Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XV, 1951

О ПРИМЕНЕНИИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ РИМАНА-ГИЛЬБЕРТА К РАСЧЕТУ БЕЗМОМЕНТНЫХ ОБОЛОЧЕК

А. Л. Гольденвейзер

(*Москва*)

В предлагаемой работе рассматриваются некоторые вопросы, связанные с расчетом безмоментных оболочек, очерченных по поверхностям второго порядка положительной кривизны. Под безмоментной теорией подразумевается приближенный метод расчета оболочек, основанный на предположении, что в уравнениях равновесия могут быть отброшены моменты, а следовательно, и перерезывающие усилия. Тогда, как известно, тангенциальные усилия могут быть определены путем интегрирования уравнений равновесия. В связи с этим иногда говорят, что безмоментная оболочка является статически определимой в бесконечно малом. Ниже будет показано, что безмоментная оболочка в целом будет статически определимой только при определенных граничных условиях.

§ 1. Постановка задачи. Тангенциальные усилия T_1, T_2, S_1 и S_2 (здесь и в дальнейшем использованы обозначения Лява, которые считаются известными читателю), поскольку они определяются решением системы линейных дифференциальных уравнений, могут быть представлены в виде

$$T_1 = T_1^* + T_1^{(1)}, \qquad T_2 = T_2^* + T_2^{(1)}, \qquad S_1 = -S_2 = S^* + S^{(1)}$$

где T_1^*, T_2^*, S^* — усилия, отвечающие какому-либо частному интегралу уравнений безмоментной теории, а $T_1^{(1)}$, $T_2^{(1)}$, $S^{(1)}$ — усилия, отвечающие общему интегралу соответствующих однородных уравнений. В дальнейшем будем считать, что частный интеграл, т. е. величины T_1^*, T_2^*, S^*, нам известен, так как обычно его определение не вызывает затруднений. Если тем или иным способом будут найдены тангенциальные усилия безмоментной оболочки T_1, T_2, S_1, S_2, то можно ставить задачу и об определении ее перемещений. Для этого могут быть использованы соотношения упругости. Они, например в ортогональных координатах, устанавливаются равенствами

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2Eh}(T_1 - \sigma T_2), \qquad \varepsilon_2 = \frac{1}{2Eh}(T_2 - \sigma T_1), \qquad \omega = \frac{Eh}{1+\sigma} S \qquad (1.1)$$

в которых левые части по известным формулам могут быть выражены через u, v, w и их производные.

В соответствии с этим зададим u, v, w в виде

$$u = u^* + u^{(1)} + u^{(2)}, \qquad v = v^* + v^{(1)} + v^{(2)}, \qquad w = w^* + w^{(1)} + w^{(2)}$$

Здесь u^*, v^*, w^* — частный интеграл системы (1.1), соответствующий случаю, когда

$$T_1 = T_1^*, \qquad T_2 = T_2^*, \qquad S = -S_2 = S^*$$

$u^{(1)}$, $v^{(1)}$, $w^{(1)}$ — частный интеграл системы (1.1), соответствующий случаю, когда

$$T_1 = T_1^{(1)}, \qquad T_2 = T_2^{(1)}, \qquad S_1 = -S_2 = S^{(1)}$$

$u^{(2)}$, $v^{(2)}$, $w^{(2)}$ — общий интеграл однородной системы (1.1), т. е. общий интеграл уравнений

$$\varepsilon_1 = 0, \qquad \varepsilon_2 = 0, \qquad \omega = 0$$

Геометрический смысл перемещений $u^{(2)}$, $v^{(2)}$, $w^{(2)}$ очевиден — это будут перемещения, определяющие бесконечно малые изгибания срединной поверхности (деформации, при которых отсутствуют растяжения (сжатия) и сдвиги).

Таким образом, перемещения безмоментной оболочки, вообще говоря, определяются лишь с точностью до перемещений, соответствующих бесконечно малым изгибаниям срединной поверхности, частным случаем которых являются смещения оболочки как жесткого целого (тривиальные изгибания). Эти изгибания могут быть устранены только соответствующим закреплением краев. Они играют в безмоментной оболочке такую же роль, какую имеют жесткие смещения в моментной оболочке. Физически этот результат объясняется тем, что бесконечно малые изгибания сопровождаются появлением лишь изгибных деформаций $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, τ, а последние в свою очередь связаны только с моментами, которые мы не учитываем.

На каждом краю безмоментной оболочки может быть поставлено по два граничных условия, из которых по крайней мере одно должно накладываться на перемещения. Мыслимы два основных случая:

а) когда на каждом краю ставится по одному статическому и одному геометрическому условию;

б) когда на каждом краю ставятся по два геометрических граничных условия.

(Мы не принимаем во внимание более сложные случаи, когда на разных краях или на разных участках одного края накладываются условия разного вида.)

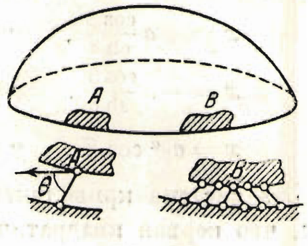
Мы остановимся здесь исключительно на рассмотрении случая «а». К нему ценой известной схематизации условий закрепления, неизбежной при использовании безмоментной теории, может быть сведен расчет ряда реальных конструкций.

Будем предполагать, что оболочка имеет один край, подкрепленный таким образом, что по безмоментной теории должны быть поставлены два граничных условия: одно, выражающее требование, чтобы край оболочки не смещался в некотором тангенциальном (лежащем в касательной плоскости) направлении m, и другое, состоящее в требовании, чтобы в тангенциальном направлении l не могли возникать упругие реакции (направления l и m, конечно, взаимно ортогональны).

Для интерпретации получаемых результатов удобно представлять себе такие подкрепления в виде стерженьков, при помощи которых оболочка в каждой точке края соединяется с неподвижным основанием. На фиг. 1 такое условное крепление показано для одной из краевых точек оболочки А.

Угол θ, который составляет условный стерженек с направлением касательной к краевому контуру[1], мы будем считать произвольной кусочно-непрерывной функцией параметра σ, задающего положение точки на краю.

Точки $\sigma = \sigma_j$, где функция θ претерпевает скачки, будут называться точками разрыва граничных условий. На фиг. 1 изображена окрестность одной из таких точек (B). Так как $\theta(\sigma_j + 0) \neq \theta(\sigma_j - 0)$, то можно считать, что точка $\sigma = \sigma_j$ закреплена не одним, а двумя стерженьками. Учитывая это, будем принимать, что

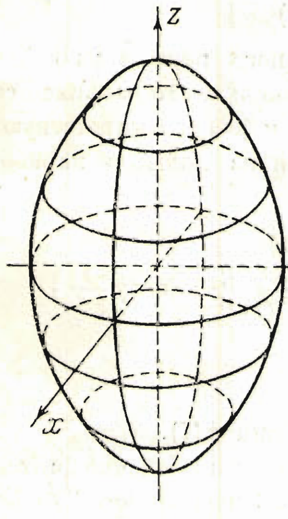


Фиг. 1

$$u = v = 0 \quad \text{при } \sigma = \sigma_j$$

Вместе с тем из физических соображений ясно, что резкое изменение граничных условий влечет за собой, вообще говоря, концентрацию напряжений, так что в точках разрыва граничных условий тангенциальные усилия могут принимать и бесконечные значения.

§ 2. Комплексные функции напряжения и смещений. В работе [1] было показано, что для сферической безмоментной оболочки величины $T_1^{*(1)}$, $T_2^{(1)}$, $S^{(1)}$, т. е. усилия, соответствующие общему интегралу однородных уравнений, просто выражаются через действительную и мнимую части некоторой аналитической функции комплексного переменного (комплексная функция напряжения), а величины $u^{(2)}$, $v^{(2)}$, $w^{(2)}$, т. е. перемещения, соответствующие произвольному бесконечно малому изгибанию срединной поверхности, связаны простыми зависимостями с действительной и мнимой частями другой аналитической функции комплексной переменной (комплексной функцией перемещений). В части, касающейся определения усилий, этот результат был обобщен В. З. Власовым в работах [2, 3] на произвольные оболочки, описанные по поверхностям второго порядка положительной кривизны[2]. Обобщение, включающее и вопросы нахождения перемещений, было дано в нашей заметке [4], на которую мы здесь и будем опираться.



Фиг. 2

В этой заметке срединная поверхность оболочки, которая может иметь форму произвольного эллипсоида, двуполостного гиперболоида или эллип-

---

[1] Угол θ будет считаться положительным при той конфигурации, которая показана на фиг. 1.

[2] Статья [2] появилась в печати ранее, чем [1], но в ней имеется ссылка на [1].

тического параболоида, отнесена к «географическсй системе координат», как показано, например, на фиг. 2 для эллипсоида.

Тогда уравнение перечисленных поверхностей может быть задано в параметрическом виде следующими соотношениями:

$$x = a\frac{\cos\beta}{\operatorname{ch}\alpha}, \quad y = b\frac{\sin\beta}{\operatorname{ch}\alpha}, \quad z = -c\operatorname{tg}h\,\alpha \quad \text{(эллипсоид)}$$

$$x = -a\frac{\cos\beta}{\operatorname{sh}\alpha}, \quad y = -b\frac{\sin\beta}{\operatorname{sh}\alpha}, \quad z = -c\operatorname{tg}h\,\alpha \quad \text{(гиперболоид)}$$

$$x = ae^{\alpha}\cos\beta, \quad y = be^{\alpha}\sin\beta, \quad z = -\frac{1}{2}e^{2\alpha} \quad \text{(параболоид)}$$

Эта система криволинейных координат в общем случае косоугольна так, что первая квадратичная форма для нее имеет вид:

$$I = A^2\,d\alpha^2 + 2AB\cos\chi\,d\alpha\,d\beta + B^2\,d\beta^2$$

Показано, что если ввести обозначения

$$T_1^{(1)} = -\frac{A}{B}\mu t, \qquad T_2^{(1)} = \frac{B}{A}\mu t, \qquad S_1^{(1)} = -S_2^{(1)} = \mu s$$

и выбрать μ следующим образом:

$$\mu = \operatorname{ch}^2\alpha \quad \text{(для эллипсоида)}$$

$$\mu = \operatorname{sh}^2\alpha \quad \text{(для гиперболоида)}$$

$$\mu = e^{-2\alpha} \quad \text{(для параболоида)}$$

то t и s будут равны действительной части и коэффициенту при мнимой части некоторой комплексной функции напряжения ψ:

$$t + is = \psi(\zeta) \qquad (\zeta = e^{\alpha+i\beta})$$

При этом между точками плоскости комплексного переменного ζ и всеми точками эллипсоида, гиперболоида или параболоида устанавливается взаимно однозначное соответствие, а точкам $\zeta = 0$ и $\zeta = \infty$ соответствуют полюсы географической системы координат (один из полюсов параболоида находится в бесконечности).

Равным образом, если положить

$$u^{(2)} = \frac{1}{\mu\sin^2\chi}\left(\frac{p}{A} - \cos\chi\frac{q}{B}\right), \qquad v^{(2)} = \frac{1}{\mu\sin^2\chi}\left(\frac{q}{B} - \cos\chi\frac{p}{A}\right)$$

то будет иметь место равенство

$$p + iq = g(\zeta)$$

которым вводится комплексная функция перемещений $g(\zeta)$.

Эллиптической, гиперболической или параболической оболочке с одним произвольным срезом в плоскости комплексного переменного ζ будет соответствовать некоторая односвязная область S с границей L. В ней должны быть определены функции $\psi(\zeta)$ и $g(\zeta)$, на которые накладываются следующие требования.

Комплексная функция напряжений $\psi(\zeta)$ должна быть аналитической всюду в области S, а в точках $\zeta = 0$ и $\zeta = \infty$, если они находятся в S, функция $\psi(\zeta)$ должна иметь нули по меньшей мере второго порядка.

Комплексная функция перемещений $g(\zeta)$ должна быть аналитической функцией всюду в области S за исключением, быть может, точек $\zeta = 0$

и $\zeta = \infty$. В этих точках, если они принадлежат области S, функция $g(\zeta)$ может иметь полюсы, но не выше, чем первого порядка.

На контуре L, ограничивающем область S, функция напряжений $\psi(\zeta)$ и функция перемещений $g(\zeta)$ должны удовлетворять граничным условиям.

Условие, накладываемое на функцию напряжений, выражает факт отсутствия реакций в направлении l и может быть записано так:

$$a(\sigma)t - b(\sigma)c = c^*(\sigma) \tag{2.1}$$

где

$$a(\sigma) = -A^2 \sin\lambda \sin(\lambda + \theta) + B^2 \sin(\chi + \lambda) \sin(\chi + \lambda + \theta)$$

$$b(\sigma) = -AB[\sin\lambda \sin(\chi + \lambda + \theta) + \sin(\chi + \lambda)\sin(\lambda + \theta)]$$

$$c^*(\sigma) = \frac{AB\sin\chi}{\mu}(T - T^*)$$

$$T^* = \frac{\sin\lambda \sin(\lambda + \theta)}{\sin\chi} T_1{}^* + \frac{\sin(\chi + \lambda)\sin(\chi + \lambda + \theta)}{\sin\chi} T_2{}^* +$$
$$+ \frac{\sin\lambda\sin(\chi + \lambda + \theta) + \sin(\chi + \lambda)\sin(\lambda + \theta)}{\sin\chi} S^*$$

Фигурирующие в этих соотношениях величины λ и T имеют следующий смысл: λ — угол, на который надо повернуть (по часовой стрелке, если смотреть со стороны внешней нормали) направление α — линии координатной системы для совмещения с направлением касательной к краю оболочки; T — интенсивность заданного краевого усилия, действующего в направлении нулевой реакции l.

Условие, накладываемое на функцию перемещений $g(\zeta)$, выражает факт отсутствия смещения в направлении m и может быть записано так:

$$d(\sigma)p - e(\sigma)q = r^*(\sigma) \tag{2.2}$$

где

$$d(\sigma) = B[-\cos(\theta + \lambda) + \cos\chi\cos(\lambda + \chi + \theta)]$$

$$e(\sigma) = A[\cos(\lambda + \chi + \theta) - \cos\chi\cos(\theta + \lambda)]$$

$$r^*(\sigma) = -AB\mu(M^{(1)} + M^*)$$

$$M^{(1)} = -u^{(1)}\cos(\theta + \lambda) - v^{(1)}\cos(\lambda + \chi + \theta)$$

$$M^* = -u^*\cos(\theta + \lambda) - v^*\cos(\lambda + \chi + \theta)$$

В граничных условиях (2.1) и (2.2) функции $a(\sigma)$, $b(\sigma)$, $c(\sigma)$, $d(\sigma)$ вполне определяются углом $\theta = \theta(\sigma)$ и очертанием контура, а функции $c^*(\sigma)$ и $r^*(\sigma)$ можно считать известными, если принять, что мы умеем находить частные интегралы безмоментных уравнений и уравнений (1.1) при любых значениях свободных членов. При этом $r^*(\sigma)$ можно найти только после того, как будут определены усилия $T_1{}^{(1)}$, $T_2{}^{(1)}$, $S^{(1)}$, т. е. после того, как будет определена комплексная функция напряжений. Поэтому последовательность решения задачи должна быть такой: сначала решается статическая задача, т. е. находится комплексная функция напряжения с учетом граничного условия (2.1), затем решается геометрическая задача, т. е. находится комплексная функция перемещений с учетом условия (2.2).

Докажем, что если край оболочки не проходит ни через один из полюсов географической системы координат, то в любой точке, исключая $\sigma = \sigma_j$, существует соотношение

$$a^2 + b^2 \neq 0$$

Имеем

$$a^2 + b^2 = A^4 \sin^2 \lambda \sin^2 (\lambda + \theta) + B^4 \sin^2 (\chi + \lambda) \sin^2 (\chi + \lambda + \theta) +$$
$$+ A^2 B^2 \sin^2 \lambda \sin^2 (\chi + \lambda + \theta) + A^2 B^2 \sin^2 (\chi + \lambda) \sin^2 (\lambda + \theta)$$

Поскольку A и B могут обращаться в нули только в полюсах географической системы координат, равенство $a^2 + b^2 = 0$ будет выполняться только тогда, когда

$$\sin \lambda \sin (\lambda + \theta) = 0, \qquad \sin (\chi + \lambda) \sin (\chi + \lambda + \theta) = 0$$
$$\sin \lambda \sin (\chi + \lambda + \theta) = 0, \qquad \sin (\chi + \lambda) \sin (\lambda + \theta) = 0$$

Легко видеть, что это возможно только при χ, кратном π. Мы приходим к противоречию, так как χ — угол между параллелями и меридианами географической системы координат — кратным π быть не может.

Таким же образом доказывается, что $d(\sigma)$ и $e(\sigma)$ одновременно не обращаются в нули. Пользуясь этим, граничные условия (2.1) и (2.2), соответственно, можно представить так:

$$t \sin \gamma_l + s \cos \gamma_l = c(\sigma) \tag{2.3}$$

$$p \sin \gamma_m + q \cos \gamma_m = r(\sigma) \tag{2.4}$$

где γ_l и γ_m определяются равенствами:

$$\operatorname{tg} \gamma_l = \frac{-A^2 \sin \lambda \sin (\lambda + \theta) + B^2 \sin (\chi + \lambda) \sin (\chi + \lambda + \theta)}{AB [\sin \lambda \sin (\chi + \lambda + \theta) + \sin (\chi + \lambda) \sin (\lambda + \theta)]}$$

$$\operatorname{tg} \gamma_m = \frac{B [\cos (\theta + \lambda) - \cos \chi \cos (\lambda + \chi + \theta)]}{A [\cos (\lambda + \chi + \theta) - \cos \chi \cos (\theta + \lambda)}$$

Чтобы придать γ_l и γ_m определенные значения в каждой точке контура, условимся считать, что при $\sigma = \sigma_0$ ($\sigma_0 \neq \sigma_j$) выбраны определенные ветви арктангенсов и что при переходе через точку разрыва граничных условий скачки функций γ_l и γ_m, подчиняются следующим неравенствам:

$$0 < \Delta \gamma_l < \pi, \qquad 0 < \Delta \gamma_m < \pi$$

Равным образом придадим углу θ в точке $\sigma = \sigma_0$ некоторое определенное значение и потребуем, чтобы приращения, которые он получает при переходе через точки разрыва граничных условий, удовлетворяли условию

$$0 > \Delta \theta > -\pi$$

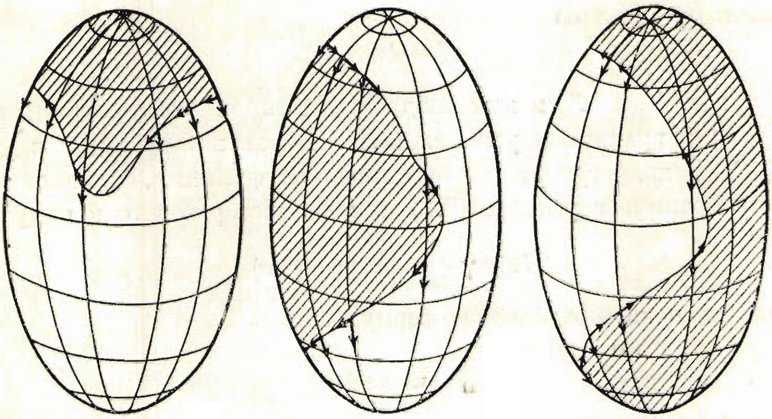
Тогда можно доказать, что если обозначить через $\delta \gamma_l$, $\delta \gamma_m$, $\delta \theta$ и $\delta \lambda$ приращения, которые получают соответствующие углы при однократном обходе края оболочки в положительном направлении[1], то

$$\delta \gamma_l = -\delta \theta - 2\delta \lambda, \qquad \delta \gamma_m = \delta \theta + \delta \lambda + k\pi$$

[1] Считается, что при обходе контура в положительном направлении область должна оставаться справа.

где k — число точек разрыва граничных условий (несложное, но громоздкое доказательство мы опускаем).

Из фиг. 3 можно усмотреть, что величина $\delta\lambda$ зависит только от того, сколько полюсов географической системы координат будет содержать



Фиг. 3

срединная поверхность рассматриваемой оболочки или, что то же, от того, сколько из точек $\zeta = 0$ и $\zeta = \infty$ содержится в области S (случаи, когда контур L проходит через $\zeta = 0$ или $\zeta = \infty$, исключены из рассмотрения):

$$\delta\lambda = -2\pi \quad (\text{если } S \text{ содержит и } \zeta = 0, \text{ и } \zeta = \infty)$$

$$\delta\lambda = 0 \quad (\text{если } S \text{ содержит либо } \zeta = 0, \text{ либо } \zeta = \infty)$$

$$\delta\lambda = +2\pi \quad (\text{если } S \text{ не содержит ни } \zeta = 0, \text{ ни } \zeta = \infty)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \delta\gamma_l &= -\delta\theta + 4\pi \\ \delta\gamma_m &= \delta\theta - 2\pi + k\pi \end{aligned} \quad \left(\begin{matrix}\text{если } S \text{ содержит} \\ \text{и } \zeta = 0, \text{ и } \zeta = \infty\end{matrix}\right) \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned} \delta\gamma_l &= -\delta\theta \\ \delta\gamma_m &= \delta\theta + k\pi \end{aligned} \quad \left(\begin{matrix}\text{если } S \text{ содержит} \\ \text{либо } \zeta = 0, \text{ либо } \zeta = \infty\end{matrix}\right) \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned} \delta\gamma_l &= -\delta\theta - 4\pi \\ \delta\gamma_m &= \delta\theta + 2\pi + k\pi \end{aligned} \quad \left(\begin{matrix}\text{если } S \text{ не содержит} \\ \text{ни } \zeta = 0, \text{ ни } \zeta = \infty\end{matrix}\right) \tag{2.7}$$

§ 3. Задача Римана-Гильберта. Для построения комплексной функции напряжения и комплексной функции перемещения могут быть использованы решения задачи Римана-Гильберта, изложенные в монографии Н. И. Мусхелишвили [5]. В этом параграфе кратко излагаются полученные в этой книге результаты с небольшими видоизменениями, направленными к тому, чтобы приспособить их к рассматриваемым вопросам.

Задача Римана-Гильберта заключается в том, что требуется найти функцию $\varphi(\zeta) = l + im$, голоморфную в области S и непрерывно продолжимую на граничный контур L всюду, кроме, быть может, точек разрыва непрерывности граничных условий $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$, вблизи которых имеет место оценка

$$|\varphi(\zeta)| = \frac{\Psi\zeta}{|\zeta - \sigma_j|^{\alpha}} \qquad (0 < \alpha < 1) \tag{3.1}$$

по граничному условию

$$al - bm = c^* \tag{3.2}$$

причем под a, b и c^* можно подразумевать те же функции, которые фигурируют в граничном условии (2.1). В равенстве (3.1) и в дальнейшем под $\Psi(\zeta)$ подразумевается ограниченная функция, отличная от нуля при $\zeta = \sigma_j$ Граничнсе условие (3.2) можно преобразовать к виду

$$l \sin\gamma + m \cos\gamma = c(\sigma)$$

Тогда число $\varkappa$, определяемое формулой

$$\varkappa = \frac{\delta\gamma}{\pi}$$

следуя Н. И. Мусхелишвили, мы будем называть индексом задачи Римана-Гильберта ($\delta\gamma$ вычисляется так же, как $\delta\gamma_l$).

Значение индекса $\varkappa$ вскрывается в следующих теоремах.

1° При $\varkappa \geqslant 0$ однородная задача Римана-Гильберта (случай $c = 0$) имеет ровно $\varkappa + 1$ линейно независимых решений.

2° Неоднородная задача Римана-Гильберта (случай $c \neq 0$) при $\varkappa \geqslant -1$ разрешима при всяком $c(\sigma)$; в частности, при $\varkappa = -1$ она разрешима однозначно.

3° При $\varkappa \leqslant -2$ эта задача имеет (единственное) решение лишь тогда, когда соблюдены некоторые интегральные условия (число этих условий равно $-\varkappa - 1$).

4° Решение однородной задачи Римана-Гильберта может быть записано в форме

$$\varphi(\zeta) = \Phi(z) = X(z)(c_0 z^{\varkappa} + c_1 z^{\varkappa - 1} + \ldots + c_{\varkappa}) \tag{3.3}$$

где $z = z(\zeta)$ — функция, отображающая область S на круг $|z| < 1$, коэффициенты $c_0, c_1, \ldots, c_{\varkappa}$ — комплексные константы, связанные соотношениями

$$c_j = \overline{c_{\varkappa - j}} \tag{3.4}$$

а $X(z)$ — так называемая каноническая функция, которая нигде в $S + L$ не обращается в нуль. При некотором выборе констант c_j множитель, стоящий при $X(z)$, может обратиться в нуль при $\zeta = \sigma_j$; тогда оценка (3.1) нарушится и мы в дальнейшем будем это учитывать.

Для построения функции $X(z)$, так же как и для построения решений, упомянутых в 2° и 3°, известны эффективные методы [5].

Возьмем один из частных видов решения (3.3), положив в нем все константы равными нулю за исключением c_0 и $c_{\varkappa}$. Согласно (3.4) они должны быть связаны соотношением $c_0 = \overline{c_{\varkappa}}$.

Поэтому выражение

$$c_0 z^{\varkappa} + c_{\varkappa}$$

обращается в нули в $\varkappa$ точках, расположенных на окружности $|z| = 1$ или, что то же, на контуре L (точки с нулями более чем первого порядка считаются кратными). Только эти нули имеет в области $S+L$ и решение

$$\varphi(\zeta) = \Phi(z) = X(z)(c_0 z^{\varkappa} + c_{\varkappa}) \tag{3.5}$$

Пусть $f(\zeta)$ обозначает функцию, которая в области S не имеет других особенностей, кроме полюсов, и которую можно непрерывно продолжить на L всюду, кроме точек σ_1^*, $\sigma_2^*, \ldots, \sigma_r^*$, вблизи которых имеет место оценка

$$|f(\zeta)| = \frac{\Psi(\zeta)}{|\zeta - \sigma_j^*|^{p+\beta}} \tag{3.6}$$

где p — целое неотрицательное число, а β удовлетворяет неравенству $0 \leqslant \beta < 1$. Положим, кроме того, что $f(\zeta)$ на L не обращается в нуль нигде, кроме точек $\sigma_*^1, \sigma_*^2, \ldots, \sigma_*^n$, а в этих точках имеет место оценка

$$|f(\zeta)| = \Psi(\zeta)\,|\zeta - \sigma_*^j|^{q-\beta} \tag{3.7}$$

(q — целое неотрицательное число). Тогда удобно будет ввести понятие о числе нулей N и о числе бесконечностей P, которые имеет функция $f(\zeta)$ в $S+L$. Под N подразумевается сумма порядков нулей $f(\zeta)$ в S, сложенная с полусуммой чисел q, фигурирующих в оценочной формуле (3.7). Под P подразумевается сумма порядков полюсов $f(\zeta)$ в S, сложенная с полусуммой чисел p, фигурирующих в оценочной формуле (3.6).

Пользуясь такой терминологией, можно утверждать, что для $\varphi(\zeta)$, определенной равенством (3.5):

$$N = \frac{1}{2}\varkappa, \qquad P = 0 \tag{3.8}$$

Рассмотрим функцию вида

$$F(z, \rho, \mu; \nu) = \frac{(z-\rho)^{2\nu}}{\rho^{\nu}(z-\mu)^{\nu}(\bar{\mu}z - 1)^{\nu}}$$

где ρ — произвольное комплексное число с модулем, равным единице, так, что

$$\bar{\rho} = \frac{1}{\rho}$$

μ — произвольное комплексное число, ν — положительное или отрицательное число, которое мы пока будем считать целым.

Функция F имеет нули или полюсы только в точках $z = \rho$, $z = \mu$ и $z = \bar{\mu}^{-1}$. Легко видеть, что в области $|z| \leqslant 1$ для функции F при любом ν

$$N - P = 0$$

Составим выражение

$$\overline{F}(\bar{z}, \bar{\rho}, \bar{\mu}; \nu) = \frac{(\bar{z}-\bar{\rho})^{2\nu}}{\bar{\rho}^{\nu}(\bar{z}-\bar{\mu})^{\nu}(\mu\bar{z}-1)^{\nu}} \tag{3.9}$$

Если точка z находится на окружности $|z| = 1$, т. е. если

$$\bar{z} = \frac{1}{z}$$

то (3.9) преобразовывается к виду

$$\overline{F}(\overline{z}, \overline{\rho}, \overline{\mu}; \nu) = \frac{(z-\rho)^{2\nu}}{\rho^{\nu}(z-\mu)^{\nu}(\overline{\mu}z-1)^{\nu}} = F(z, \rho, \mu; \nu)$$

Отсюда вытекает, что на окружности $|z|=1$ функция $F(z, \rho, \mu; \nu)$ имеет действительные значения и что, следовательно, любое решение однородной задачи Римана-Гильберта можно помножить на $F(z, \rho, \mu; \nu)$, не нарушив условий задачи. Пользуясь этим, запишем решение однородной задачи Римана-Гильберта в виде

$$\varphi(\zeta) = \Phi(z) = X(z)(c_0 z^{\varkappa} + c_{\varkappa}) \Pi F(z, \rho, \mu; \nu) \tag{3.10}$$

где ΠF обозначает произведение любого конечного числа сомножителей вида $F(z, \rho, \mu; \nu)$, в каждом из которых можно значения ρ, μ и ν выбирать произвольно (конечно, при условии, что $|\rho|=1$, а ν — выбрано так, что ΠF не будет иметь точек разветвления в области $S+L$).

Нетрудно видеть, что множители, входящие в ΠF, всегда можно подобрать так, что функция $\varphi(\zeta)$ будет иметь нули и бесконечности в заданных точках и только в них.

Можно по своему произволу задавать и порядки нулей и бесконечностей, если только в конечном итоге будет соблюдено требование

$$N - P = \frac{1}{2}\varkappa \tag{3.11}$$

Это вытекает из равенства (3.8) и из того, что для любой функции F выполняется равенство $N-P=0$.

Теорему существования решений однородной задачи Римана-Гильберта теперь можно сформулировать и так: если индекс однородной задачи Римана-Гильберта равен $\varkappa$, то всегда может быть построена комплексная функция, являющаяся решением этой задачи, если только число ее нулей и бесконечностей удовлетворяет условию (3.11).

Если это условие соблюдено, то точки, в которых имеют место нули и бесконечности, а также их порядки могут задаваться произвольно.

При такой несколько более общей формулировке условно можно говорить и об отрицательном числе решений однородной задачи Римана-Гильберта. Это будет обозначать, что решения могут быть построены только в том случае, если искомая функция может иметь полюсы и число их будет превышать число нулей.

Если по условию задачи искомая функция не только не может иметь полюсов, но должна иметь нули в заданных точках, то число решений соответственно уменьшается (уменьшается число точек, в которых нули можно размещать по своему произволу).

Если по условию задачи в некоторых точках искомая функция может иметь полюсы, то число решений однородной задачи Римана-Гильберта соответственно увеличивается.

§ 4. Число решений статической и геометрической задачи. Подсчитаем число решений однородной статической задачи, т. е. задачи о разыскании комплексной функции напряжения для незагруженной оболочки. В данном случае индекс задачи Римана-Гильберта будет

$$\varkappa = \frac{\delta\gamma_l}{\pi}$$

Функция напряжений в точках разрыва граничных условий, вообще говоря, обращается в бесконечность, так как в любой из этих точек может возникнуть концентрация напряжений. Поэтому можно принять, что оценка (3.1) отвечает физической сущности рассматриваемого явления. Надо принять, кроме того, во внимание, что в точках $\zeta = 0$ и $\zeta = \infty$ функция $\psi(\zeta)$ должна иметь нуль второго порядка, так что каждая из этих точек, попадая в область S, уменьшает число решений статической задачи на четыре единицы. Элементарный подсчет по формулам (2.5)—(2.7) показывает, что при любом расположении края относительно полюсов географической системы координат R — число решений статической задачи — определяется формулой

$$R = -\frac{\delta\theta}{\pi} - 3 \tag{4.1}$$

Рассмотрим однородную геометрическую задачу, т. е. задачу об определении бесконечно малых изгибаний срединной поверхности.

В данном случае индекс задачи Римана-Гильберта будет

$$\varkappa = \frac{\delta\gamma_m}{\pi}$$

Функция перемещений $g(\zeta)$ в точках разрыва непрерывности граничных условий должна обращаться в нуль, так как ни в одной из таких точек тангенциальные смещения не возможны. Мы должны поэтому в каждой из точек $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$ поместить нули первого порядка функции $g(\zeta)$, что соответствует переходу от оценки (3.1) к оценке[1]

$$|g(\zeta)| = \Psi(\zeta)\,|\zeta - \varkappa_j|^{\beta} \qquad (0 < \beta < 1)$$

Это повлечет уменьшение числа решений геометрической задачи на k единиц. Вместе с тем в точках $\zeta = 0$ и $\zeta = \infty$ функция $g(\zeta)$ может иметь полюсы первого порядка, так что каждая из этих точек, попадая в область S, увеличивает число решений на две единицы. Учитывая все это, мы получим для Q — числа решений геометрической задачи формулу

$$Q = \frac{\delta\theta}{\pi} + 3 \tag{4.2}$$

пригодную для любого расположения края оболочки относительно полюсов географической системы координат.

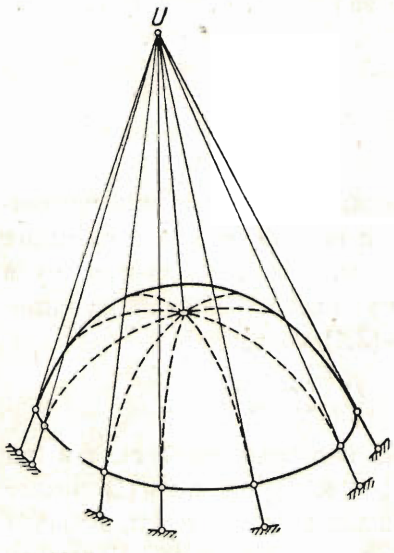
[1] Пользуясь терминами Н. И. Мусхелишвили, можно сказать, что $g(\zeta)$ является решением задачи Римана-Гильберта класса $h(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k)$.

§ 5. Физическая интерпретация. Аналогия между безмоментной оболочкой и стержневой системой. Рассмотрим три основных случая.

1 случай. $\delta\theta > -3\pi$, т. е. стерженек, с помощью которого мы изображаем граничное условие, при однократном обходе края оболочки делает меньше чем полтора полных поворота в отрицательном направлении, т. е. по часовой стрелке, если смотреть со стороны внешней нормали.

Тогда число решений однородной статической задачи отрицательно. Вместе с тем число решений однородной геометрической задачи положительно. Это значит, что связи, наложенные на край оболочки, не препятствуют некоторым изгибаниям срединной поверхности. Такая безмоментная оболочка не может, конечно, нести произвольную нагрузку. Последняя должна быть такой, чтобы она не совершала работы ни на одном из возможных изгибаний срединной поверхности. Математически это выражается в том, что в граничном условии (2.1) свободный член должен удовлетворять R-интегральным условиям, физический смысл которых теперь оказывается ясным. При выполнении этих условий решение (единственное) соответствующей задачи Римана-Гильберта становится возможным. В данном случае мы имеем дело с конструкцией, аналогичной геометрически изменяемой ферме.

Пример 1. Оболочка в виде эллиптического купола с одним плоским срезом. Предполагается, что опора исключает нормальные к краю смещения и не воспринимает касательных реакций. Схема [закрепления показана на фиг. 4 при помощи стерженьков.



Фиг. 4

В данном случае

$$\theta = \text{const} = \frac{1}{2}\pi$$

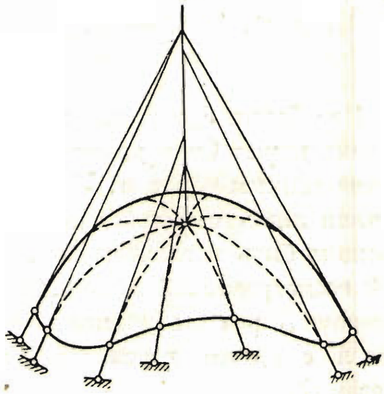
Отсюда

$$\delta\theta = 0, \qquad R = -3$$

Безмоментная оболочка трижды геометрически изменяема. Нетрудно понять и причины этого явления. Все стерженьки пересекаются в точке U, так что срединная поверхность оболочки может вращаться около точки U как жесткое целое (тривиальные изгибания). Ее расчет возможен только в том случае, если внешние силы не дают моментов относительно точки U (три условия).

Оболочка с такими же закреплениями, но не с плоским краем, показанная на фиг. 5, также трижды геометрически изменяема, но бесконечно малые изгибания уже не являются тривиальными, т. е. они будут отличны от смещений как жесткого целого, так как стерженьки не пересекаются в одной точке, не лежат в одной плоскости и не параллельны одному направлению. Три условия, которые надо наложить на внешние силы, можно получить, либо найдя изгибания срединной поверхности, либо используя соотношения, приведенные Н. И. Мусхелишвили [5].

Пример 2. Купол с двумя произвольными срезами. Предполагается, что он оперт по вертикальному краю на стенку, жесткую лишь в своей плоскости, а на горизонтальном срезе осуществляется то же закрепление, как и в примере 1 (фиг. 6).



Фиг. 5

Граничные условия здесь дважды терпят разрыв в углах оболочки. Угол θ при этом каждый раз получает приращение, равное $\frac{1}{2}\pi$. Согласно принятому выше условию эти скачки всегда отрицательны, так что [1]

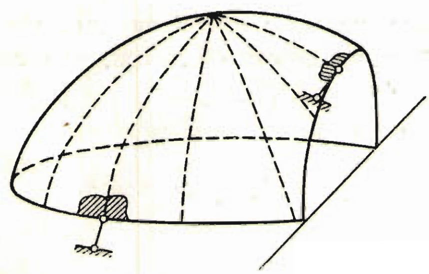
$$\delta\theta = -\pi$$

Отсюда

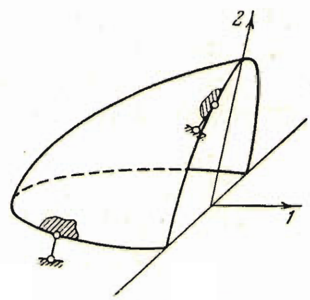
$$R = -2, \qquad Q = +2$$

Двухсрезный купол также геометрически изменяем, но уже дважды, а не трижды.

В частном случае, когда срезы лежат в экваториальных плоскостях, соответствующие изгибания становятся тривиальными. Это будут смещения в направлении оси *1* и вращение вокруг оси *2*, показанных на



Фиг. 6



Фиг. 7

фиг. 7. В. З. Власов в своей монографии [6] дает пример расчета купола, изображенного на фиг. 7. Расчет оказался возможным потому, что принятая В. З. Власовым нагрузка (собственный вес) не работает на упомянутых перемещениях.

2 *случай*. $\delta\theta = -3\pi$. Стерженек, с помощью которого мы изображаем граничное условие, делает полтора полных положительных оборота, когда край оболочки однократно обходится в положительном направлении.

Тогда $R = 0$, $Q = 0$. Расчет оболочки становится возможным при любом нагружении, причем статическая задача имеет лишь одно решение.

---

[1] Строго говоря, результатами § 3 в этом случае пользоваться нельзя, так как L — негладкий контур, но эти затруднения легко обойти, полагая, что в действительной конструкции угол округлен.

В этом случае определение усилий может быть выполнено до конца без введения в рассмотрение геометрических явлений. Мы имеем дело, следовательно, с конструкцией, которую можно назвать статически определимой и геометрически неизменяемой. Пример такой оболочки дает купол с тремя вертикальными и одним горизонтальным срезами, закрепленными так же, как в примере 2.

3 *случай*. $\delta\theta < -3\pi$. Здесь имеем

$$R > 0, \qquad Q < 0$$

Изгибания срединной поверхности невозможны. Любая внешняя нагрузка может быть уравновешена безмоментными усилиями и притом не единственным образом. Уравнения статики дают возможность определить усилия лишь с точностью до R действительных констант. Последние должны быть назначены так, чтобы стало возможно решение неоднородной геометрической задачи. В данном случае конструкция может быть названа R раз статически неопределимой. Пример такой оболочки дает купол с одним горизонтальным и более чем с тремя вертикальными срезами.

§ 6. Пример построения комплексных функций напряжения и перемещения. Пусть срединная поверхность оболочки представляет собой сферу радиуса r

$$x = r\frac{\cos\beta}{\operatorname{ch}\alpha}, \qquad y = r\frac{\sin\beta}{\operatorname{ch}\alpha}, \qquad z = -r\operatorname{th}\alpha$$

срезанную по экватору $\alpha = 0$.

Тогда, если считать, что полюс географической системы координат $\alpha = -\infty$ принадлежит срединной поверхности оболочки, то область S, в которой должны быть определены $\psi(\zeta)$ и $g(\zeta)$, будет

$$|\zeta| < 1$$

На контуре L, т. е. на окружности $|\zeta| = 1$, будем иметь

$$\zeta = e^{i\beta}$$

Точки на окружности L можно определять значениями параметра $\beta\,(0 \leqslant \beta \leqslant 2\pi)$. Воспользовавшись этим, разобьем контур L на четыре участка

$$0 < \beta < \tfrac{1}{2}\pi \qquad \text{I участок}$$
$$\tfrac{1}{2}\pi < \beta < \pi \qquad \text{II участок}$$
$$\pi < \beta < \tfrac{3}{2}\pi \qquad \text{III участок}$$
$$\tfrac{3}{2}\pi < \beta < 2\pi \qquad \text{IV участок}$$

и будем считать, что на участках I и III должны быть выполнены граничные условия

$$T_1 = 0, \qquad v = 0$$

а на участках II и IV — граничные условия

$$S = 0, \qquad u = 0$$

Мы видим, таким образом, что граничные условия кусочно непрерывны и точками их разрыва будут

$$\zeta = \zeta_1 = 1, \quad \zeta = \zeta_2 = i, \quad \zeta = \zeta_3 = -1, \quad \zeta = \zeta_4 = -i$$

Положим, кроме того, что оболочка не загружена поверхностной нагрузкой и что в точке $\zeta = \zeta_0$ на нее действуют произвольная сосредоточенная сила и момент.

Так как географическая система координат на поверхности сферы образует ортогональную сетку, то по формулам § 2 граничные условия для $\psi(\zeta)$ и $g(\zeta)$ будут выглядеть так:

$$\begin{matrix} \operatorname{Re}\{\psi\} = t = 0 \\ \operatorname{Im}\{g\} = q = 0 \end{matrix} \quad \left(\begin{matrix}\text{на участках} \\ \text{I и III}\end{matrix}\right), \quad \begin{matrix} \operatorname{Im}\{\psi\} = s = 0 \\ \operatorname{Re}\{g\} = p = 0 \end{matrix} \quad \left(\begin{matrix}\text{на участках} \\ \text{II и IV}\end{matrix}\right) \quad \begin{matrix}(6.1) \\ (6.2)\end{matrix}$$

Следовательно, угол θ имееет постоянное значение на каждом участке контура, а при переходе от участка к участку испытывает скачки, равные $-\frac{1}{2}\pi$. Отсюда

$$\delta\theta = -2, \quad R = 1, \quad Q = 1$$

Рассматриваемая оболочка однократно геометрически изменяема, и мы начнем с определения ее перемещений. Строим для задачи Римана-Гильберта (6.2) каноническую функцию. Она будет (Н. И. Мусхелишвили [5], § 94, стр. 283) иметь вид

$$X(\zeta) = \frac{c}{\sqrt{\zeta^4 - 1}} e^{1/4 i\pi}$$

где c — действительная константа (в рассматриваемой задаче конформное отображение производить не нужно и поэтому в формулах § 3 следует считать $z = \zeta$).

Составляем решение задачи Римана-Гильберта вида (3.5), считая $c_0 = c_\varkappa = 1$. Имеем

$$\Phi(\zeta) = \frac{c}{\sqrt{\zeta^4 - 1}} e^{1/4 i\pi}(\zeta^2 + 1) \tag{6.3}$$

В двух из четырех точек разрыва граничных условий, а именно в точках $\zeta = \zeta_2 = i$ и $\zeta = \zeta_4 = -i$, это решение удовлетворяет требуемой оценке, а именно

$$|\Phi(\zeta)| = \Psi(\zeta)|\zeta - \zeta_j|^\alpha \qquad (0 < \alpha < 1)$$

В двух других точках ($\zeta = \zeta_2$ и $\zeta = \zeta_4$) имеет место оценка (3.1). Следовательно, в решение (6.3) надо ввести множитель вида ΠF, подобрав его так, чтобы при $\zeta = \zeta_2 = 1$ и $\zeta = \zeta_4 = -1$ он имел нули первого порядка. Вместе с тем мы можем допустить, чтобы ΠF имело полюс первого порядка в точке $\zeta = 0$. Исходя из этого, берем

$$\Pi F = F\left(\zeta, 1, 0; \tfrac{1}{2}\right) F\left(\zeta, -1, 0; \tfrac{1}{2}\right) = \frac{\zeta^2 - 1}{i\zeta}$$

Отсюда получается единственное (с точностью до множителя c) решение для комплексной функции перемещений

$$g(\zeta) = ce^{-{}^1/_4 i\pi} \frac{\sqrt{\zeta^4 - 1}}{\zeta}$$

По формулам § 2, положив в них

$$A = \frac{r}{\operatorname{ch} \alpha}, \quad B = \frac{r}{\operatorname{ch} \alpha}, \quad \mu = \operatorname{ch}^2 \alpha, \quad \chi = \frac{\pi}{2}$$

можно подсчитать перемещения, соответствующие этому (конечно не тривиальному) изгибанию.

Обратимся к построению комплексной функции напряжения. Решаем задачу Римана-Гильберта (6.1). Каноническая функция для нее, очевидно, будет

$$X(\zeta) = c \frac{i}{\sqrt{\zeta^4 - 1}} e^{{}^1/_4 i\pi}$$

Следовательно, вместо решения (6.3) можно взять

$$\Phi(\zeta) = c \frac{i}{\sqrt{\zeta^4 - 1}} e^{{}^1/_4 i\pi} (\zeta^2 + 1) \tag{6.4}$$

В это решение, чтобы получить из него комплексную функцию напряжения, надо ввести множитель вида ΠF, который должен отвечать следующим требованиям:

а) при $\zeta = +i$ и $\zeta = -i$ он может иметь полюсы первого порядка, так как $\psi(\zeta)$ может во всех точках разрыва граничных условий иметь оценку (3.1);

б) при $\zeta = \zeta_0$ он должен иметь полюс третьего порядка с заданной главной частью ряда Лорана (полюс третьего порядка соответствует действию на оболочку сосредоточенного фактора, не более сложной структуры, нежели сила и момент);

в) при $\zeta = 0$ он должен иметь нуль второго порядка.

Подбираем этот множитель

$$\Pi F = F\left(\zeta, i, 0; -\tfrac{1}{2}\right) F\left(\zeta, -i, 0; -\tfrac{1}{2}\right) F(\zeta, \rho_1, \zeta_0; 1)\, F(\zeta, \rho_2, \zeta_0; 1) \times$$
$$\times F(\zeta, \rho_3, \zeta_0; +1)\, F(\zeta, \rho_1, 0; -1)\, F(\zeta, \rho_2, \mu_1; -1)\, F(\zeta, \rho_3, \mu_2; -1)$$

или, если произвести подсчет,

$$\Pi F = -\frac{i\zeta^2 (\zeta - \mu_1)(\overline{\mu}_1 \zeta - 1)(\zeta - \mu_2)(\overline{\mu}_2 \zeta - 1)}{(\zeta - \zeta_0)^3 (\overline{\zeta}_0 \zeta - 1)^3 (\zeta^2 + 1)}$$

Таким образом, комплексная функция напряжения будет

$$\psi(\zeta) = ce^{{}^1/_4 i\pi} \frac{\zeta^2 (\zeta - \mu_1)(\overline{\mu}_1 \zeta - 1)(\zeta - \mu_2)(\overline{\mu}_2 \zeta - 1)}{(\zeta - \zeta_0)^3 (\overline{\zeta}_0 \zeta - 1)^3 \sqrt{\zeta^4 - 1}}$$

Она зависит от двух комплексных констант μ_1, μ_2 и одной действительной константы c. Ими надо распорядиться так, чтобы вблизи $\zeta = \zeta_0$ главная часть ряда Лорана для функций $\psi(\zeta)$ имела заданные коэффициенты.

Как и следовало ожидать, в общем случае этого сделать нельзя, так как нехватает одной степени произвола. Так и должно быть, потому что оболочка геометрически изменяема и, следовательно, может нести только такую сосредоточенную нагрузку, которая не работает на найденных выше перемещениях.

Для того чтобы определить (когда это возможно) μ_1, μ_2 и c по заданным компонентам внешней сосредоточенной нагрузки, надо воспользоваться формулами, данными в статье [4].

Для сферической оболочки они могут быть переписаны так

$$\begin{aligned} \frac{R_x}{r} + i\,\frac{Q_x}{r^2} &= \frac{i}{2}\int \psi(\zeta)\,\frac{\zeta^2-1}{\zeta^2}\,d\zeta \\ \frac{R_y}{r} + i\,\frac{Q_y}{r^2} &= \frac{1}{2}\int \psi(\zeta)\,\frac{\zeta^2+1}{\zeta^2}\,d\zeta \\ \frac{R_z}{r} + i\,\frac{Q_z}{r^2} &= i\int \psi(\zeta)\,\frac{d\zeta}{\zeta} \end{aligned} \tag{6.5}$$

где R_x, R_y, R_z — проекции вектора сосредоточенной силы, Q_x, Q_y, Q_z — проекции вектора внешнего момента (кроме сосредоточенного момента учитывается также и момент сосредоточенной силы относительно начала координат).

Выписанные интегралы должны браться по замкнутому контуру, т. е. в конечном итоге вычисление правых частей сводится к нахождению вычетов. Эта операция принципиально проста, но громоздка, и мы выполним ее в упрощающем предположении, что $\zeta_0 = 0$. Тогда

$$\psi(\zeta) = -c e^{1/4\, i\pi}\,\frac{(\zeta-\mu_1)(\overline{\mu}_1\zeta-1)(\zeta-\mu_2)(\overline{\mu}_2\zeta-1)}{\zeta\sqrt{\zeta^4-1}}$$

или

$$\psi(\zeta) = -e^{1/4\, i\pi}\,\frac{a_1\zeta^4 + a_2\zeta^3 + a_3\zeta^2 + \overline{a}_2\zeta + \overline{a}_1}{\zeta\sqrt{\zeta^4-1}} \tag{6.6}$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= c\overline{\mu}_1\overline{\mu}_2 \\ a_2 &= -c\left[\mu_1(1+\mu_2\overline{\mu}_2) + \mu_2(1+\overline{\mu}_1\mu_1)\right] \\ a_3 &= c\left[\mu_1\overline{\mu}_2 + \overline{\mu}_1\mu_2 + (1+\mu_1\overline{\mu}_1)(1+\mu_2\overline{\mu}_2)\right] \end{aligned} \tag{6.7}$$

Для дальнейшего вычисления удобно пользоваться формулой (6.6), считая, что определению подлежат константы a_1, a_2, a_3, но надо помнить, что комплексными при этом будут только a_1 и a_2, так как из (6.7) вытекает, что a_3 — величина действительная.

Вычеты от функции (6.6) вычисляются без труда. Получим

$$\begin{aligned} \frac{R_x}{r} + i\,\frac{Q_x}{r^2} &= \pi i e^{1/4\, i\pi}\,(a_3 - \overline{a}_1) \\ \frac{R_y}{r} + i\,\frac{Q_y}{r^2} &= -\pi e^{1/4\, i\pi}\,(a_3 + \overline{a}_1) \\ \frac{R_z}{r^2} + i\,\frac{Q_z}{r^2} &= -2\pi i e^{1/4\, i\pi}\,\overline{a}_2 \end{aligned}$$

Отсюда

$$a_1 = -\frac{1}{2\pi} e^{1/4\, i\pi} \left[\frac{R_y}{r} + \frac{Q_x}{r^2} + i \left(\frac{R_x}{r} - \frac{Q_y}{r^2} \right) \right]$$

$$a_2 = \frac{1}{2\pi i} e^{1/4\, i\pi} \left[\frac{R_z}{r} - i \frac{Q_z}{r^2} \right]$$

$$a_3 = \frac{1}{2\pi} e^{-1/4\, i\pi} \left[-\frac{R_y}{r} + \frac{Q_x}{r^2} - i \left(\frac{R_x}{r} + \frac{Q_y}{r^2} \right) \right]$$

Требуя, чтобы $\operatorname{Im}\{a_3\} = 0$, придем к равенству

$$\left(R_x + \frac{Q_y}{r}\right) + \left(R_y - \frac{Q_x}{r}\right) = 0$$

т. е. к условию, которому должна удовлетворять нагрузка, чтобы рассматриваемая оболочка могла быть рассчитана.

Мы остановились в § 3—4 лишь на вопросе существования решений. Фактическое построение их не вызывает принципиальных затруднений, как видно из разобранного примера. В неоднократно цитированной книге Н. И. Мусхелишвили приводятся эффективные методы решения всех затронутых в настоящей статье задач.

Когда статья была уже набрана, Н. И. Мусхелишвили высказал ряд ценных замечаний, за которые автор его благодарит. Насколько это было возможно, статья соответствующим образом исправлена.

Поступила 28 XII 1950

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А. Л., Мрощинский А. К., Репман Ю. В. Методы расчета сферических куполов по безмоментной теории. Пластинки и оболочки. 1939.
2. Власов В. З. Расчет оболочек вращения на несимметричную нагрузку. Проект и стандарт. 1937. № 3,4.
3. Власов В. З. Расчет оболочек, очерченных по поверхностям второго порядка. Пластинки и оболочки. Госстройиздат. 1939.
4. Гольденвейзер А. Л. Безмоментная теория оболочек, очерченных по поверхностям второго порядка. ПММ. 1947. Т. XI. Вып. 2.
5. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Гостехиздат. 1946.
6. Власов. В. З. Общая теория оболочек. Гостехиздат. 1949.