

**КРУЧЕНИЕ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ С ПОПЕРЕЧНЫМ  
 СЕЧЕНИЕМ В ВИДЕ ТРАПЕЦИИ**

**Б. Л. Абрамян, Н. Х. Арутюнян**

(Ереван)

В настоящей работе приводится точное решение задачи о кручении призматических стержней с поперечным сечением в виде прямоугольной или равнобокой трапеции с острым углом, равным  $45^\circ$ .

Полученные формулы определяют напряжения и жесткость профиля при кручении для различных отношений  $b/a$  размеров сечения.

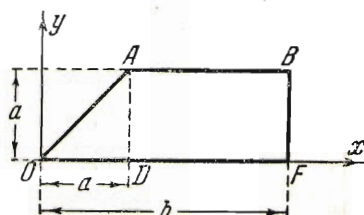
**§ 1. Кручение прямоугольной трапеции (фиг. 1).** Рассмотрим прямоугольную трапецию с острым углом, равным  $45^\circ$ . Функция напряжений  $U(x, y)$  при кручении удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -2 \quad (1.1)$$

в области сечения и принимает значение, равное нулю, на контуре сечения.

Ищем эту функцию в виде

$$U(x, y) = \begin{cases} \Phi(x, y) & (0 \leq x \leq a) \\ \Psi(x, y) & (a \leq x \leq b) \end{cases} \quad (1.2)$$



Фиг. 1

При этом должны выполняться следующие граничные условия:

$$\Phi(x, 0) = \Phi(x, a) = 0, \quad \Psi(x, 0) = \Psi(b, y) = \Psi(x, a) = 0 \quad (1.3)$$

Для непрерывности и однозначности решения функции  $\Phi(x, y)$  и  $\Psi(x, y)$  должны удовлетворять следующим условиям сопряжения:

$$\Phi(a, y) = \Psi(a, y), \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_{x=a} = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)_{x=a} \quad (1.4)$$

Будем искать функции  $\Phi(x, y)$  и  $\Psi(x, y)$  в виде

$$\Phi(x, y) = (x - y)y + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \left( \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{a} \sin \frac{k\pi x}{a} - \operatorname{sh} \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{a} \right) \quad (1.5)$$

$$\Psi(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \sin \frac{k\pi y}{a} \quad (1.6)$$

Уравнения (1.1) — (1.4) со значениями (1.5) и (1.6) полностью определяют функцию  $U(x, y)$  в области сечения.

§ 2. Решение уравнений задачи. Согласно условиям задачи для неизвестных функций  $f_k(x)$  получаем уравнения

$$f_k''(x) - \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 f_k(x) = \frac{4}{k\pi} [(-1)^k - 1] \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (2.1)$$

Решения этих уравнений имеют вид:

$$f_k(x) = B_k \operatorname{sh} \frac{k\pi x}{a} + C_k \operatorname{ch} \frac{k\pi x}{a} + \frac{4a^2}{(k\pi)^3} [1 + (-1)^{k+1}] \quad (2.2)$$

Функция  $\Phi(x, y)$ , выбранная в форме (1.5), удовлетворяет уравнению (1.1) в области  $OAD$  и граничным условиям (1.3).

Неизвестные коэффициенты  $A_k$ ,  $B_k$  и  $C_k$  определяются из условий сопряжения (1.4) по линии  $x = a$  и граничного условия при  $x = b$ .

§ 3. Определение коэффициентов интегрирования. Согласно (1.6) имеем

$$f_k(x) = \frac{2}{a} \int_0^a \Psi(x, y) \sin \frac{k\pi y}{a} dy \quad (3.1)$$

Пользуясь значением (3.1), получим

$$f_k(b) = 0$$

$$\begin{aligned} f_k(a) &= \frac{2}{a} \int_0^a \Psi(a, y) \sin \frac{k\pi y}{a} dy = \frac{2}{a} \int_0^a \Phi(a, y) \sin \frac{k\pi y}{a} dy = \\ &= \frac{4a^2}{(k\pi)^3} [1 + (-1)^{k+1}] - A_k \operatorname{sh} k\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_k'(a) &= \frac{2}{a} \int_0^a \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)_{x=a} \sin \frac{k\pi y}{a} dy = \frac{2}{a} \int_0^a \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_{x=a} \sin \frac{k\pi y}{a} dy = \\ &= (-1)^{k+1} \frac{2a}{k\pi} + (-1)^{k+1} \frac{2k}{a} \sum_{p=1}^{\infty} A_p \operatorname{sh} p\pi \frac{p(-1)^p}{p^2 + k^2} - \frac{k\pi}{a} A_k \operatorname{ch} k\pi \end{aligned} \quad (3.2)$$

( $k = 1, 2, \dots$ )

При этом использованы условия (1.3), (1.4) и значения  $\Phi(a, y)$ ,  $(\partial \Phi / \partial x)_{x=a}$  согласно (1.5).

Из условий (3.2), выразив коэффициенты  $A_k$  и  $C_k$  через  $B_k$ , для определения последних получаем следующую бесконечную систему:

$$\begin{aligned} B_k \frac{\operatorname{th}(k\pi b/a)}{\operatorname{sh} k\pi} &= (-1)^{k+1} \frac{2a^2}{(k\pi)^2} + (-1)^{k+1} \frac{2}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} B_p \frac{\operatorname{sh}[p\pi(b-a)/a]}{\operatorname{ch}(p\pi b/a)} \frac{p(-1)^p}{p^2 + k^2} + \\ &+ (-1)^k \frac{16a^2}{\pi^4} \sum_{p=1, 3, \dots}^{\infty} \frac{1}{p^2(p^2 + k^2)} \frac{\operatorname{ch} p\pi}{\operatorname{ch}(p\pi b/a)} - \frac{4a^2}{(k\pi)^3} \frac{1 + (-1)^{k+1}}{\operatorname{sh} k\pi \operatorname{ch}(k\pi b/a)} \end{aligned} \quad (3.3)$$

( $k = 1, 2, \dots$ )

Введем обозначение

$$B_k = \frac{(-1)^k}{k} a^2 Z_k \operatorname{cth} \frac{k\pi b}{a} \operatorname{sh} k\pi \quad (3.4)$$

Тогда бесконечная система (3.3) примет вид:

$$Z_k = \sum_{p=1}^{\infty} a_{kp} Z_p + b_k \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (3.5)$$

Здесь

$$a_{kp} = -\frac{2k}{\pi} \frac{\text{sh } p\pi \text{ sh } [p\pi(b-a)/a]}{\text{sh}(p\pi b/a)} \frac{1}{p^2 + k^2} \quad (3.6)$$

$$b_k = \frac{16k}{\pi^4} \sum_{p=1, 3, \dots}^{\infty} \frac{1}{p^2(p^2 + k^2)} \frac{\text{ch } p\pi}{\text{ch}(p\pi b/a)} + \frac{4}{k^2\pi^3} \frac{1 + (-1)^{k+1}}{\text{sh } k\pi \text{ ch}(k\pi b/a)} - \frac{2}{k\pi^2} \quad (3.7)$$

Бесконечная система (3.4) вполне регулярна, так как из (3.6) имеем

$$\sum_{p=1}^{\infty} |a_{kp}| < \frac{k}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2 + k^2} \leq 0.5 = 1 - \theta, \quad \theta = 0.5 \quad (3.8)$$

Свободный же член  $b_k$  системы (3.5) удовлетворяет неравенству

$$|b_k| < 0.287 + \frac{0.023}{\text{ch}(\pi b/a)} \quad (3.9)$$

Обозначим значения неизвестных  $Z_k$  с избытком через  $Z_k^+$ , а значения с недостатком через  $Z_k^-$ .

Пользуясь теорией вполне регулярных систем [4] и применяя лимитанты, получим для  $Z_k$  следующие оценки:

$$\begin{aligned} \frac{0.8558}{\text{ch}(\pi b/a)} - 0.1755 &= Z_1^- \leq Z_1 \leq Z_1^+ = \frac{0.8559}{\text{ch}(\pi b/a)} - 0.1750 \\ \frac{0.6793}{\text{ch}(\pi b/a)} - 0.0900 &= Z_2^- \leq Z_2 \leq Z_2^+ = \frac{0.6794}{\text{ch}(\pi b/a)} - 0.0893 \\ \frac{0.5511}{\text{ch}(\pi b/a)} - 0.0556 &= Z_3^- \leq Z_3 \leq Z_3^+ = \frac{0.5512}{\text{ch}(\pi b/a)} - 0.0546 \\ \frac{0.4522}{\text{ch}(\pi b/a)} - 0.0436 &\leq Z_k^- \leq Z_k \leq Z_k^+ \leq \frac{0.4525}{\text{ch}(\pi b/a)} - 0.0403 \quad (k = 4, 5, \dots) \end{aligned} \quad (3.10)$$

**§ 4. Определение функции напряжений.** Подставляя значения постоянных интегрирования в соотношения (1.5) и (1.6) для функции напряжений, получим

$$U(x, y) = (x - y)y + a^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^k}{k} \frac{\text{sh}[k\pi(b-a)/a]}{\text{sh}(k\pi b/a)} Z_k + \right. \quad (4.1)$$

$$\left. + \frac{4}{(k\pi)^3} [1 + (-1)^{k+1}] \frac{\text{cth } k\pi}{\text{ch}(k\pi b/a)} \right\} \left( \text{sh} \frac{k\pi y}{a} \sin \frac{k\pi x}{a} - \text{sh} \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{a} \right) \quad (0 \leq x \leq a)$$

$$\begin{aligned} U(x, y) &= a^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin \frac{k\pi y}{a} \left\{ \frac{\text{sh } k\pi \text{ sh}[k\pi(b-x)/a]}{\text{sh}(k\pi b/a)} Z_k + \right. \\ &\quad \left. + \frac{4}{k^2\pi^3} [1 + (-1)^{k+1}] \left( 1 - \frac{\text{ch}(k\pi x/a)}{\text{ch}(k\pi b/a)} \right) \right\} \quad (a \leq x \leq b) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Подставляя в соотношения (4.1) и (4.2) вместо значений  $Z_k$  значения с недостатком  $Z_k^-$  и с избытком  $Z_k^+$ , получим функции напряжений  $U^-(x, y)$  и  $U^+(x, y)$ .

При этом будет иметь место следующее неравенство:

$$U^-(x, y) \leq U(x, y) \leq U^+(x, y) \quad (4.3)$$

для всех точек  $(x, y)$  поперечного сечения скручиваемого стержня.

§ 5. **Определение жесткости при кручении.** Подставим функцию напряжений  $U(x, y)$  из (4.1) и (4.2) в формулу жесткости

$$C = 2G \iint_{\Omega} U(x, y) dx dy = 2G \left[ \int_0^a dx \int_0^x \Phi(x, y) dy + \int_a^b dx \int_0^a \Psi(x, y) dy \right] \quad (5.1)$$

где  $\Omega$  — область поперечного сечения стержня,  $G$  — модуль сдвига.

Интегрируя, получим

$$C = a^4 G \left\{ \frac{1}{3} \frac{b}{a} - 0.25 + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1, 3, \dots}^{\infty} \frac{Z_k}{k^3} \left( 1 - \frac{\text{sh } k\pi}{\text{sh}(k\pi b/a)} \right) + \right. \\ \left. + \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Z_k}{k^3} (1 - \text{ch } k\pi) \frac{\text{sh}[k\pi(b-a)/a]}{\text{sh}(k\pi b/a)} - \right. \\ \left. - \frac{16}{\pi^5} \sum_{k=1, 3, \dots}^{\infty} \frac{1}{k^5} \left[ \frac{\text{ch } k\pi}{\text{ch}(k\pi b/a)} \text{cth } \frac{k\pi}{2} + 2 \left( \text{th } \frac{k\pi b}{a} - \frac{\text{sh } k\pi}{\text{ch}(k\pi b/a)} \right) \right] \right\} \quad (5.2)$$

Подставляя в (5.2) найденные значения  $Z_k$  из (3.10), получим верхнюю и нижнюю границы для значений жесткости профиля.

Ввиду того что эти границы с точностью до  $0.0005 a^4 G$  не отличаются друг от друга, приводим значения жесткостей  $C/a^4 G$  для различных отношений  $b/a$  размеров сечения одной строккой:

$b/a$	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	10.0
$C/Ga^4$	0.026	0.263	0.591	0.924	1.257	2.924

Формула (5.2) для определения жесткости  $C$  весьма упрощается, когда  $b/a \geq 3$ . В этом случае выражение

$$\frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1, 3, \dots}^{\infty} \frac{Z_k}{k^3} \left( 1 - \frac{\text{sh } k\pi}{\text{sh}(k\pi b/a)} \right) + \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Z_k}{k^3} (1 - \text{ch } k\pi) \frac{\text{sh}[k\pi(b-a)/a]}{\text{sh}(k\pi b/a)} - \\ - \frac{16}{\pi^5} \sum_{k=1, 3, \dots}^{\infty} \frac{1}{k^5} \left[ \frac{\text{ch } k\pi}{\text{ch}(k\pi b/a)} \text{cth } \frac{k\pi}{2} + 2 \left( \text{th } \frac{k\pi b}{a} - \frac{\text{sh } k\pi}{\text{ch}(k\pi b/a)} \right) \right] \quad (5.3)$$

входящее в формулу (5.2) для определения жесткости профиля, независимо от отношения  $b/a$  размеров поперечного сечения, остается почти постоянным и с точностью до  $0.0005$  равно  $-0.159$ .

В силу этого при  $b/a \geq 3$  соотношение (5.2) примет вид:

$$C = \left( \frac{1}{3} \frac{b}{a} - 0.409 \right) a^4 G \quad (5.4)$$

§ 6. **Определение напряжений.** Пользуясь выражениями (4.1) и (4.2), напряжения найдем по обычным формулам.

Приведем только выражения для напряжений в точке  $(\frac{1}{2} b, 0)$

$$Y_z \left( \frac{1}{2} b, 0 \right) = 0 \quad (6.1)$$

$$X_z \left( \frac{1}{2} b, 0 \right) = \left\{ \frac{1}{2} b + a\pi \sum_{k=1}^{\infty} \left( \sin \frac{k\pi b}{2a} - \text{sh } \frac{k\pi b}{2a} \right) \left[ (-1)^k Z_k \frac{\text{sh}[k\pi(b-a)/a]}{\text{sh}(k\pi b/a)} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{4}{k^2 \pi^3} [1 + (-1)^{k+1}] \frac{\text{cth } k\pi}{\text{ch}(k\pi b/a)} \right] \right\} G\tau \quad \text{при } \frac{b}{a} \leq 2 \quad (6.2)$$

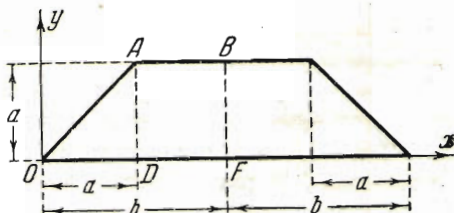
$$X_z \left( \frac{1}{2} b, 0 \right) = \pi a G \tau \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ (-1)^{k+1} Z_k \frac{\operatorname{sh} k\pi \operatorname{sh} (k\pi b / 2a)}{\operatorname{sh} (k\pi b / a)} + \right. \\ \left. + \frac{4}{k^2 \pi^3} [1 + (-1)^{k+1}] \left( 1 - \frac{\operatorname{ch} (k\pi b / 2a)}{\operatorname{ch} (k\pi b / a)} \right) \right\} \quad \text{при } \frac{b}{a} \geq 2 \quad (6.3)$$

где  $\tau$  — угол закручивания на единицу длины стержня.

Подставив сюда коэффициенты  $Z_k$ , получим верхнюю и нижнюю границы напряжения  $X_z(\frac{1}{2}b, 0)$ .

Так как эти границы ничтожно мало отличаются друг от друга, приводим значения напряжений  $X_z / G\tau a$  в точке  $(\frac{1}{2}b, 0)$  одной строкой.

$b/a$	1.0	2.0	3.0
$X_z / G\tau a$	0.409	0.780	0.941
$b/a$	4.0	5.0	10.0
$X_z / G\tau a$	0.987	0.997	1.000



Фиг. 2

§ 7. Кручение равнобокой трапеции (фиг. 2). В силу симметрии достаточно найти функцию напряжений  $U(x, y)$  только для части  $OABF$  сечения.

Ищем функцию  $U(x, y)$  в виде

$$U(x, y) = \begin{cases} \Phi(x, y) & 0 \leq x \leq a \\ \Psi(x, y) & a \leq x \leq b \end{cases} \quad (7.1)$$

При этом должны выполняться следующие условия:

$$\Phi(x, 0) = \Phi(x, a) = 0, \quad \Psi(x, 0) = \Psi(x, a) = \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)_{x=b} = 0 \quad (7.2)$$

$$\Phi(a, y) = \Psi(a, y), \quad \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{x=a} = \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)_{x=a} \quad (7.3)$$

Аналогичным образом, как это сделано в первых параграфах работы, для функции напряжений получим следующие выражения:

$$U(x, y) = (x - y)y + a^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \operatorname{ch} [k\pi(b-a)/a]}{k \operatorname{ch} (k\pi b/a)} F_k \left( \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{a} \sin \frac{k\pi x}{a} - \right. \\ \left. - \operatorname{sh} \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{a} \right) \quad (0 \leq x \leq a) \quad (7.4)$$

$$U(x, y) = a^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} F_k \frac{\operatorname{sh} k\pi \operatorname{ch} [k\pi(b-x)/a]}{\operatorname{ch} (k\pi b/a)} \sin \frac{k\pi y}{a} + y(a - y) \quad (a \leq x \leq b) \quad (7.5)$$

Здесь для коэффициентов  $F_k$  имеют место неравенства

$$\begin{aligned} -0.1763 &= F_1^- \leq F_1 \leq F_1^+ = -0.1762 \\ -0.0823 &= F_2^- \leq F_2 \leq F_2^+ = -0.0822 \\ -0.0567 &= F_3^- \leq F_3 \leq F_3^+ = -0.0565 \\ -0.0446 &\leq F_k^- \leq F_k \leq F_k^+ \leq -0.0439 \quad (k = 4, 5, \dots) \end{aligned} \quad (7.6)$$

Тогда жесткость скручиваемого стержня с поперечным сечением в виде равнобокой трапеции определится формулой

$$C = a^4 G \left\{ \frac{2}{3} \frac{b}{a} - 0.5 + \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=1, 3, \dots}^{\infty} \frac{F_k \operatorname{sh} k\pi \operatorname{sh} [k\pi(b-a)/a]}{k^3 \operatorname{ch}(k\pi b/a)} + \right. \\ \left. + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{F_k}{k^3} \left[ \frac{\operatorname{ch}[k\pi(b-a)/a]}{\operatorname{ch}(k\pi b/a)} + (-1)^{k+1} \frac{\operatorname{ch} k\pi \operatorname{ch}[k\pi(b-a)/a]}{\operatorname{ch}(k\pi b/a)} \right] \right\} \quad (7.7)$$

Подставляя сюда коэффициенты  $F_k$  из (7.6), получим верхнюю и нижнюю границы жесткости  $C$ .

В этом случае также верхняя и нижняя границы жесткости с точностью до 0.0005  $a^4 G$  не отличаются друг от друга.

Приведем значения жесткостей, вычисленные по формуле (7.7), для различных отношений  $b/a$  размеров поперечного сечения стержня:

$b/a$	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	10.0
$C/Ga^4$	0.104	0.724	1.390	2.057	2.724	6.057

Аналогичным образом упрощая формулу (7.7) в случае, когда  $b/a \geq 2$ , получим формулу

$$C = \left( \frac{2}{3} \frac{b}{a} - 0.6096 \right) a^4 G \quad (7.8)$$

Пользуясь выражениями (7.4) и (7.5), найдем напряжения в точке  $F$  поперечного сечения стержня:

$$Y_2(b, 0) = 0 \quad (7.9)$$

$$X_2(b, 0) = Ga\tau \left[ 1 - \pi \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k F_k \frac{\operatorname{sh} k\pi}{\operatorname{ch}(k\pi b/a)} \right] \quad (7.10)$$

Приведем значения напряжений  $X_2(b, 0)$  для различных отношений  $b/a$  размеров сечения, вычисленные по формуле (7.10):

$b/a$	1.0	2.0	3.0	4.0	10.0
$X_2/G\tau a$	0.6494	0.9765	0.9990	1.0000	1.0000

Поступила 9 IX 1950

Сектор математики и механики  
Академии Наук Армянской ССР

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. Гостехиздат. Л. — М. 1949.