

ЗАДАЧА О РАВНОВЕСИИ УПРУГОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА ПРИ ЗАДАННЫХ НАГРУЗКАХ НА ЕГО ГРЯНЯХ¹

М. М. Филоненко-Бородич

(Москва)

Задача эта была поставлена Ламе в 1852 г. в его курсе лекций по теории упругости^[1]. Он указал на важность этой задачи для практических приложений и вместе с тем отметил особую ее трудность. Повидимому, под влиянием Ламе французская Академия наук в 1846 и в 1858 гг. объявляла премию за решение задачи о равновесии прямоугольной призмы, однако задача эта до сего времени не получила полного решения; Матье в 1881 г. указал метод решения соответствующей плоской задачи и далее в своем *Курсе теории упругости*, изданном в 1890 г., дал более общее и полное решение ее^[2]. В последующей литературе имеется лишь весьма ограниченное количество работ, посвященных приближенному решению некоторых частных случаев задачи Ламе. Автору известны следующие работы.

1. Численное решение С. П. Тимошенко плоской задачи сжатия параллелепипеда между двумя жесткими плитами с полным трением по поверхностям контакта^[3].

2. Численный метод Ричардсона, упомянутой там же С. П. Тимошенко.

3. Работа К. Хагера о равномерном сжатии прямоугольной призмы^[4].

4. Задача о сжатии параллелепипеда между жесткими плитами при неполном трении, приближенное решение которой дано Л. Фешлем^[5].

Возможности решения задачи о параллелепипеде значительно возросли в связи с разработкой вариационных принципов теории упругости и основанных на них приближенных способов решения задач теории упругости. Наиболее общая форма приложения этих вариационных принципов к фактическому решению задач дана П. Ф. Папковичем^[6].

§ 1. Метод решения задачи. Будем пользоваться вариационным методом Кастильяно; для применения этого метода требуется задание напряженного состояния, которое:

- 1) удовлетворяет всюду в области тела уравнениям равновесия;
- 2) удовлетворяет граничным условиям;
- 3) содержит линейно достаточное число свободных параметров, позволяющих варьировать напряженное состояние при соблюдении условий, указанных в обоих предыдущих пунктах.

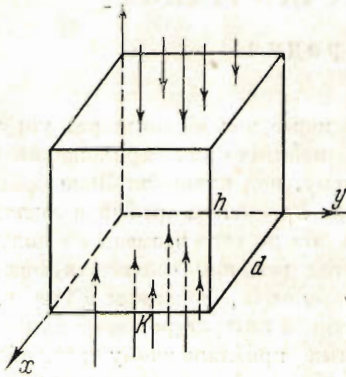
Согласно П. Ф. Папковичу соответствующий тензор напряжений задается в виде суммы двух тензоров:

$$\begin{aligned} X_x &= X_x^{(0)} + \sum A_i X_x^{(i)}, & X_y &= X_y^{(0)} + \sum A_i X_y^{(i)} \\ Y_y &= Y_y^{(0)} + \sum A_i Y_y^{(i)}, & Y_z &= Y_z^{(0)} + \sum A_i Y_z^{(i)} \\ Z_z &= Z_z^{(0)} + \sum A_i Z_z^{(i)}, & Z_x &= Z_x^{(0)} + \sum A_i Z_x^{(i)} \end{aligned} \quad (1.1)$$

¹ О работе сделано сообщение на Всесоюзной конференции по теории упругости, строительной механике и теории пластичности 7—10 декабря 1950 г.

Первый тензор, компоненты которого отмечены индексом (0), должен удовлетворять первым двум вышеуказанным условиям; будем для краткости называть его основным тензором. Второй тензор, отмеченный индексом (i) ($i = 1, 2, 3, \dots$), назовем корректирующим; компоненты всех членов его должны удовлетворять дифференциальным уравнениям равновесия, а во всех точках поверхности тела давать отсутствие нагрузки.

В дальнейшем рассматриваются задачи о параллелепипеде (фиг. 1),



Фиг. 1

нагруженном взаимно уравновешенными нагрузками на двух противоположных гранях $z = 0$ и $z = h$. Четыре боковые грани $x = 0$, $x = d$, $y = 0$, $y = k$ предполагаем свободными от нагрузок.

Для построения основного и корректирующего тензоров воспользуемся функциями напряжений Максвелла $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$. Имеем

$$\begin{aligned} X_x &= \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2}, & Y_z &= -\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y \partial z} \\ Y_y &= \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x^2}, & Z_x &= -\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z \partial x} \\ Z_z &= \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2}, & X_y &= -\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (1.2)$$

при этом соблюдение условий равновесия обеспечено. Формулы эти дают общее решение системы дифференциальных уравнений равновесия.

Основной тензор придется выбирать особо для каждой отдельной категории задач в зависимости от характера заданных нагрузок. Корректирующий тензор для параллелепипеда можно построить один раз навсегда с помощью функций вида

$$\begin{aligned} P_m(x) &= \cos \frac{m\pi x}{d} - \cos \frac{(m+2)\pi x}{d} & (m = 0, 1, 2, \dots) \\ P_n(y) &= \cos \frac{n\pi y}{k} - \cos \frac{(n+2)\pi y}{k} & (n = 0, 1, 2, \dots) \\ P_p(z) &= \cos \frac{p\pi z}{h} - \cos \frac{(p+2)\pi z}{h} & (p = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (1.3)$$

рассмотренных в работе [7]. Условимся для краткости называть эти функции косинус-биномами.

Для задачи о параллелепипеде важны следующие два свойства функций (1.3).

1. Функции эти вместе со своими производными обращаются в нуль на концах соответствующих интервалов $(0, d)$, $(0, k)$ и $(0, h)$:

$$\begin{aligned} P_m(0) &= 0, & P_n(0) &= 0, & P_p(0) &= 0 \\ P_m'(0) &= 0, & P_n'(0) &= 0, & P_p'(0) &= 0 \\ P_m(d) &= 0, & P_n(k) &= 0, & P_p(h) &= 0 \\ P_m'(d) &= 0, & P_n'(k) &= 0, & P_p'(h) &= 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

2. Системы функций (1.3) являются полными и замкнутыми на соответствующих интервалах $(0, d)$, $(0, k)$ и $(0, h)$.

Построим функции напряжений $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ следующим образом:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \sum_m \sum_n \sum_p A_{mnp} P_m(x) P_n(y) P_p(z) \\ \varphi_2 &= \sum_m \sum_n \sum_p B_{mnp} P_m(x) P_n(y) P_p(z) \\ \varphi_3 &= \sum_m \sum_n \sum_p C_{mnp} P_m(x) P_n(y) P_p(z)\end{aligned}\quad (1.5)$$

где $A_{mnp}, B_{mnp}, C_{mnp}$ — произвольные постоянные.

Тензор напряжений (1.2) представится так (для краткости письма аргументы x, y, z в обозначениях функций P опускаем):

$$\begin{aligned}X_x &= \sum_m \sum_n \sum_p (C_{mnp} P_m P_n'' P_p + B_{mnp} P_m P_n P_p'') \\ Y_y &= \sum_m \sum_n \sum_p (A_{mnp} P_m P_n P_p'' + C_{mnp} P_m'' P_n P_p) \\ Z_z &= \sum_m \sum_n \sum_p (B_{mnp} P_m'' P_n P_p + A_{mnp} P_m P_n'' P_p) \\ X_y &= - \sum_m \sum_n \sum_p C_{mnp} P_m' P_n' P_p \\ Y_z &= - \sum_m \sum_n \sum_p A_{mnp} P_m P_n' P_p' \\ Z_x &= - \sum_m \sum_n \sum_p B_{mnp} P_m' P_n P_p'\end{aligned}\quad (1.6)$$

В силу граничных свойств (1.4) косинус-биномов это напряженное состояние таково, что все шесть граней параллелепипеда свободны от нагрузок; таким образом, мы получили корректирующий тензор. Он даст весьма широкий класс самонапряженных состояний параллелепипеда, так как, с одной стороны, формулы (1.2) дают общее решение системы уравнений равновесия, а, с другой — системы функций P_m, P_n и P_p являются, как сказано выше, полными и замкнутыми на соответственных отрезках.

Число произвольных коэффициентов в формулах (1.6) в три раза превосходит число постоянных A_i в формулах (1.1) П. Ф. Папковича, и в этом смысле они являются более общими. Однако в практических расчетах увеличение числа коэффициентов приводит к большой громоздкости выкладок; тогда, следуя П. Ф. Папковичу, можно положить

$$A_{mnp} = B_{mnp} = C_{mnp}$$

и за этот счет взять большее число членов в суммах (1.5), увеличивая порядок вводимых биномов (1.3).

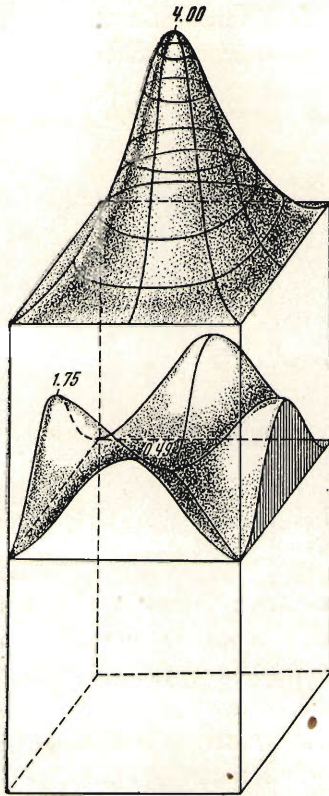
§ 2. Задача о сжатии параллелепипеда двумя равными и противоположными нагрузками. Рассмотрим параллелепипед, к которому по граням $z = 0$ и $z = h$ приложены равные и противоположные нормальные нагрузки, распределенные по закону

$$q = F(x, y) \quad (2.1)$$

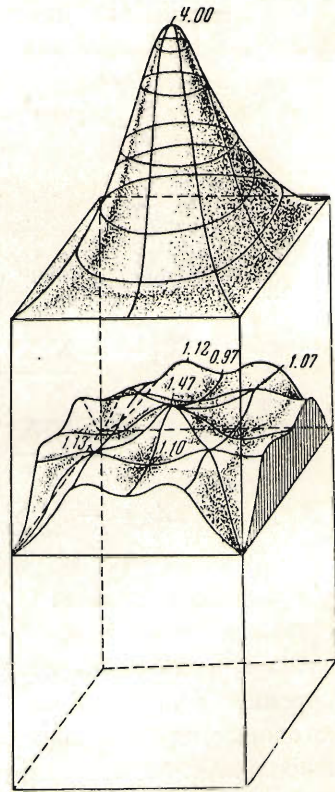
Тогда основной тензор может быть построен весьма просто: достаточно положить

$$Z_z = F(x, y) \quad (2.2)$$

а остальные компоненты приравнять нулю; уравнения равновесия при этом тождественно удовлетворены.



Фиг. 2



Фиг. 3

Общий тензор получим, складывая основной тензор с корректирующим тензором (1.6); все компоненты его совпадут с (1.6) за исключением Z_z , для которого получим

$$Z_z = \sum_m \sum_n \sum_p (B_{mnp} P_m'' P_n P_p + A_{mnp} P_m P_n'' P_p) + F(x, y) \quad (2.3)$$

Общий тензор будет удовлетворять дифференциальным уравнениям равновесия и всем граничным условиям задачи при отсутствии объемных

сил; вместе с тем в зависимости от числа взятых членов в суммах (1.5) он содержит желаемое число свободных параметров A_{mnp} , B_{mnp} , C_{mnp} .

Согласно методу Кастильяно эти параметры определяются из условия минимума упругой энергии

$$\frac{\partial W}{\partial A_{mnp}} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial B_{mnp}} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial C_{mnp}} = 0 \quad \left(\begin{array}{l} m=0, 1, 2, \dots \\ n=0, 1, 2, \dots \\ p=0, 1, 2, \dots \end{array} \right) \quad (2.4)$$

где

$$W = \frac{1}{2E} \iiint [X_x^2 + Y_y^2 + Z_z^2 - 2\sigma(X_x Y_y + Y_y Z_z + Z_z X_x) + 2(1 + \sigma)(Y_z^2 + Z_x^2 + X_y^2)] dx dy dz \quad (2.5)$$

Здесь E — модуль продольной упругости, σ — коэффициент Пуассона; интеграл взят по всему объему параллелепипеда.

Для получения линейных уравнений (2.4), конечно, нет надобности заранее составлять выражение энергии (2.5) как функцию параметров A_{mnp} , B_{mnp} , C_{mnp} , так как, непосредственно дифференцируя его, например по A_{mnp} , получим первое из уравнений (2.4):

$$\begin{aligned} \iiint \left[X_x \frac{\partial X_x}{\partial A_{mnp}} + Y_y \frac{\partial Y_y}{\partial A_{mnp}} + Z_z \frac{\partial Z_z}{\partial A_{mnp}} - 2\sigma \left(Y_y \frac{\partial X_x}{\partial A_{mnp}} + X_x \frac{\partial Y_y}{\partial A_{mnp}} + \right. \right. \\ \left. \left. + Z_z \frac{\partial Y_y}{\partial A_{mnp}} + Y_y \frac{\partial Z_z}{\partial A_{mnp}} + Z_x \frac{\partial X_x}{\partial A_{mnp}} + X_x \frac{\partial Z_z}{\partial A_{mnp}} \right) + \right. \\ \left. + 2(1 + \sigma) \left(X_y \frac{\partial X_y}{\partial A_{mnp}} + Y_z \frac{\partial Y_z}{\partial A_{mnp}} + Z_x \frac{\partial Z_x}{\partial A_{mnp}} \right) \right] dx dy dz = 0 \quad (2.6) \end{aligned}$$

Здесь на основании (1.6)

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_x}{\partial A_{mnp}} = 0, \quad \frac{\partial Y_y}{\partial A_{mnp}} = P_m P_n P_p'', \quad \frac{\partial Z_z}{\partial A_{mnp}} = P_m P_n'' P_p \\ \frac{\partial Y_z}{\partial A_{mnp}} = -P_m P_n' P_p', \quad \frac{\partial Z_x}{\partial A_{mnp}} = 0, \quad \frac{\partial X_y}{\partial A_{mnp}} = 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Общность решения Максвелла (1.2) и полнота систем функций (1.3) позволяют рассчитывать, что при достаточном числе членов сумм (1.5) мы получим решение задачи, сколь угодно близкое к точному; однако полного доказательства этого пока не имеется.

Пример. Рассмотрим (фиг. 2) случай нагрузки, распределенной на верхней и нижней гранях¹, по закону

$$q = F(x, y) = \frac{P}{dk} P_0(x) P_0(y) = \frac{P}{dk} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{d} \right) \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{k} \right) \quad (2.8)$$

Поверхность нагрузки (фиг. 2 и 3) имеет колоколообразную форму, симметричную относительно главных центральных плоскостей параллеле-

¹ Нагрузка по нижней грани на фиг. 2 не показана.

типеда $x = \frac{1}{2}d$, $y = \frac{1}{2}k$, вследствие этого корректирующие функции напряжений (1.5) будут содержать только функции P , четных номеров:

$$\begin{aligned} P_{2m} &= \cos \frac{2m\pi x}{d} - \cos \frac{2(m+1)\pi x}{d} \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \\ P_{2n} &= \cos \frac{2n\pi y}{k} - \cos \frac{2(n+1)\pi y}{k} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \\ P_{2p} &= \cos \frac{2p\pi z}{h} - \cos \frac{2(p+1)\pi z}{h} \quad (p = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (2.9)$$

а) *Первое приближение.* В этом случае функции (1.5) будут

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= A_0 \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{d}\right) \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{k}\right) \left(1 - \cos \frac{2\pi z}{h}\right) \\ \varphi_2 &= B_0 \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{d}\right) \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{k}\right) \left(1 - \cos \frac{2\pi z}{h}\right) \\ \varphi_3 &= C_0 \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{d}\right) \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{k}\right) \left(1 - \cos \frac{2\pi z}{h}\right) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Пользуясь (2.2), (2.3), (2.8) и (2.10), составим три уравнения типа (2.6) для определения трех параметров A_0 , B_0 , C_0 ; все компоненты общего тензора за исключением Z_2 совпадают с компонентами корректирующего тензора, образуемого при помощи функций (2.10), например:

$$\begin{aligned} X_x &= \frac{4\pi^2}{k^2} C_0 \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{d}\right) \cos \frac{2\pi y}{k} \left(1 - \cos \frac{2\pi z}{h}\right) + \\ &+ \frac{4\pi^2}{h^2} B_0 \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{d}\right) \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{k}\right) \cos \frac{2\pi z}{h} \\ X_y &= -\frac{4\pi^2}{dk} C_0 \sin \frac{2\pi x}{d} \sin \frac{2\pi y}{k} \left(1 - \cos \frac{2\pi z}{h}\right) \end{aligned}$$

Компонент Z_2 зависит также и от основного тензора (2.2), так что согласно (2.8):

$$\begin{aligned} Z_2 &= \frac{4\pi^2}{d^2} B_0 \cos \frac{2\pi x}{d} \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{k}\right) \left(1 - \cos \frac{2\pi z}{h}\right) + \\ &+ \frac{4\pi^2}{k^2} A_0 \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{d}\right) \cos \frac{2\pi y}{k} \left(1 - \cos \frac{2\pi z}{h}\right) + \\ &+ \frac{P}{dk} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{d}\right) \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{k}\right) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Для составления уравнений (2.6) вычисляем производные (2.7); имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_x}{\partial A_0} &= \frac{\partial X_y}{\partial A_0} = \frac{\partial X_z}{\partial A_0} = 0 \\ \frac{\partial Y_y}{\partial A_0} &= \frac{4\pi^2}{h^2} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{d}\right) \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{k}\right) \cos \frac{2\pi z}{h} \\ \frac{\partial Z_z}{\partial A_0} &= \frac{4\pi^2}{k^2} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{d}\right) \cos \frac{2\pi y}{k} \left(1 - \cos \frac{2\pi z}{h}\right) \\ \frac{\partial Y_z}{\partial A_0} &= -\frac{4\pi^2}{kh} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{d}\right) \sin \frac{2\pi y}{k} \sin \frac{2\pi z}{h} \quad \text{и т. д.} \end{aligned}$$

Уравнения (2.6) после выполнения интегрирования и упрощений получают вид¹:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{3}{h^4} + \frac{3}{k^4} + \frac{2}{k^2 h^2} \right) A_0 + \left(\frac{1}{d^2 k^2} - \frac{\sigma}{d^2 h^2} - \frac{\sigma}{k^2 h^2} - \frac{3\sigma}{h^4} \right) B_0 + \\ & \quad + \left(\frac{1}{d^2 h^2} - \frac{\sigma}{k^2 h^2} - \frac{\sigma}{d^2 k^2} - \frac{3\sigma}{k^4} \right) C_0 = \frac{1}{2\pi^2 k^2} \\ & \left(\frac{1}{d^2 k^2} - \frac{\sigma}{d^2 h^2} - \frac{\sigma}{k^2 h^2} - \frac{3\sigma}{h^4} \right) A_0 + \left(\frac{3}{h^4} + \frac{3}{d^4} + \frac{2}{d^2 h^2} \right) B_0 + \\ & \quad + \left(\frac{1}{k^2 h^2} - \frac{\sigma}{d^2 h^2} - \frac{\sigma}{d^2 k^2} - \frac{3\sigma}{d^4} \right) C_0 = \frac{1}{2\pi^2 d^2} \\ & \left(\frac{1}{d^2 h^2} - \frac{\sigma}{k^2 h^2} - \frac{\sigma}{d^2 k^2} - \frac{3\sigma}{k^4} \right) A_0 + \left(\frac{1}{k^2 h^2} - \frac{\sigma}{d^2 h^2} - \frac{\sigma}{d^2 k^2} - \frac{3\sigma}{d^4} \right) B_0 + \\ & \quad + \left(\frac{3}{k^4} + \frac{3}{d^4} + \frac{2}{d^2 k^2} \right) C_0 = -\frac{\sigma}{2\pi^2} \left(\frac{1}{d^2} + \frac{1}{k^2} \right) \end{aligned} \quad (2.12)$$

Выполним численный подсчет для случая $d = 1, k = 1, h = 2, P = 1$. Уравнения (2.12) получают вид:

$$\begin{aligned} 177A_0 + 37B_0 - 56C_0 &= 24\pi^{-2} \\ 37A_0 + 177B_0 - 56C_0 &= 24\pi^{-2} \\ 56A_0 - 56B_0 - 384C_0 &= 16\pi^{-2} \end{aligned}$$

Решая их, найдем

$$A_0 = B_0 = 0.10959\pi^{-2}, \quad C_0 = -0.009959\pi^{-2}$$

Имея эти значения коэффициентов, можно подсчитать компоненты тензора напряжений; приводим как наиболее интересное выражение для основного сжимающего напряжения Z_z в горизонтальном сечении параллелепипеда:

$$\begin{aligned} Z_z &= 0.10959 \times 4 [\cos 2\pi x (1 - \cos 2\pi y) (1 - \cos 2\pi z) + \\ & \quad + (1 - \cos 2\pi x) \cos 2\pi y (1 - \cos 2\pi z)] + (1 - \cos 2\pi x) (1 - \cos 2\pi y) \end{aligned}$$

Напряжение в среднем сечении получим, полагая здесь $z = 1$:

$$\begin{aligned} Z_z &= 0.87672 \cos 2\pi x (1 - \cos 2\pi y) + 0.87672 (1 - \cos 2\pi x) \cos 2\pi y + \\ & \quad + (1 - \cos 2\pi x) (1 - \cos 2\pi y) \end{aligned}$$

Согласно принципу Сен-Венана распределение напряжений в горизонтальных сечениях должно приближаться к равномерному по мере удаления сечения от нагруженных граней. Эпюра напряжений в сечении $z = 1$ показана на фиг. 2; из нее видно значительное выравнивание напряжений по сравнению с заданной нагрузкой; однако распределение напряжений далеко не равномерно, с одной стороны, потому, что расстояние среднего сечения составляет лишь $1 : 1.414 \approx 0.7$ от размера нагруженной грани, считая по диагонали, с другой стороны, задача решалась лишь в первом приближении.

Для получения второго приближения следует к (2.10) добавить функции, содержащие косинус-биномы:

$$\begin{aligned} P_2(x) &= \cos \frac{2\pi x}{d} - \cos \frac{4\pi x}{d} \\ P_2(y) &= \cos \frac{2\pi y}{k} - \cos \frac{4\pi y}{k} \\ P_2(z) &= \cos \frac{2\pi z}{h} - \cos \frac{4\pi z}{h} \end{aligned} \quad (2.13)$$

¹ Средняя интенсивность нагрузки $\frac{P}{dk}$ принята равной единице.

Таковы, например, функции

$$\begin{aligned} \varphi_4 &= A_2' P_2 P_0 P_0, & \varphi_7 &= A_2'' P_0 P_2 P_0, & \varphi_{10} &= A_2''' P_0 P_0 P_2 \\ \varphi_5 &= B_2' P_2 P_0 P_0, & \varphi_8 &= B_2'' P_0 P_2 P_0, & \varphi_{11} &= B_2''' P_0 P_0 P_2 \\ \varphi_6 &= C_2' P_2 P_0 P_0, & \varphi_9 &= C_2'' P_0 P_2 P_0, & \varphi_{12} &= C_2''' P_0 P_0 P_2 \end{aligned} \quad (2.14)$$

В этом случае мы вводим 12 коэффициентов. Для получения полного второго приближения следует добавить функции напряжений еще четырех типов:

$$P_0 P_2 P_2, \quad P_2 P_0 P_2, \quad P_2 P_2 P_0, \quad P_2 P_2 P_2$$

Они введут еще 12 коэффициентов и общее число их достигнет 24.

Столь быстрое возрастание числа параметров при переходе к более высокой степени приближения, как уже указывалось, влечет большую громоздкость выкладок; поэтому становится весьма существенным вопрос о рациональном отборе [минимального числа функций $P_m(x) P_n(y) P_p(z)$, позволяющих получить возможно лучшее приближение.

Вместе с тем число вводимых коэффициентов может быть в три раза уменьшено, если согласно П. Ф. Папковичу положить $A = B = C$, как уже было указано выше.

Приведем результаты неполного второго приближения с использованием функций напряжений (2.10) и (2.14). Наиболее громоздкой частью выкладок является составление двенадцати уравнений типа (2.4) и вычисление получающихся многочленных выражений коэффициентов при постоянных A_{mnp} , B_{mnp} и C_{mnp} ; опуская вычисления¹, приводим значения этих постоянных для разобранного выше случая $d = 1$, $k = 1$, $h = 2$, $P = 1$:

$$\begin{aligned} A_0 &= 0.1378, & B_0 &= 0.1378, & C_0 &= -0.0119 \\ A_2' &= 0.0337, & B_2' &= -0.0020, & C_2' &= 0.0014 \\ A_2'' &= -0.0020, & B_2'' &= 0.0337, & C_2'' &= 0.0014 \\ A_2''' &= 0.0352, & B_2''' &= 0.0352, & C_2''' &= -0.0209 \end{aligned}$$

Внося эти значения (с учетом изменения обозначений) в формулы (1.6), получим компоненты корректирующего тензора напряжений; для получения общего тензора к компоненту Z_z согласно (2.3) добавляем

$$F(x, y) = \frac{P}{dk} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{d} \right) \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{k} \right)$$

Выпишем выражение этого компонента для дальнейшего анализа его:

$$\begin{aligned} Z_z &= 4 [0.1378 \cos 2\pi x (1 - \cos 2\pi y) (1 - \cos 2\pi z) + \\ &+ 0.0352 \cos 2\pi x (1 - \cos 2\pi y) (\cos \pi z - \cos 2\pi z) + \\ &+ 0.0337 \cos 2\pi x (\cos 2\pi y - \cos 4\pi z) (1 - \cos \pi z) + \\ &+ 0.0020 (\cos 2\pi x - \cos 4\pi x) (1 - \cos 2\pi y) (1 - \cos \pi z) + \\ &+ 0.1378 (1 - \cos 2\pi x) \cos 2\pi y (1 - \cos \pi z) + \\ &+ 0.0352 (1 - \cos 2\pi x) \cos 2\pi y (\cos \pi z - \cos 2\pi z) + \\ &+ 0.0020 (1 - \cos 2\pi x) (\cos 2\pi y - \cos 4\pi y) (1 - \cos \pi z) + \\ &+ 0.0337 (\cos 2\pi x - \cos 4\pi x) \cos 2\pi y (1 - \cos \pi z) + \\ &+ (1 - \cos 2\pi x) (1 - \cos 2\pi y) \end{aligned}$$

¹ Все численное решение задачи в излагаемых здесь двух вариантах проделано Е. С. Кононенко.

Распределение этих напряжений в среднем сечении $z = 1$ выразится гораздо проще:

$$Z_z = 8 (0.1046 \cos 2\pi x - 0.1418 \cos 2\pi x \cos 2\pi y + 0.1046 \cos 2\pi y - \\ - 0.0080 \cos 4\pi x - 0.0257 \cos 2\pi x \cos 4\pi y - 0.0080 \cos 4\pi y - \\ - 0.0257 \cos 4\pi x \cos 2\pi y + (1 - \cos 2\pi x)(1 - \cos 2\pi y))$$

На фиг. 3 построена поверхность этих напряжений; построение выполнено с помощью вертикальных сечений, уравнения которых приводятся ниже.

1. Контурные сечения $x = 0$, $x = d = 1$ (сечения $y = 0$, $y = k = 1$ аналогичны):

$$Z_z = 0.77 - 0.50 \cos 2\pi y - 0.30 \cos 4\pi y$$

2. Сечения $x = \frac{1}{4}$, $x = \frac{3}{4}$ (сечения $y = \frac{1}{4}$, $y = \frac{3}{4}$ аналогичны):

$$Z_z = 1.064 + 0.042 \cos 2\pi y - 0.064 \cos 4\pi y$$

3. Среднее сечение $x = \frac{1}{2}$ (или $y = \frac{1}{2}$):

$$Z_z = 1.10 - 0.23 \cos 2\pi y + 0.14 \cos 4\pi y$$

4. Диагональные сечения $y = x$:

$$Z_z = 1.00 - 0.33 \cos 2\pi y - 0.13 \cos^2 2\pi y - 0.13 \cos 4\pi y - 0.41 \cos 2\pi y \cos 4\pi y$$

Как видно из фиг. 3, в центральной части поверхности напряжений имеется заметное возвышение; в центре $\max Z_z = 1.47$.

Наличие этого возвышения, как указано ранее, объясняется недостаточным расстоянием среднего сечения от нагруженных граней. В остальных областях сечения напряжение Z_z мало отклоняется от среднего своего значения $Z_z = 1$ за исключением небольших областей вблизи углов, где имеется резкое падение напряжения до нуля, обусловленное граничными свойствами (1.4) косинус-биномов; при повышении степени приближения эти области будут сокращаться; в пределе — в углах сечения следует ожидать явления Гиббса.

Полученный вид поверхности напряжений во втором приближении уже хорошо подтверждает принцип Сен-Венана. Это обстоятельство ввиду отсутствия в литературе аналогичных решений может служить указанием на правильность изложенного метода и практическую его пригодность.

§ 3. Задача о параллелепипеде, несущем на гранях $z = h$ и $z = 0$ взаимно уравновешенные, но не одинаковые нормальные нагрузки
В эту задачу входят случаи: 1) косоугольного изгиба параллелепипеда в вертикальной плоскости и 2) изгиба толстой плиты, нагруженной сверху и опертой по нижней грани, если закон распределения опорных реакций задан. Рассмотрим построение основного тензора для этой более сложной задачи. Представим основной тензор в виде суммы трех тензоров.

Первый тензор

$$Z_z = q = \text{const} \quad (3.1)$$

остальные компоненты равны нулю; этот тензор дает равномерное сжатие параллелепипеда по направлению оси z нагрузкой q .

Второй тензор образуем по формулам (1.2) при помощи следующих функций напряжений:

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{\pi z}{h} \right) \sum_m \sum_n a_{mn} P_m^D \quad (3.2)$$

Третий тензор образуем аналогично с помощью функций¹

$$\bar{\varphi}_1 = \bar{\varphi}_2 = \bar{\varphi}_3 = \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{\pi z}{h} \right) \sum_m \sum_n b_{mn} P_m P_n \quad (3.3)$$

Компоненты суммы этих трех тензоров будут

$$\begin{aligned} X_x &= \frac{1}{2} \frac{\pi^2}{h^2} \cos \frac{\pi z}{h} \sum \sum a_{mn} P_m P_n + \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{\pi z}{h} \right) \sum \sum a_{mn} P_m P_n'' - \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{\pi^2}{h^2} \cos \frac{\pi z}{h} \sum \sum b_{mn} P_m P_n + \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{\pi z}{h} \right) \sum \sum b_{mn} P_m P_n'' \\ Y_y &= \frac{1}{2} \frac{\pi^2}{h^2} \cos \frac{\pi z}{h} \sum \sum a_{mn} P_m P_n + \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{\pi z}{h} \right) \sum \sum a_{mn} P_m'' P_n - \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{\pi^2}{h^2} \cos \frac{\pi z}{h} \sum \sum b_{mn} P_m P_n + \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{\pi z}{h} \right) \sum \sum b_{mn} P_m'' P_n \\ Z_z &= q + \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{\pi z}{h} \right) \sum \sum a_{mn} (P_m'' P_n + P_m P_n'') + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{\pi z}{h} \right) \sum \sum b_{mn} (P_m'' P_n + P_m P_n'') \\ Y_z &= -\frac{1}{2} \frac{\pi}{h} \sin \frac{\pi z}{h} \sum \sum a_{mn} P_m P_n' + \frac{1}{2} \frac{\pi}{h} \sin \frac{\pi z}{h} \sum \sum b_{mn} P_m P_n' = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\pi}{h} \sin \frac{\pi z}{h} \sum \sum (a_{mn} - b_{mn}) P_m P_n' \\ X_z &= -\frac{1}{2} \frac{\pi}{h} \sin \frac{\pi z}{h} \sum \sum (a_{mn} - b_{mn}) P_m' P_n \\ X_y &= -\frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{\pi z}{h} \right) \sum \sum a_{mn} P_m' P_n' - \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{\pi z}{h} \right) \sum \sum b_{mn} P_m' P_n' \end{aligned} \quad (3.4)$$

Учитывая граничные свойства (1.4) косинус-биномов и рассматривая формулы (3.4), заметим, что боковые грани $x = 0$, $x = d$, $y = 0$, $y = k$ параллелепипеда остаются свободными от нагрузок. Далее, полагая $z = h$, найдем, что на верхней грани его

$$X_z = Y_z = 0, \quad Z_z = q + \sum \sum a_{mn} (P_m'' P_n + P_m P_n'') \quad (3.5)$$

На нижней грани ($z = 0$)

$$X_z = Y_z = 0, \quad Z_z = q + \sum \sum b_{mn} (P_m'' P_n + P_m P_n'') \quad (3.6)$$

Пусть на верхней грани $z = h$ задана распределенная нагрузка

$$Z_z = F(x, y) \quad (3.7)$$

а на нижней грани $z = 0$ дана нагрузка

$$Z_{-z} = -Z_z = -R(x, y) \quad (3.8)$$

Нагрузки эти предполагаются взаимно уравновешенными. Равенства (3.5) и (3.6) дают

$$q + \sum \sum a_{mn} (P_m'' P_n + P_m P_n'') = F(x, y) \quad (3.9)$$

$$q + \sum \sum b_{mn} (P_m'' P_n + P_m P_n'') = R(x, y) \quad (3.10)$$

¹ Ниже указан более общий способ построения второго и третьего тензоров.

Таким образом, построение основного тензора данной задачи свелось к необходимости аппроксимировать заданные нагрузки $F(x, y)$ и $R(x, y)$ при помощи полиномов, стоящих в левых частях (3.9) и (3.10) и содержащих неопределенные коэффициенты a_{mn} и b_{mn} .

Если, например, нагрузка $F(x, y) = q_0 = \text{const}$, т. е. равномерная, то из (3.9) непосредственно получим $q = q_0$, $a_{mn} = 0$.

В случае произвольного распределения нагрузок $F(x, y)$ и $R(x, y)$ задача сводится к вопросу о достаточной полноте системы функций

$$Q_{mn}(x, y) = P_m''(x)P_n(y) + P_m(x)P_n''(y)$$

в области прямоугольника $x = 0, x = d, y = 0, y = k$.

Вопрос этот пока остается открытым.

Определив коэффициенты a_{mn} и b_{mn} , получим основной тензор (3.4) с той или иной степенью приближения; добавив к нему корректирующий тензор (1.6), решим задачу до конца, как указано в § 1.

§ 4. Можно наметить более общий ход решения задачи: действительно, построим второй и третий основные тензоры (§ 3) при помощи следующих трех функций напряжений

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{\pi z}{h} \right) F_1(x, y) + \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{\pi z}{h} \right) \Phi_1(x, y) \\ \varphi_2 &= \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{\pi z}{h} \right) F_2(x, y) + \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{\pi z}{h} \right) \Phi_2(x, y) \\ \varphi_3 &= \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{\pi z}{h} \right) F_3(x, y) + \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{\pi z}{h} \right) \Phi_3(x, y) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Здесь $F_m(x, y), \Phi_m(x, y)$ ($m = 1, 2, 3$) произвольные пока функции; их следует определить из граничных условий плиты.

Пусть на верхней грани ($z = h$) задана нормальная нагрузка $Z_{+z} = \psi_h(x, y)$, а на нижней грани ($z = 0$) нагрузка $Z_{-z} = -\psi_0(x, y)$.

Тогда, составляя согласно (1.2) и (4.1) выражения для Z_z и полагая $Z = h, z = 0$, легко получим два условия

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2} = \psi_0, \quad \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x^2} = \psi_h \quad (4.2)$$

Касательные напряжения X_z и Y_z на этих гранях отсутствуют.

Для боковых граней, свободных от нагрузок $X_x = Y_x = Z_x$ при $x = 0, x = d$ и $Y_y = X_y = Z_y$ при $y = 0, y = k$.

Написав согласно (1.2) и (4.1) выражения для X_x, Y_x, Z_x и Y_y, X_y, Z_y и полагая соответственно $x = 0, x = d$ и $y = 0, y = k$, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F_3}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial y^2} = 0, \quad F_2 = \Phi_2 = 0 \\ \frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad \text{при } x = 0, x = d \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F_3}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial x^2} = 0, \quad F_1 = \Phi_1 = 0 \\ \frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} = 0 \end{aligned} \quad \text{при } y = 0, y = k \quad (4.4)$$

Заметим, что F_3 и Φ_3 определяются только граничными условиями, содержащимися в (4.3), (4.4); условия эти будут удовлетворены, если примем, например

$$F_3(x, y) = \sum \sum a_{mn} P_m(x) P_n(y), \quad \Phi_3(x, y) = \sum \sum b_{mn} P_m(x) P_n(y) \quad (4.5)$$

и учтем граничные свойства косинус-биномов (1.4).

Функции F_1, Φ_1, F_2, Φ_2 должны удовлетворять дифференциальным уравнениям (4.2) и граничным условиям, содержащимся в (4.3) и (4.4).

Заметим, что при этом каждая из нагрузок ψ_0 и ψ_h самоуравновешена на соответствующей грани; ввиду этого необходимо дополнить их равномерным сжатием $Z_z = q$.

Однако легко видеть, что уравнения (4.2) имеют следующее решение, выражающееся через две произвольные функции $\varphi(x, y)$, $\omega(x, y)$

$$F_1 = \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}, \quad F_2 = -\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \Psi_0(x, y), \quad \Phi_1 = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad \Phi_2 = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \quad x, y \quad (4.6)$$

Функции Ψ_0 и Ψ_h таковы, что

$$\frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial x^2} = \psi_0, \quad \frac{\partial^2 \Psi_h}{\partial x^2} = \psi_h \quad (4.7)$$

и потому могут быть без труда построены.

Подставляя (4.6) в (4.3), (4.4), получим граничные условия для φ и ω : при $x = 0$, $x = d$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = \Psi_0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \Psi_h, \quad \frac{\partial^3 \omega}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial \Psi_0}{\partial x}, \quad \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial \Psi_h}{\partial x} \quad (4.8)$$

при $y = 0$, $y = k$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 \omega}{\partial x^2 \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial y} = 0 \quad (4.9)$$

Таким образом, задача приведена к разысканию функций $\omega(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ в области прямоугольника $x = 0$, $x = d$, $y = 0$, $y = k$, когда на его контуре заданы условия (4.8) и (4.9).

Так как при этом функции ω и φ не связаны никакими дифференциальными уравнениями, то задача не имеет определенного решения, и основной тензор можно построить различными способами.

Поступила 27 XII 1950

ЛИТЕРАТУРА

1. Lamé G. Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides. Paris. 1852. § 66.
2. Mathieu E. Théorie de l'élasticité des corps solides. Seconde partie. Ch. X. Paris. 1890.
3. Тимошенко С. П. Курс теории упругости, ч. I. § 44. 1914.
4. Hager K. Spannungen in gleichmässig gedrückten Prismen. Otto Mohr zum achtzigsten Geburtstag gewidmet. Berlin. 1916.
5. Фепплъ А. и Л. Сила и деформация. Ч. I. § 16. 1933.
6. Папкович П. Ф. Теория упругости. Оборонгиз. 1939.
7. Филоненко-Бородич М. М. Об одной системе функций. ПММ. 1946. Т. X. Вып. 1.