Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XV, 1951

К ВОПРОСУ О ВЫЧИСЛЕНИИ ТРАЕКТОРИЙ ЦЕНТРОВ ТЯЖЕСТИ АРТИЛЛЕРИЙСКИХ СНАРЯДОВ

Е. М. Палечек (Бежица)

Задача о вычислении траектории центра тяжести артиллерийского снаряда без учета вращения его относительно продольной оси сводится к решению некоторой системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка и первой степени. В зависимости от выбора независимого переменного система приобретает ту или иную форму.

К настоящему времени существует ряд методов численного интегрирования такой системы. Из них наиболее оригинальным является метод С. А. Казакова, опубликованный посмертно [1] в 1945 г. В качестве независимых переменных Казаковым выбраны: абсцисса центра тяжести снаряда x и время его полета t. Сущность метода состоит в том, что при численном интегрировании экстраполяции подвергаются не непосредственно те или иные переменные, а некоторые вспомогательные величины, оказывающие малое влияние на результаты экстраполяции.

В данной работе намечены три задачи.

Во-первых, в § 1 и 2 рассматривается дальнейшее развитие метода Казакова в применении к независимым переменным: тангенсу угла наклона касательной к оси абсцисс p и к горизонтальной компоненте скорости u.

Во-вторых, в § 2 дается оценка относительной погрешности результатов при численном интегрировании системы по тем или иным независимым переменным.

В-третьих, в § 4 рассматривается целесообразность выбора того или иного переменного в каждом конкретном случае.

§ 1. Будем обозначать через x, y и v абсциссу, ординату и скорость центра тяжести снаряда, через u — горизонтальную компоненту скорости.

Пусть далее c — баллистический коэффициент, $k=c\,G\left(v, \sqrt{\tau_0/\tau}\right) H(y)$ — функция силы сопротивления воздуха в зависимости от скорости, отношения виртуальных температур воздуха и высоты траектории.

Тогда, выбрав в качестве независимого переменного тангенс угла наклона касательной к оси абсцисс $p = \operatorname{tg}\theta$, придем к следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\frac{du}{dp} = \frac{ku^2}{g}, \qquad \frac{dx}{dp} = -\frac{u^2}{g}, \qquad \frac{dt}{dp} = -\frac{u}{g}, \qquad \frac{dy}{dp} = -\frac{pu^2}{g} \tag{1.1}$$

Пользуясь методом С. А. Казакова [1], представим функцию k в виде

$$k = k_0 + k_1\varphi + k_2\varphi^2 + \cdots \qquad \left(\varphi = \frac{p_i - p}{z_p}\right) \tag{1.2}$$

Здесь z_p — произвольно выбранный постоянный интервал изменения тангенса.

Имеем $dp = z_p d\varphi$, после чего первое из уравнений (1.1) переписывается в следующем виде:

$$\frac{du}{u^2} = -\frac{z_p}{g}\left(k_0 + k_1\varphi + k_2\varphi^2 + \cdots\right) d\varphi \tag{1.3}$$

Отсюда, интегрируя и замечая, что при изменении φ от 0 до φ переменная u изменяется от u_i до u, находим

$$-\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{u_i}\right)=-\frac{z}{g}\left(k_0\varphi+\frac{1}{2}k_1\varphi^2+\frac{1}{3}k_2\varphi^3+\cdots\right)$$

или

$$\frac{1}{u}=\frac{1}{u_i}+\frac{z_p}{g}\left(k_0\varphi+\frac{1}{2}k_1\varphi^2+\frac{1}{3}k_2\varphi^3+\cdots\right)=$$

$$=\frac{1}{u_i}\left[1+\frac{z_pu_i}{g}\left(k_0\varphi+\frac{1}{2}k_1\varphi^2+\frac{1}{3}k_2\varphi^3+\cdots\right)\right] \tag{1.4}$$

Введем обозначения

$$\alpha_0=\frac{k_0z_pu_i}{g},\qquad \alpha_1=\frac{k_1z_pu_i}{2g},\qquad \alpha_2=\frac{k_2z_pu_i}{3g},\ \ldots \tag{1.5}$$

Тогда из (1.4) получим

$$u=\frac{u_i}{1+\alpha_0\varphi+\alpha_1\varphi^2+\alpha_2\varphi^3+\cdots} \tag{1.6}$$

При изменении φ от 0 до 1 переменная u изменяется от u_i до u_{i+1}, поэтому при $\varphi=1$ окончательно имеем

$$u_{i+1}=\frac{u_i}{1+\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\cdots} \tag{1.7}$$

Таким образом, зная числовые значения коэффициентов $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$, вывод которых укажем ниже, представляется возможным от предполагаемого известным значения u в точке i перейти к значению его в точке $i+1$. Производя последовательную экстраполяцию, можно, опираясь на известное начальное значение $u=u_0$ в начале координат, получить значение $u=u_c$ в точке падения снаряда на землю.

Обратимся к третьему уравнению системы (1.1). Представим его последовательно в виде

$$dt=-\frac{u}{g}\,dp=\frac{u_i}{g}\,\frac{z_p\,d\varphi}{1+\alpha_0\varphi+\alpha_1\varphi^2+\alpha_2\varphi^3+\cdots}=$$

$$=\frac{z_pu_i}{g}\left(\frac{1}{1+\alpha_0\varphi}\,\frac{1}{1+\dfrac{\alpha_1\varphi^2}{1+\alpha_0\varphi}+\dfrac{\alpha_2\varphi^3}{1+\alpha_0\varphi}+\cdots}\right)d\varphi=$$

$$=\frac{z_pu_i}{g}\,(1+\alpha_0\varphi)^{-1}\left(1+\frac{\alpha_1\varphi^2}{1+\alpha_0\varphi}+\frac{\alpha_2\varphi^3}{1+\alpha_0\varphi}+\cdots\right)^{-1}d\varphi$$

Выбирая надлежащим образом z_p и полагая α_0 величиной первого порядка малости, разложим выражение, стоящее во вторых скобках, по степеням

$$A=\frac{\alpha_1\varphi^2}{1+\alpha_0\varphi}+\frac{\alpha_2\varphi^3}{1+\alpha_0\varphi}+\cdots \tag{1.8}$$

ограничившись малыми не выше третьего порядка (α_2).

Тогда получим

$$dt=\frac{z_pu_i}{g}\,(1+\alpha_0\varphi)^{-1}\left(1-\frac{\alpha_1\varphi^2}{1+\alpha_0\varphi}-\frac{\alpha_2\varphi^3}{1+\alpha_0\varphi}-\cdots\right)d\varphi=$$

$$=\frac{z_pu_i}{g}\left[\frac{1}{1+\alpha_0\varphi}-\frac{\alpha_1\varphi^2}{(1+\alpha_0\varphi)^2}-\frac{\alpha_2\varphi^3}{(1+\alpha_0\varphi)^2}-\cdots\right]d\varphi \tag{1.9}$$

Проинтегрируем это выражение от t_i до t и от 0 до φ; при этом обозначим:

$$T_0(\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{1+\alpha_0\varphi} = \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1} \alpha_0{}^n \varphi^{n+1}$$

$$T_1(\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{\varphi^2 d\varphi}{(1+\alpha_0\varphi)^2} = \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n+3} \alpha_0{}^n \varphi^{n+3} \tag{1.10}$$

$$T_2(\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{\varphi^3 d\varphi}{(1+\alpha_0\varphi)^2} = \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n+4} \alpha_0{}^n \varphi^{n+4} \qquad \text{и т. д.}$$

где выражения, стоящие в правой части равенств, получены путем разложения подинтегральной функции в ряд с последующим интегрированием. В результате из (1.9) получим

$$t = t_i + \frac{z_p u_i}{g} [T_0(\varphi) - \alpha_1 T_1(\varphi) - \alpha_2 T_2(\varphi) - \cdots] \tag{1.11}$$

Полагая $\varphi = 1$, имеем

$$t_{i+1} = t_i + \frac{z_p u_i}{g} (T_0 - \alpha_1 T_1 - \alpha_2 T_2 - \cdots) \tag{1.12}$$

Здесь принято

$$T_0 = \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1} \alpha_0{}^n, \quad T_1 = \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n+3} \alpha_0{}^n, \quad T_2 = \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n+4} \alpha_0{}^n$$

Из второго уравнения системы (1.1) находим координату x. Имеем

$$\begin{aligned} dx &= -\frac{u^2}{g} dp = \frac{z_p u_i{}^2}{g} \frac{d\varphi}{(1+\alpha_0\varphi+\alpha_1\varphi^2+\alpha_2\varphi^3+\cdots)^2} = \\ &= \frac{z_p u_i{}^2}{g} \left(\frac{1}{1+\alpha_0\varphi}\right)^2 \left(\frac{1}{1+\dfrac{\alpha_1\varphi^2}{1+\alpha_0\varphi}+\dfrac{\alpha_2\varphi^3}{1+\alpha_0\varphi}+\cdots}\right)^2 d\varphi = \\ &= \frac{z_p u_i{}^2}{g} (1+\alpha_0\varphi)^{-2} \left(1+\frac{\alpha_1\varphi^2}{1+\alpha_0\varphi}+\frac{\alpha_2\varphi^3}{1+\alpha_0\varphi}+\cdots\right)^{-2} d\varphi \end{aligned} \tag{1.13}$$

Воспользуемся попрежнему обозначением (1.8) и разложим выражение $(1+A)^{-2}$ в ряд по формуле бинома, отбросив в этом разложении все члены, содержащие A в степени второй и выше. Тогда из (1.13) получим

$$dx = \frac{z_p u_i{}^2}{g} \left[\frac{1}{(1+\alpha_0\varphi)^2} - \frac{2\alpha_1\varphi^2}{(1+\alpha_0\varphi)^3} - \frac{2\alpha_2\varphi^3}{(1+\alpha_0\varphi)^3} - \cdots\right] d\varphi \tag{1.14}$$

Проинтегрируем это выражение почленно в соответствующих пределах изменения x и φ; при этом введем

$$X_0(\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1+\alpha_0\varphi)^2} = \sum_0^{\infty} (-1)^n \alpha_0{}^n \varphi^{n+1}$$

$$X_1(\varphi) = 2\int_0^{\varphi} \frac{\varphi^2 d\varphi}{(1+\alpha_0\varphi)^3} = \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)(n+2)}{n+3} \alpha_0{}^n \varphi^{n+3} \tag{1.15}$$

$$X_2(\varphi) = 2\int_0^{\varphi} \frac{\varphi^3 d\varphi}{(1+\alpha_0\varphi)^3} = \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)(n+2)}{n+4} \alpha_0{}^n \varphi^{n+4} \qquad \text{и т. д.}$$

В результате из (1.14) получим

$$x = x_i + \frac{z_p u_i^2}{g}\left[X_0(\varphi) - \alpha_1 X_1(\varphi) - \alpha_2 X_2(\varphi) - \cdots\right] \tag{1.16}$$

Полагая $\varphi = 1$, имеем

$$x_{i+1} = x_i + \frac{z_p u_i^2}{g}\left(X_0 - \alpha_1 X_1 - \alpha_2 X_2 - \cdots\right) \tag{1.17}$$

Здесь принято

$$X_0 = \sum_0^\infty (-1)^n \alpha_0^n, \qquad X_1 = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{(n+1)(n+2)}{n+3}\alpha_0^n$$

$$X_2 = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{(n+1)(n+2)}{n+4}\alpha_0^n$$

Для определения координаты y обратимся к четвертому уравнению системы (1.1), которое иначе можно представить в виде $dy = p\,dx$. Так как $p = p_i - z_p\varphi$, то $dy = p_i dx - z_p\varphi\,dx$; подставляя сюда значение dx из (1.14), придем к выражению

$$dy = p_i dx - \frac{z_p^2 u_i^2}{g}\left[\frac{\varphi}{(1+\alpha_0\varphi)^2} - \frac{2\alpha_1\varphi^3}{(1+\alpha_0\varphi)^3} - \frac{2\alpha_2\varphi^4}{(1+\alpha_0\varphi)^3} - \cdots\right]d\varphi \tag{1.18}$$

Введем обозначения

$$Y_0(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{\varphi\,d\varphi}{(1+\alpha_0\varphi)^2} = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{n+1}{n+2}\alpha_0^n \varphi^{n+2}$$

$$Y_1(\varphi) = 2\int_0^\varphi \frac{\varphi^3\,d\varphi}{(1+\alpha_0\varphi)^3} = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{(n+1)(n+2)}{n+4}\alpha_0^n \varphi^{n+4} \tag{1.19}$$

$$Y_2(\varphi) = 2\int_0^\varphi \frac{\varphi^4\,d\varphi}{(1+\alpha_0\varphi)^3} = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{(n+1)(n+2)}{n+5}\alpha_0^n \varphi^{n+5} \quad \text{и т. д.}$$

Интегрируя (1.18), находим

$$y = y_i + p_i(x - x_i) - \frac{z_p^2 u_i^2}{g}\left[Y_0(\varphi) - \alpha_1 Y_1(\varphi) - \alpha_2 Y_2(\varphi) - \cdots\right] \tag{1.20}$$

В частности, при $\varphi = 1$ имеем

$$y_{i+1} = y_i + p_i(x_{i+1} - x_i) - \frac{z_p^2 u_i^2}{g}\left(Y_0 - \alpha_1 Y_1 - \alpha_2 Y_2 - \cdots\right) \tag{1.21}$$

где введены обозначения

$$Y_0 = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{n+1}{n+2}\alpha_0^n, \qquad Y_1 = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{(n+1)(n+2)}{n+4}\alpha_0^n$$

$$Y_2 = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{(n+1)(n+2)}{n+5}\alpha_0^n$$

По предложению С. А. Казакова все вспомогательные функции T, X и Y, зависящие только от аргумента α_0, заключаются в числовые таблицы, расположенные по этому аргументу. Укажем теперь вывод числовых значений вспомогательных величин α_0, α_1, α_2 и т. д.

Величина k, как мы уже видели, является функцией скорости v и высоты y; в любом промежутке $i \div i+1$ при помощи той или иной интерполяционной формулы она может быть представлена в виде некоторого ряда расположенных по порядку конечных разностей. Воспользуемся второй интерполяционной формулой Ньютона как наиболее простой и обозначим через k_i значение k в точке i, а через $\Delta_1 k_i$, $\Delta_2 k_i$ и т. д. — разности соответствующих порядков. Тогда

$$k = k_i + \varphi\Delta_1 k_i + \frac{1}{2}\varphi(\varphi+1)\Delta_2 k_i + \cdots \tag{1.22}$$

Здесь, как и в дальнейшем, ограничиваемся разностями не выше второго порядка. Это же выражение можно представить и в виде ряда, расположенного по степеням φ. Тогда оно будет выглядеть так:

$$k = k_i + \left(\Delta_1 k_i + \frac{1}{2}\Delta_2 k_i\right)\varphi + \frac{1}{2}\Delta_2 k_i \varphi^2 + \cdots$$

Сравнивая это разложение с (1.2), видим, что

$$k_0 = k_i, \qquad k_1 = \Delta_1 k_i + \frac{1}{2}\Delta_2 k_i, \qquad k_2 = \frac{1}{2}\Delta_2 k_i, \cdots \tag{1.23}$$

т. е. k_0 есть значение функции k в i-й точке, а k_1, $k_2 \ldots$ и т. д. представляют собой соответствующие функции разностей различных порядков.

Так как $\Delta_1 k_i = k_i - k_{i-1}$ и $\Delta_2 k_i = k_i - 2k_{i-1} + k_{i-2}$, то

$$\begin{aligned} k_0 &= k_i \\ k_1 &= k_i - k_{i-1} + \frac{k_i - 2k_{i-1} + k_{i-2}}{2} = \frac{3}{2}k_i - 2k_{i-1} + \frac{1}{2}k_{i-2} \\ k_2 &= \frac{k_i - 2k_{i-1} + k_{i-2}}{2} = \frac{1}{2}k_i - k_{i-1} + \frac{1}{2}k_{i-2} \qquad \text{и т. д.} \end{aligned} \tag{1.24}$$

Таким образом, согласно (1.5) имеем

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{z_p u_i}{g} k_0 = \frac{z_p u_i}{g} k_i \\ \alpha_1 &= \frac{z_p u_i}{2g} k_1 = \frac{z_p u_i}{g}\left(\frac{3}{4}k_i - k_{i-1} + \frac{1}{4}k_{i-2}\right) \\ \alpha_2 &= \frac{z_p u_i}{3g} k_2 = \frac{z_p u_i}{g}\left(\frac{1}{6}k_i - \frac{1}{3}k_{i-1} + \frac{1}{6}k_{i-2}\right) \qquad \text{и т. д.} \end{aligned} \tag{1.25}$$

Так как при помощи α_0, α_1, α_2 и т. д. выводятся числовые значения величин t, x и y в точке $i+1$, то, следовательно, для этого необходимо знать значения k минимум в трех предшествующих точках. Если, например, как всегда, известно значение $k = k_0$ в начале координат, то для того чтобы получить значения всех искомых параметров в точке *3*, надлежит предварительно вычислить эти значения тем или иным способом в точках *1* и *2*. Чаще всего при численном интегрировании дифференциальных уравнений начало решения выполняется методом последовательных приближений.

§ 2. Перейдем теперь к решению аналогичной задачи, когда в качестве независимого переменного выбрана горизонтальная компонента скорости u. В этом переменном система основных дифференциальных уравнений представится в следующем виде:

$$\frac{dx}{du} = -\frac{1}{k}, \qquad \frac{dt}{du} = -\frac{1}{ku}, \qquad \frac{dy}{du} = -\frac{p}{k}, \qquad \frac{dp}{du} = \frac{g}{ku^2} \tag{2.1}$$

Полагая $1/k = L$, перепишем указанную систему таким образом:

$$\frac{dx}{du} = -L, \qquad \frac{dt}{du} = -\frac{L}{u}, \qquad \frac{dy}{du} = -pL, \qquad \frac{dp}{du} = \frac{gL}{u^2} \tag{2.2}$$

Допустим теперь

$$L = L_0 + L_1\varphi + L_2\varphi^2 + \cdots \qquad \left(\varphi = \frac{u_i - u}{z_u}\right) \tag{2.3}$$

Здесь z_u — произвольно выбранный постоянный интервал изменения скорости. Имеем $du = -z_u d\varphi$; из первого уравнения системы определяется координата x:

$$dx = -L\,du = z_u\,(L_0 + L_1\varphi + L_2\varphi^2 + \cdots)\,d\varphi$$

или

$$x = x_i + z_u\left(L_0\varphi + \frac{1}{2}L_1\varphi^2 + \frac{1}{3}L_2\varphi^3 + \cdots\right) \tag{2.4}$$

Введем вспомогательные параметры β_i, полагая

$$\beta_0 = \frac{z_u L_0}{x_i}, \qquad \beta_1 = \frac{z_u L_1}{x_i}, \qquad \beta_2 = \frac{z_u L_2}{x_i}, \ldots \tag{2.5}$$

Тогда

$$x = x_i\left(1 + \beta_0\varphi + \frac{1}{2}\beta_1\varphi^2 + \frac{1}{3}\beta_2\varphi^3 + \cdots\right) \tag{2.6}$$

и, в частности, при $\varphi = 1$

$$x_{i+1} = x_i\left(1 + \beta_0 + \frac{1}{2}\beta_1 + \frac{1}{3}\beta_2 + \cdots\right) \tag{2.7}$$

Из второго уравнения (2.2) находим время полета снаряда t:

$$dt = -\frac{L\,du}{u} = \frac{dx}{u} = \frac{x_i\,(\beta_0 + \beta_1\varphi + \beta_2\varphi^2 + \cdots)}{u_i - z_u\varphi}\,d\varphi =$$
$$= \frac{x_i}{u_i}\,\frac{\beta_0 + \beta_1\varphi + \beta_2\varphi^2}{1 - \alpha_0\varphi}\,d\varphi \qquad \left(\alpha_0 = \frac{z_u}{u_i}\right) \tag{2.8}$$

Интегрируя и вводя обозначения

$$T_0(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{1 - \alpha_0\varphi} = \sum_0^\infty \frac{\alpha_0{}^n\varphi^{n+1}}{n+1}$$
$$T_1(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{\varphi\,d\varphi}{1 - \alpha_0\varphi} = \sum_0^\infty \frac{\alpha_0{}^n\varphi^{n+2}}{n+2} \tag{2.9}$$
$$T_2(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{\varphi^2 d\varphi}{1 - \alpha_0\varphi} = \sum_0^\infty \frac{\alpha_0{}^n\varphi^{n+3}}{n+3} \qquad \text{и т. д.}$$

находим

$$t = t_i + \frac{x_i}{u_i}\,[\beta_0 T_0(\varphi) + \beta_1 T_1(\varphi) + \beta_2 T_2(\varphi) + \cdots] \tag{2.10}$$

При $\varphi = 1$ имеем

$$t_{i+1} = t_i + \frac{x_i}{u_i}\,(\beta_0 T_0 + \beta_1 T_1 + \beta_2 T_2 + \cdots) \tag{2.11}$$

где

$$T_0 = \sum_0^\infty \frac{\alpha_0{}^n}{n+1}, \qquad T_1 = \sum_0^\infty \frac{\alpha_0{}^n}{n+2}, \qquad T_2 = \sum_0^\infty \frac{\alpha_0{}^n}{n+3}, \ldots \tag{2.12}$$

Так как

$$\frac{x_i}{u_i}\beta_0 = \frac{x_i}{u_i}\,\frac{z_u L_0}{x_i} = \alpha_0 L_0$$
$$\frac{x_i}{u_i}\beta_1 = \frac{x_i}{u_i}\,\frac{z_u L_1}{x_i} = \alpha_0 L_1 \tag{2.13}$$
$$\frac{x_i}{u_i}\beta_2 = \frac{x_i}{u_i}\,\frac{z_u L_2}{x_i} = \alpha_0 L_2 \qquad \text{и т. д.}$$

то выражение для t_{i+1} может быть непосредственно представлено и в таком виде

$$t_{i+1} = t_i + \alpha_0 (L_0 T_0 + L_1 T_1 + L_2 T_2 + \ldots) \tag{2.14}$$

Переходим к выводу параметра p. Согласно четвертому уравнению системы (2.2) имеем

$$dp = \frac{gL\,du}{u^2} = -\frac{g\,dx}{u^2} = -\frac{gx_i(\beta_0 + \beta_1\varphi + \beta_2\varphi^2 + \cdots)}{(u_i - z_u\varphi)^2}\,d\varphi =$$

$$= -\frac{gx_i}{u_i^2}\,\frac{\beta_0 + \beta_1\varphi + \beta_2\varphi^2 + \cdots}{(1-\alpha_0\varphi)^2}\,d\varphi \tag{2.15}$$

Отсюда после интегрирования имеем

$$p = p_i - \frac{gx_i}{u_i^2}\,[\beta_0 P_0(\varphi) + \beta_1 P_1(\varphi) + \beta_2 P_2(\varphi) + \cdots] \tag{2.16}$$

Здесь

$$P_0(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1-\alpha_0\varphi)^2} = \sum_0^\infty \alpha_0^n \varphi^{n+1}$$

$$P_1(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{\varphi\,d\varphi}{(1-\alpha_0\varphi)^2} = \sum_0^\infty \frac{n+1}{n+2}\,\alpha_0^n \varphi^{n+2} \tag{2.17}$$

$$P_2(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{\varphi^2\,d\varphi}{(1-\alpha_0\varphi)^2} = \sum_0^\infty \frac{n+1}{n+3}\,\alpha_0^n \varphi^{n+3} \qquad \text{и т. д.}$$

Полагая $\varphi = 1$, имеем

$$p_{i+1} = p_i - \frac{gx_i}{u_i^2}\,(\beta_0 P_0 + \beta_1 P_1 + \beta_2 P_2 + \cdots)\,. \tag{2.18}$$

Здесь

$$P_0 = \sum_0^\infty \alpha_0^n, \quad P_1 = \sum_0^\infty \frac{n+1}{n+2}\,\alpha_0^n, \quad P_2 = \sum_0^\infty \frac{n+1}{n+3}\,\alpha_0^n, \ldots \tag{2.19}$$

Используя (2.13), равенство (2.18) можно представить и в такой форме

$$p_{i+1} = p_i - \alpha_0\,\frac{g}{u_i}\,(L_0 P_0 + L_1 P_1 + L_2 P_2 + \cdots) \tag{2.20}$$

Чтобы вывести координату y, обратимся к третьему из уравнений (2.2). Имеем

$$dy = -pL\,du = p\,dx =$$

$$= \left\{p_i - \frac{gx_i}{u_i^2}\,[\beta_0 P_0(\varphi) + \beta_1 P_1(\varphi) + \beta_2 P_2(\varphi) + \cdots]\right\} dx = \tag{2.21}$$

$$= p_i dx - \frac{gx_i^2}{u_i^2}\,[\beta_0 P_0(\varphi) + \beta_1 P_1(\varphi) + \beta_2 P_2(\varphi) + \cdots](\beta_0 + \beta_1\varphi + \beta_2\varphi^2 + \cdots)\,d\varphi$$

Выполним умножение, сохранив лишь первые степени β_1, β_2 и т. д. Тогда получим

$$dy = p_i dx - \frac{gx_i^2}{u_i^2}[\beta_0^2 P_0(\varphi) + \beta_0\beta_1 P_1(\varphi) + \beta_0\beta_2 P_2(\varphi) + \cdots$$

$$\cdots + \beta_0\beta_1\varphi P_0(\varphi) + \beta_0\beta_2\varphi^2 P_0(\varphi) + \cdots]\,d\varphi =$$

$$= p_i dx - \beta_0\frac{gx_i^2}{u_i^2}\,\{\beta_0 P_0(\varphi) + \beta_1[\varphi P_0(\varphi) + P_1(\varphi)] + \beta_2[\varphi^2 P_0(\varphi) + P_2(\varphi)] + \cdots\}\,d\varphi \tag{2.22}$$

Положим

$$Y_0(\varphi)=\int_0^{\varphi} P_0(\varphi)\,d\varphi=\sum_0^{\infty}\frac{\alpha_0{}^n\,\varphi^{n+2}}{n+2} \tag{2.23}$$

$$Y_1(\varphi)=\int_0^{\varphi}[\varphi P_0(\varphi)+P_1(\varphi)]\,d\varphi=$$

$$=\sum_0^{\infty}\frac{\alpha_0{}^n\,\varphi^{n+3}}{n+3}+\sum_0^{\infty}\frac{(n+1)\,\alpha_0{}^n\,\varphi^{n+3}}{(n+2)(n+3)}=\sum_0^{\infty}\frac{2n+3}{(n+2)(n+3)}\,\alpha_0{}^n\varphi^{n+3}$$

$$Y_2(\varphi)=\int_0^{\varphi}[\varphi^2P_0(\varphi)+P_2(\varphi)]\,d\varphi=$$

$$=\sum_0^{\infty}\frac{\alpha_0{}^n\,\varphi^{n+4}}{n+4}+\sum_0^{\infty}\frac{(n+1)\,\alpha_0{}^n\,\varphi^{n+4}}{(n+3)(n+4)}=\sum_0^{\infty}\frac{2n+4}{(n+3)(n+4)}\,\alpha_0{}^n\varphi^{n+4}$$

и т. д.

и проинтегрируем предыдущее равенство. Тогда для y будем иметь

$$y=y_i+p_i\,(x-x_i)-\frac{gx_i^2}{u_i^2}\,\beta_0\,[\beta_0Y_0(\varphi)+\beta_1Y_1(\varphi)+\beta_2Y_2(\varphi)+\cdots] \tag{2.24}$$

При $\varphi=1$ имеем

$$y_{i+1}=y_i+p_i\,(x_{i+1}-x_i)-\beta_0\,\frac{gx_i^2}{u_i^2}\,(\beta_0Y_0+\beta_1Y_1+\beta_2Y_2+\cdots) \tag{2.25}$$

Здесь

$$Y_0=\sum_0^{\infty}\frac{\alpha_0{}^n}{n+2},\qquad Y_1=\sum_0^{\infty}\frac{2n+3}{(n+2)(n+3)}\,\alpha_0{}^n,\qquad Y_2=\sum_0^{\infty}\frac{2n+4}{(n+3)(n+4)}\,\alpha_0{}^n,\ \ldots$$

Опираясь на соотношения (2.13), параллельно (2.25) выводим

$$y_{i+1}=y_i+p_i(x_{i+1}-x_i)-\alpha_0{}^2gL_0\,(L_0Y_0+L_1Y_1+L_2Y_2+\cdots) \tag{2.26}$$

Полагая $\varphi=1$, в равенстве (2.4) можно дать аналогичное выражение и для определения абсциссы x:

$$x_{i+1}=x_i+z_u\left(L_0+\frac{1}{2}L_1+\frac{1}{3}L_2+\cdots\right) \tag{2.27}$$

Формулы (2.26) и (2.27) представляются весьма удобными для разыскания числовых значений всех искомых параметров. Здесь, как и в случае интегрирования по переменному p, вспомогательные функции T, P и Y должны быть заключены в числовые таблицы, расположенные по аргументу α_0.

Выражения для L_0, L_1, L_2, . . . получаются аналогичными (1.24). Имеем

$$L_0=L_i,\qquad L_1=\frac{3}{2}L_i-2L_{i-1}+\frac{1}{2}L_{i-2},\qquad L_2=\frac{1}{2}L_i-L_{i-1}+\frac{1}{2}L_{i-2},\ \ldots$$

где $L_i=1\,/\,k_i$ есть численное значение функции L в точке i. (2.28)

Значения k_i при известных v_i и y_i могут быть взяты непосредственно из наличных числовых таблиц сопротивления воздуха.

Таким образом, при употреблении метода С. А. Казакова вычисление точек траектории снаряда сводится к чисто механическим выкладкам. Из двух форм решения, рассмотренных выше, наиболее удобной для ведения вычислительной работы является вторая, полученная путем интегрирования основной системы дифференциальных уравнений движения центра тяжести снаряда по переменному u.

§ 3. Рассмотрим вопрос об оценке погрешности, которая получается, когда за независимое переменное принимается тот или иной из возможных параметров; С. А. Казаков в качестве параметров использовал абсциссу x и время t; выше его метод изложен в применении к аргументам: p — тангенсу угла наклона касательной к оси абсцисс и u — горизонтальной компоненте скорости. Укажем вид основной системы, которая получается в каждом из перечисленных случаев:

аргумент x

$$\frac{du}{dx} = -k, \qquad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{u}, \qquad \frac{dp}{dx} = -\frac{g}{u^2}, \qquad \frac{dy}{dx} = p \tag{3.1}$$

аргумент t

$$\frac{du}{dt} = -ku, \qquad \frac{dx}{dt} = u, \qquad \frac{dp}{dt} = -\frac{g}{u}, \qquad \frac{dy}{dt} = pu \tag{3.2}$$

аргумент p

$$\frac{du}{dp} = \frac{ku^2}{g}, \qquad \frac{dt}{dp} = -\frac{u}{g}, \qquad \frac{dx}{dp} = -\frac{u^2}{g}, \qquad \frac{dy}{dp} = -\frac{pu^2}{g} \tag{3.3}$$

аргумент u

$$\frac{dx}{du} = -\frac{1}{k}, \qquad \frac{dt}{du} = -\frac{1}{ku}, \qquad \frac{dy}{du} = -\frac{p}{k}, \qquad \frac{dp}{du} = \frac{g}{ku^2} \tag{3.4}$$

Для решения системы (3.1) надлежит представить k в виде

$$k = k_0 + k_1\varphi + k_2\varphi^2 + \cdots \qquad \left(\varphi = \frac{x - x_i}{z_x}\right) \tag{3.5}$$

где z_x — произвольно выбранный постоянный интервал.

При интегрировании ряда, представляющего k, допущенная ошибка определяется остаточным членом формулы Ньютона [2]

$$E_i^{i+1} = \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} R_n(x)\,dx = z_x \int\limits_0^1 \frac{z_x^{\,n+1} f^{n+2}(\xi)}{(n+1)!}\,\varphi(\varphi+1)(\varphi+2)\cdots(\varphi+n)\,d\varphi \tag{3.6}$$

где ξ — некоторое промежуточное значение аргумента интегрируемой функции, в данном случае u, содержащееся в промежутке $i - i+1$.

При интегрировании первого из уравнений системы (3.1) в левой части получается $u_{i+1} - u_i$; поэтому величину абсолютной погрешности обозначим через $\Delta\,(u_{i+1} - u_i)$. Вынося в (3.6) множитель $f^{n+2}(\xi)$ за знак интеграла, имеем

$$E_i^{i+1} = \Delta\,(u_{i+1} - u_i) = z_x^{\,n+2} f^{n+2}(\xi) \int\limits_0^1 \frac{\varphi(\varphi+1)(\varphi+2)\ldots}{(n+1)!}\,d\varphi \tag{3.7}$$

Ограничиваясь разностями не выше второго порядка, полагаем $n = 2$. Тогда

$$\int\limits_0^1 \frac{\varphi(\varphi+1)(\varphi+2)}{1\cdot 2\cdot 3}\,d\varphi = \frac{1}{6}\int\limits_0^1 (\varphi^3 + 3\varphi^2 + 2\varphi)\,d\varphi = \frac{1}{6}\left|\frac{\varphi^4}{4} + \varphi^3 + \varphi^2\right|_0^1 = \frac{3}{8}$$

Следовательно,

$$E_i^{i+1} = \frac{3}{8}\, z_x^4 f^{\mathrm{IV}}(\xi) \tag{3.8}$$

Таким образом, задача сводится к разысканию четвертой производной от интегрируемой функции. В общем виде задача эта представляется настолько сложной, что для ее решения мы вынуждены сделать ряд допущений.

1. Полагаем, что функция k силы сопротивления воздуха представляется в виде $k = cbv$, где c — баллистический коэффициент и b — некоторый численный

коэффициент, выбираемый из таблиц сопротивления воздуха. Допущение это реально, так как $H(y) \approx 1$ при незначительных y, а ускорение, вызываемое силой сопротивления воздуха, пропорционально квадрату скорости и равно cbv^2, так что

$$k = \frac{j}{v} = \frac{cbv^2}{v} = cbv$$

2. Для артиллерийских снарядов v всегда велико, почему скорость изменяется значительно быстрее кривизны траектории, так что с достаточной для приблизительной оценки погрешности точностью можно полагать, что θ — угол наклона касательной к траектории — остается постоянным в интервале $i - i+1$, сохраняя некоторое среднее значение $\theta_{\text{ср}} = \theta_{i+\frac{1}{2}}$.

При этих допущениях

$$\frac{du}{dx} = u_x' = -cbv = -\frac{cbu}{\cos\theta_{\text{ср}}}, \qquad u_x'' = -\frac{cb}{\cos\theta_{\text{ср}}}u' = \frac{c^2b^2}{\cos^2\theta_{\text{ср}}}u$$

$$u_x''' = \frac{c^2b^2}{\cos^2\theta_{\text{ср}}}u' = -\frac{c^3b^3}{\cos^3\theta_{\text{ср}}}u, \qquad u^{\text{IV}} = -\frac{c^3b^3}{\cos^3\theta_{\text{ср}}}u' = \frac{c^4b^4}{\cos^4\theta_{\text{ср}}}u$$

Подставив это выражение четвертой производной в (3.8), найдем

$$\Delta(u_{i+1} - u_i) = \frac{3}{8}\frac{z_x{}^4c^4b^4u_{\text{ср}}}{\cos^4\theta_{\text{ср}}}$$

Относительная ошибка в определении разности $u_{i+1} - u_i$ будет

$$e_i{}^{i+1} = \frac{\Delta(u_{i+1} - u_i)}{u_{i+1} - u_i}$$

Так как точное значение указанной разности неизвестно, то заменим его приближенным значением, которое найдем из выражения

$$u_{i+1} - u_i = -\int_{x_i}^{x_{i+1}} u'dx = -\int_{x_i}^{x_{i+1}} cb\frac{u}{\cos\theta}dx$$

Применяя теорему о среднем, имеем

$$(u_{i+1} - u_i)_{\text{пр}} = -cb\frac{u_{\text{ср}}{}^*}{[\cos\theta_{\text{ср}}]^*}\int_{x_i}^{x_{i+1}} dx = -cb\frac{u_{\text{ср}}{}^*}{[\cos\theta_{\text{ср}}]^*}z_x$$

Полагая без заметной погрешности, что $u_{\text{ср}} = u_{\text{ср}}{}^*$ и $\cos\theta_{\text{ср}} = [\cos\theta_{\text{ср}}]^*$, получим

$$e_i{}^{i+1} \approx \frac{\Delta(u_{i+1} - u_i)}{(u_{i+1} - u_i)_{\text{пр}}} \approx \frac{3}{8}\frac{z_x{}^4c^4b^4u_{\text{ср}}}{\cos^4\theta_{\text{ср}}} : \frac{-cbu_{\text{ср}}{}^*z_x}{[\cos\theta_{\text{ср}}]^*} \approx -\frac{3}{8}\frac{z_x{}^3c^3b^3}{\cos^3\theta_{\text{ср}}}.$$

Допуская, что u_i определено точно, т. е. $\Delta u_i = 0$, и обозначая относительную ошибку в определении u_{i+1} через $e_{i+1}u = \Delta u_{i+1} / (u_{i+1})_{\text{пр}}$, выводим

$$e_i{}^{i+1} = \frac{\Delta u_{i+1} - \Delta u_i}{u_{i+1}\left(1 - \frac{u_i}{u_{i+1}}\right)_{\text{пр}}} = -\frac{\Delta u_{i+1}}{(u_{i+1})_{\text{пр}}}\frac{1}{\left(\frac{u_i}{u_{i+1}} - 1\right)_{\text{пр}}} = -\frac{e_{i+1}u}{\left(\frac{u_i}{u_{i+1}} - 1\right)_{\text{пр}}}$$

Отсюда

$$e_{i+1}{}^u = -e_i{}^{i+1}\left(\frac{u_i}{u_{i+1}} - 1\right) \tag{3.9}$$

причем мы отбрасываем здесь индекс (пр), полагая, что выражение, стоящее в скобках, определено точно.

Таким образом, окончательно имеем

$$e_{i+1}^{u} \approx \frac{3}{8}\,\frac{z_x^{3}c^{3}b^{3}}{\cos^{3}\theta_{\text{ср}}}\left(\frac{u_i}{u_{i+1}}-1\right) \tag{3.10}$$

Анализируя это выражение, замечаем, что относительная ошибка в определении u на участке $i - i+1$ есть некоторая функция угла θ и не остается постоянной на всей дальности полета. Так как в конечном счете представляет интерес относительная ошибка в определении $u_n = u$ (горизонтальная скорость в точке падения), то предположим, что это будет некоторая средняя ошибка во всем промежутке от начала O до точки падения (индекс n). Тогда

$$e_n^{u} \approx \frac{3}{8}\,\frac{z_x^{3}c^{3}b^{3}}{\cos^{3}\theta_{\text{ср}}'}\left(\frac{u_0}{u_n}-1\right)$$

где $\theta_{\text{ср}}'$ — среднее значение угла θ на интервале движения.

Зная три значения $\theta=\theta_0$, $\theta=0$, $\theta=\theta_n$, наиболее естественным представляется определить $\theta_{\text{ср}}'$ как $(\theta_0+\theta_n)/3$. Окончательно имеем

$$e_n^{u} = \frac{3}{8}\,\frac{z_x^{3}c^{3}b^{3}}{\cos^{3}\frac{1}{3}(\theta_0+\theta_n)}\left(\frac{u_0}{u_n}-1\right) \tag{3.11}$$

Задаваясь величиной относительной ошибки e_n^{u}, можно из выражения (3.11) определить нужную величину интервала z_x. Однако более важным для практики является определение количества подинтервалов, на которые нужно подразделить весь интервал движения, чтобы удовлетворить заданной точности или, иначе, определить число n точек траектории, подлежащих вычислению.

Это число определим, имея в виду, что полная дальность полета $X = nz_x$.

Подставляя $z_x = X/n$ в (3.11), получим

$$e_n^{u} = \frac{3}{8}\,\frac{x^{3}c^{3}b^{3}}{n^{3}\cos^{3}\frac{1}{3}(\theta_0+\theta_n)}\left(\frac{u_0}{u_n}-1\right) \tag{3.12}$$

Отсюда

$$n = \frac{cbx}{\cos\frac{1}{3}(\theta_0+\theta_n)}\sqrt[3]{\frac{3}{8}\,\frac{1}{e_n^{u}}\left(\frac{u_0}{u_n}-1\right)} \tag{3.13}$$

Опираясь на сделанные выше допущения и рассуждая совершенно аналогичным образом, можно получить выражения для e и n при интегрировании по любому переменному. Не приводя здесь выкладок, укажем, что при помощи формулы (3.6) непосредственно определяются абсолютные ошибки следующих выражений соответственно для систем (3.2) и (3.3):

$$\Delta\int\limits_{u_i}^{u_{i+1}}\frac{du}{u} = \Delta(\ln u_{i+1} - \ln u_i), \qquad \Delta\int\limits_{u_i}^{u_{i+1}}\frac{g\,du}{u^2} = g\Delta\left(\frac{1}{u_{i+1}}-\frac{1}{u_i}\right)$$

В дальнейшем замечаем, что

$$\Delta(\ln u_{i+1} - \ln u_i) = \frac{\Delta u_{i+1}}{u_{i+1}} - \frac{\Delta u_i}{u_i} \approx \frac{\Delta(u_{i+1}-u_i)}{u_{i+\frac{1}{2}}}$$

$$g\Delta\left(\frac{1}{u_{i+1}}-\frac{1}{u_i}\right) = g\left(\frac{\Delta u_{i+1}}{u_{i+1}^{2}}-\frac{\Delta u_i}{u_i^{2}}\right) \approx g\,\frac{\Delta(u_{i+1}-u_i)}{u_{i+\frac{1}{2}}^{2}}$$

т. е. в конечном счете будут определены абсолютные погрешности разности $u_{i+1}-u_i$, после чего, зная выражения для соответствующих четвертых производных и приблизительные значения указанных разностей, можно получить и величины относительных ошибок этих разностей.

Система (3.4) заменой $1/k = L$ приводится к системе, совершенно аналогичной (3.1), и вывод относительной погрешности для этой системы будет аналогичным выводу для системы (3.1) с той разницей, что в этом случае мы будем определять ошибку не в скорости u, а в горизонтальной дальности X.

Окончательные выражения для относительных ошибок e_n и числа подлежащих вычислению точек n будут:

а) при интегрировании по переменному t

$$e_n^u \approx \frac{9}{4} z_t^3 c^3 b^3 \left(\frac{v_0 + v_n}{2}\right)^3 \left(\frac{u_0}{u_n} - 1\right), \quad n = cb \frac{v_0 + v_n}{2} T \sqrt[3]{\frac{9}{4} \frac{1}{e_n^u} \left(\frac{u_0}{u_n} - 1\right)} \tag{3.14}$$

б) при интегрировании по переменному u

$$e_n^x \approx \frac{9}{4} \frac{z_n^n}{[(u_0 + u_n)/2]^3}, \qquad n = 2 \frac{u_0 - u_n}{u_0 + u_n} \sqrt[3]{\frac{9}{4} \frac{1}{e_n^x}} \tag{3.15}$$

здесь множитель $x_0 / x_n - 1$, подобный встречавшемуся ранее $u_0 / u_n - 1$, отсутствует, так как $x_0 = 0$;

с) при интегрировании по переменному p

$$e_n^u \approx \frac{45}{8g} \frac{z_p^3 c^3 b^3 u^3 v^3}{g^3} \left(\frac{u_0}{u_n} - 1\right)$$

$$n = \frac{cb}{g} \frac{u_0 + u_n}{2} \frac{v_0 + v_n}{2} (p_0 + p_n) \sqrt[3]{\frac{45}{8g} \frac{1}{e_n^u} \left(\frac{u_0}{u_n} - 1\right)} \tag{3.16}$$

§ 4. Анализируя выражения (3.12) — (3.16), замечаем, что относительные ошибки и числа вычисляемых точек представляются функциями различных параметров. Следовательно, при выборе независимого переменного интегрирования предварительно следует установить, какое из выражений (3.12) — (3.16) дает наименьшее значение для интересующих величин e или n. При этом, если значения параметров для n-й точки оказываются неизвестными, то ими можно задаваться, опираясь на решения, аналогичные поставленной задаче. Так, например, по начальной скорости, углу бросания и калибру снаряда всегда можно приблизительно судить о дальности полета, времени полета, окончательной скорости и угле падения.

В качестве общих заключений следует заметить, что в случаях (3.12), (3.14) и (3.16) относительная ошибка e и число подинтервалов n прямо пропорциональны величине баллистического коэффициента c, который, как известно, уменьшается с возрастанием калибра. Поэтому для малокалиберного оружия выгодно вести интегрирование по переменному u — горизонтальной компоненте скорости, так как выражение (3.15) показывает, что относительная ошибка при этом от баллистического коэффициента не зависит.

Интегрирование по переменному p с успехом может вестись при настильных (отлогих) траекториях, так как в этом случае значения величин p_0 и p_n оказываются весьма малыми [формулы (3.16)]. Это же обстоятельство будет иметь место и в том случае, когда скорости v и u незначительны, так как в формулах (3.16) эти величины фигурируют в виде произведения.

Отметим, наконец, что выражения, аналогичные (3.12) — (3.16), могут быть получены и в том случае, когда при определении численного значения коэффициентов k_0, k_1, k_2 и т. д. мы будем ограничиваться не вторыми, а высшими разностями. Естественно, что в этом случае точность вычисления может быть значительно повышена, а количество точек, подлежащих вычислению, сокращено. Однако это поведет к существенному изменению исходных формул и значительному усложнению техники вычислений, что совершенно нецелесообразно. Важнейшим преимуществом анализируемого нами метода С. А. Казакова по сравнению с другими, известными ранее, является именно то обстоятельство, что при пользовании им все параметры x, u, t, p и т. д. представляются в виде законченных формул, а техника вычисления становится очень простой.

§ 5. В заключение на двух конкретных примерах рассмотрим, как пользоваться выражениями (3.12) — (3.16) для выявления независимого переменного, по которому надлежит вести интегрирование основной системы.

Пример 1. Рассмотрим случай стрельбы из пушки с начальной скоростью $v_0 = 680$ м/сек. Из таблиц имеем

$$c = 0{,}9, \quad b = 2.06\times 10^{-4}, \quad cb = 1.86\times 10^{-4}, \quad v_0 = 680 \text{ м/сек}$$

$$v_n = 282 \text{ м/сек}, \quad \theta_0 = 35°36', \quad \theta_n = 51°17', \quad x = 12800 \text{ м}$$

$$p_0 = 0.716, \quad p_n = 1.247, \quad \cos\theta_0 = 0.813, \quad \cos\theta_n = 0.625$$

$$T = 48.9 \text{ сек}, \quad u_0 = 553 \text{ м/сек}, \quad u_n = 176 \text{ м/сек}.$$

Будем считать, что относительная ошибка не должна превосходить 0,5%, т. е. равна 0.005, или $1/e = 200$.

Пользуясь соответствующими формулами (3.12) — (3.16), находим число точек:

а) независимое переменное x

$$n = \frac{1.86\times 12\,800}{10^4\cos 28°58'}\sqrt[3]{\frac{3}{8}\,200\left(\frac{553}{176}-1\right)} = 14.8 \approx 15 \text{ точек}$$

б) независимое переменное t

$$n = \frac{1.86\times 48.9}{10^4}\;\frac{680+282}{2}\sqrt[3]{\frac{9}{4}\,200\left(\frac{553}{176}-1\right)} = 43.2 \approx 43 \text{ точки}$$

в) независимое переменное u

$$n = 2\,\frac{553-176}{553+176}\sqrt[3]{\frac{9}{4}\times 200} = 7.92 \approx 8 \text{ точек}$$

г) независимое переменное p

$$n = \frac{1.86}{9.81}\;\frac{680+282}{2}\;\frac{553+176}{2}\;\frac{0.716+1.247}{10^4}\sqrt[3]{\frac{45}{8\times 9.81}\,200\left(\frac{553}{176}-1\right)} \approx 41 \text{ точка}$$

Наименьшее число точек получается при интегрировании основной системы по переменному u, которое в этом случае и надлежит выбрать в качестве независимого переменного.

Пример 2. В качестве второго примера рассмотрим стрельбу из той же системы с начальной скоростью $v_0 = 474$ м/сек. В таблицах находим

$$c = 0.9, \quad b = 2.06\times 10^{-4}, \quad cb = 1.86\times 10^{-4}, \quad v_0 = 474 \text{ м/сек}$$

$$v_n = 213 \text{ м/сек}, \quad \theta_0 = 34°12', \quad \theta_n = 48°39', \quad x = 7500 \text{ м}$$

$$p_0 = 0.680, \quad p_n = 1.136, \quad T = 36.2 \text{ сек.}, \quad \cos\theta_0 = 0.827$$

$$\cos\theta_n = 0.660, \quad u_0 = 392, \quad u_n = 141.$$

Попрежнему принимаем $e = 0.005$, или $1/e = 200$. При этих данных формулы (3.12) — (3.16) дают:

а) независимое переменное t

$$n = \frac{1.86\times 36.2}{10^4}\;\frac{474+213}{2}\sqrt[3]{\frac{9}{4}\,200\left(\frac{392}{141}-1\right)} = 21.4 \approx 21 \text{ точка}$$

б) независимое переменное u

$$n = 2\,\frac{392-141}{392+141}\,7.65 = 7.2 \approx 7 \text{ точек}$$

в) независимое переменное p

$$n = \frac{1.86}{10^4\times 9.81}\;\frac{474+213}{3}\;\frac{392+141}{2}\,1.816\sqrt[3]{\frac{45\times 200}{8\times 9.81}\left(\frac{392}{141}-1\right)} = 18.5 \approx 19 \text{ точек}$$

г) независимое переменное x

$$n = \frac{1.86 \times 7500}{10^4 \cos 27°38'} \sqrt[3]{\frac{3}{8} 200 \left(\frac{392}{141} - 1\right)} = 8.05 \approx 8 \text{ точек}$$

И этот пример, как предыдущий, показывает, что наименьшее количество подинтервалов получается, если в качестве независимого переменного выбрать горизонтальную компоненту скорости u. Следует заметить, что в этом случае не только сокращается количество вычислений, но и упрощается их техника.

Из обоих примеров явствует, что переменные x, u и t, p дают попарно точность одного порядка, причем для составления таблиц наземной стрельбы следует пользоваться как аргументами параметрами x или u. Напротив, при составлении таблиц зенитной стрельбы переменные t или p будут давать результаты, значительно более точные, чем x или u. Это объясняется тем, что коэффициенты α_i и β_i (вспомогательные параметры интегрирования) обратно пропорциональны x и u, которые в случае зенитной стрельбы малы и, следовательно, α_i и β_i могут стать столь значительными, что сделают метод С. А. Казакова совершенно неприемлемым. При интегрировании же по переменным t или p коэффициенты α_i в первом случае совершенно не зависят от u, а во втором — прямо ему пропорциональны, так что чем меньше u, тем меньше α_i и с тем бо́льшим успехом будет применяться анализируемый метод. Но при стрельбе совершенно отвесной, когда x и u обращаются в нуль, а p — в бесконечность, вычисление точек траектории можно вести только по переменному t. В других случаях зенитной стрельбы, ориентируясь на результаты рассмотренных выше примеров, можно предполагать, что интегрирование по переменному p дает более точные результаты.

В заключение заметим, что вычисление более точных значений относительных ошибок, связанное с выводом точного значения четвертой производной, подтвердило полную реальность принятых выше допущений для всех случаев, когда скорость v значительна и имеет место неравенство

$$\frac{g}{j} = \frac{g}{cbv^2} \leqslant 1$$

Так, например, для того чтобы получить точное значение $e_{i+1}u$ при аргументе x, надо правую часть равенства (3.10) помножить на некоторый коэффициент ψ_x, который дается следующим выражением:

$$\psi_x = [1 + 2\gamma \sin\theta + (3\sin^2\theta - 2)\gamma^2 - 3\gamma^3 \sin\theta \cos^2\theta] \qquad \left(\gamma = \frac{g}{j} = \frac{g}{cbv^2}\right)$$

Вычислим среднее значение ψ_x по данным примера 2. Имеем $v_{\text{ср}} = 392$ м/сек, $\theta_{\text{ср}} = 27°37'$ (опираемся на среднее абсолютное значение θ, так как фактически угол падения отрицателен), $cb = 1.86 \times 10^{-4}$. Находим

$$\gamma_{\text{ср}} = \frac{9.81 \times 10^4}{1.86 \times 392^2} = 0.344, \quad \sin\theta_{\text{ср}} = 0.464, \ \cos\theta_{\text{ср}} \doteq 0.886$$

$$(\psi_x)_{\text{ср}} = 1 + 2 \times 0.344 \times 0.464 + (3 \times 0.464^2 - 2)\, 0.344^2 - 3 \times 0.344^2 \times 0.464 \times 0.886 = 1.11$$

При вычислении n величина $(\psi_x)_{\text{ср}}$ находится в правой части равенства (3.13) под знаком кубического корня и увеличится в 1.035 раза, т. е. практически не изменится. Аналогичные выводы имеют место и в других случаях, что позволяет с полным основанием принять формулы (3.12) — (3.16) для предварительной оценки погрешности и выбора независимого переменного интегрирования.

Поступила 20 X 1948

Бежицкий институт
транспортного машиностроения

ЛИТЕРАТУРА

1. Казаков С. А. Вычисление траекторий центров тяжести артиллерийских снарядов. ПММ. 1945. Т. IX. Вып. 2. Стр. 129—138.
2. Скарборо Дж. Численные методы математического анализа. Гостехиздат. 1934. Стр. 264.