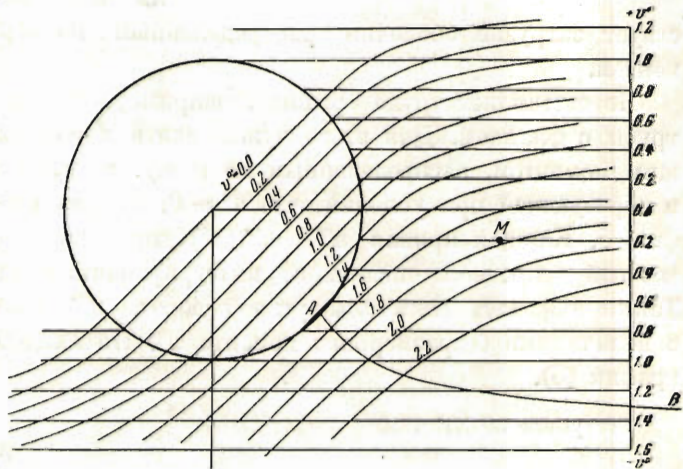
Фиг. 3

Рассмотрим задачу о полубесконечной трубе, нагруженной на торце (фиг. 2) каким угодно образом. В задачах с линейным упрочнением удобно ввести вместо u и v величины

$$u^\circ = \frac{u}{e_T}, \quad v^\circ = \frac{v}{e_T}$$

Поместим начало координат на границе упругой и пластической области. При $s < 0$, где оболочка упруга, имеем решение, зависящее от двух констант:

$$\begin{aligned} u^\circ &= Ae^s \cos(s - \tau) \\ v^\circ &= -Ae^s \sin(s - \tau) \end{aligned} \quad (5.1)$$



Фиг. 4

При $s = 0$, $\omega = 1$ по уравнению (2.9) имеем $u^{\circ 2} + v^{\circ 2} = 1$; следовательно, $A = \pm 1$.

Выбирая $A = +1$, получаем начальные значения u° и v° для пластической области

$$u^\circ(0) = \cos \tau, \quad v^\circ(0) = \sin(\tau)$$

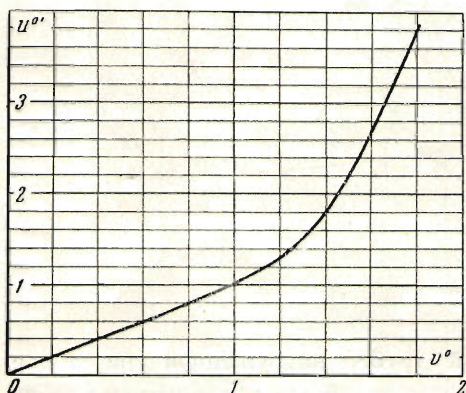
и начальные значения производных

$$u''(0) = \cos \tau + \sin \tau, \quad v''(0) = -\cos \tau + \sin \tau$$

Задаваясь различными значениями τ , интегрируем систему (2.1) численно, получая u° и v° в функции параметра s . В приводимом на фиг. 3 и 4 примере интегрирование выполнено для случая $\kappa = 0.1$. Результаты удобно представить в плоскости переменных u° и v° (фиг. 4).

Упругое решение (5.1) определяет семейство логарифмических спиралей, каждая из которых выходит на окружность единичного радиуса в точке, определенной полярным углом τ .

Соединим точки в плоскости u°, v° , соответствующие равным значениям v'' , получим новое семейство кривых, изображенных отдельно на



Фиг. 5

фиг. 5. Величина v'' пропорциональна перерезывающей силе, если сила и момент, показанные на фиг. 2, заданы, это значит известны v'' и v° . Ищем соответствующую точку M на фиг. 4, переносим ее на фиг. 3. Кривая MP представляет решение задачи.

В случае кольцевого давления $u'' = 0$. Геометрическое место точек, для которых $u'' = 0$, есть линия AB ; различные точки ее соответствуют различным значениям силы. Линия $v'' = 0$ соответ-

ствует загрузке оболочки распределенным по торцу изгибающим моментом.

Не составляет труда решить, например, такую задачу, как расчет трубы с фланцем. Для этого нужно знать зависимость между изгибающим моментом, распределенным по торцу, и углом поворота касательной и образующей при условии, что $u^\circ = 0$. Эта зависимость изображена на фиг. 5. Каждая кривая $u'' = u''(v^\circ)$ пересекает ось v° в точке, для которой в процессе численного интегрирования находится значение u'' . Таким образом, величины угла поворота u'' ставятся в соответствие с величинами безразмерного момента v° . По найденным точкам строится график (6).

Поступила 30 XII 1950

Институт механики
Академии Наук СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильюшин А. А. Пластичность. ГТТИ. 1948.
2. Власов В. З. Общая теория оболочек. ГТТИ. 1949.
3. Работнов Ю. Н. Вестник МГУ. 1948. № 10.