Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XV, 1951

ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ СИНГУЛЯРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Д. И. Шерман

(Москва)

§ 1. В статье [1] указан новый прием преобразования сингулярного уравнения

$$A(t_0)\,\omega(t) + \frac{B(t_0)}{\pi i}\int\limits_L \frac{\omega(t)}{t-t_0}\,dt + \int\limits_L \omega(t)\,G(t, t_0)\,dt = f(t_0) \tag{1.1}$$

в интегральное уравнение Фредгольма. Здесь L — замкнутый достаточно гладкий контур, ограничивающий конечную односвязную область S; его обход происходит в направлении, противоположном вращению часовой стрелки; t и t_0 — аффиксы точек L; функции $A(t_0)$, $B(t_0)$, $G(t, t_0)$ и $f(t_0)$ заданы на L и удовлетворяют условию Гельдера.

Преобразование уравнения (1.1) в уравнение Фредгольма при помощи предложенного приема оказалось возможным также в тех случаях, когда либо функция $\Delta_1(t) = A(t) - B(t)$, либо $\Delta_2(t) = A(t) + B(t)$ обращаются в нуль в некоторых точках контура L; при этом предполагалось, что функции $A(t_0)$, $B(t_0)$, $G(t, t_0)$ и $f(t_0)$ являются аналитическими от аргумента t_0 в этих точках. Аналогичный же результат был получен для системы сингулярных уравнений [2].

В настоящей статье, ограничиваясь для краткости рассмотрением одного уравнения (1.1), мы покажем, что, несколько видоизменяя рассуждения, можно провести в указанных случаях его регуляризацию при более общих предположениях относительно заданных функций.

Из двух возможных случаев рассмотрим сначала тот, когда $\Delta_1(t)$ обращается в нуль в некоторых точках контура L, а $\Delta_2(t)$ всюду на L отлична от нуля. Для того чтобы избежать не вызываемой существом дела излишней громоздкости в формулах и несколько упростить выкладки, примем, что $\Delta_1(t)$ имеет на L лишь один корень $t = \alpha$ кратности m. При этом допустим, что заданные функции во всех точках контура L удовлетворяют условию Гельдера и, кроме того, имеют в окрестности $t_0 = \alpha$ на L производные по аргументу t_0 до порядка m включительно, также удовлетворяющие условию Гельдера. Далее относительно искомой функции $\omega(t)$ предположим, что она непрерывна на L, исключая, возможно, точки $t = \alpha$, в которой она может иметь особенности вида $(t-\alpha)^{-\lambda}$, где λ — некоторое, вообще говоря, комплексное число, причем $0 < \operatorname{Re}\lambda < 1$.

Наконец, будем считать, что $B(t)$ везде на L отлична от нуля. Это ограничение несущественно и легко может быть устранено.

Обозначим через S^* бесконечную односвязную область, внешнюю к S, и для удобства за начало координат возьмем некоторую точку, принадлежащую S.

Пусть $\omega(t)$ — некоторое, обладающее упомянутыми свойствами решение уравнения (1.1). Введя на L новую вспомогательную функцию $\varphi(t)$ согласно равенству

$$\varphi(t) = \frac{1}{B(t)}\left\{\Delta_2(t)\,\omega(t) + \int\limits_L \omega(t_1)\,G(t_1, t)\,dt_1 - f(t)\right\} \tag{1.2}$$

представим уравнение (1.1) в форме

$$\varphi(t_0) + \lim_{z\to t_0}\frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{\omega(t)}{t-z}\,dt = 0 \tag{1.3}$$

где z стремится к точке t_0 кривой L изнутри бесконечной области S^*. Отсюда ясно, что $\varphi(t)$ аналитически продолжима в область S^*, регулярна в ней и обращается в нуль на бесконечности.

Подставим в интеграл (1.3) вместо плотности $\omega(t)$ ее выражение из предшествующего равенства через $\varphi(t)$ и остальные функции, одна из которых известная, а другая содержит $\omega(t)$ под знаком интеграла. Тогда, используя свойства интегралов Коши и проделав элементарные преобразования, придем к уравнению

$$\frac{\Delta_1(t_0)}{\Delta_2(t_0)}\varphi(t_0)+\int\limits_L\{\varphi(t)R(t,t_0)+\omega(t)K(t,t_0)\}\,dt=F(t_0) \tag{1.4}$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} K(t,t_0)&=-\frac{1}{\pi i}\int\limits_L\left\{\frac{G(t,t_1)}{\Delta_2(t_1)}-\frac{G(t,t_0)}{\Delta_2(t_0)}\right\}\frac{dt_1}{t_1-t_0}\\ R(t,t_0)&=\frac{1}{\pi i}\left\{\frac{B(t)}{\Delta_2(t)}-\frac{B(t_0)}{\Delta_2(t_0)}\right\}\frac{1}{t-t_0}\\ F(t_0)&=-\frac{1}{\pi i}\int\limits_L\left\{\frac{f(t)}{\Delta_2(t)}-\frac{f(t_0)}{\Delta_2(t_0)}\right\}\frac{dt}{t-t_0}\end{aligned} \tag{1.5}$$

Очевидно, функции $K(t, t_0)$, $R(t, t_0)$ и $F(t_0)$ имеют в окрестности $t_0=\alpha$ производные до порядка $m-1$ включительно по аргументу t_0, удовлетворяющие условию Гельдера. Заменив снова содержащуюся в левой части (1.4) явно и под знаком одного из интегралов функцию $\varphi(t)$ через $\omega(t)$ согласно тому же равенству (1.2), после несложных вычислений получим

$$\omega(t_0)+\int\limits_L\omega(t)P(t,t_0)\,dt=Q(t_0) \tag{1.6}$$

Здесь ядро и свободный член имеют следующие значения:

$$P(t,t_0)=\frac{G(t,t_0)}{\Delta_2(t_0)}+B(t_0)\frac{W(t,t_0)}{\Delta_1(t_0)},\qquad Q(t_0)=\frac{f(t_0)}{\Delta_2(t_0)}+B(t_0)\frac{V(t_0)}{\Delta_1(t_0)} \tag{1.7}$$

причем положено

$$\begin{aligned} W(t,t_0)&=K(t,t_0)+\frac{\Delta_2(t)}{B(t)}R(t,t_0)+\int\limits_L\frac{G(t,t_1)}{B(t_1)}R(t_1,t_0)\,dt_1\\ V(t_0)&=F(t_0)+\int\limits_L\frac{f(t)}{B(t)}R(t,t_0)\,dt\end{aligned} \tag{1.8}$$

Для того чтобы плотность $\omega(t)$ была абсолютно интегрируема на L, необходимо должны соблюдаться, как ясно из последних равенств, следующие функциональные соотношения (индекс сверху, приписанный к V и W, указывает порядок производной по аргументу t_0):

$$N^{(\nu)}(\alpha)\equiv\int\limits_L\omega(t)\,W_{t_0}{}^{(\nu)}(t,\alpha)\,dt-V^{(\nu)}(\alpha)=0\qquad(\nu=0,1,\ldots,m-1) \tag{1.9}$$

Прибавив теперь к левой части уравнения (1.6) тождественно равный нулю для искомого решения оператор

$$M(t_0)=-\frac{B(t_0)}{\Delta_1(t_0)}\sum_{\nu=0}^{m-1}a_\nu(t_0-\alpha)^\nu,\qquad a_\nu=\frac{1}{\nu!}N^{(\nu)}(\alpha) \tag{1.10}$$

получим для $\omega(t)$ уравнение

$$\omega(t_0)+\int\limits_L\omega(t)P^*(t,t_0)\,dt=Q^*(t_0) \tag{1.11}$$

где, как легко видеть, ядро и свободный член соответственно равны:

$$P^*(t,\ t_0)=\frac{G(t,\ t_0)}{\Delta_2(t_0)}+\frac{B(t_0)}{\Delta_1(t_0)}\left\{W(t,\ t_0)-\sum_{\nu=0}^{m-1}\frac{1}{\nu!}W_{t_0}{}^{(\nu)}(t,\alpha)(t_0-\alpha)^\nu\right\}$$
$$Q^*(t_0)=\frac{f(t_0)}{\Delta_2(t_0)}+\frac{B(t_0)}{\Delta_1(t_0)}\left\{V(t_0)-\sum_{\nu=0}^{m-1}\frac{1}{\nu!}V^{(\nu)}(\alpha)(t_0-\alpha)^\nu\right\} \qquad (1.12)$$

Нетрудно усмотреть, что уравнение (1.11), в которое преобразовано исходное сингулярное уравнение (1.1), принадлежит уже к классу Фредгольма.

§ 2. Исследуем представляющий интерес вопрос об эквивалентности сингулярного уравнения (1.1) и уравнения Фредгольма (1.11).

При построении уравнения (1.11) было существенно использовано то обстоятельство, что функция $\varphi(t)$, определяемая формулой (1.2), где $\omega(t)$ — любое решение (1.1), аналитически продолжима и регулярна в области S^*. Ясно, что не всегда $\varphi(t)$ будет обладать этим свойством, если под $\omega(t)$ в (1.2) понимать любое решение уравнения (1.11). Покажем, что уравнения (1.1) и (1.11) эквивалентны лишь в том случае, если для любого решения (1.11) функция $\varphi(t)$ остается регулярной в S^*. Попутно выясним, при каких условиях эквивалентность уравнений (1.1) и (1.11) на самом деле имеет место.

Пусть $\omega(t)$ — какое-либо решение уравнения (1.11). Из процесса построения этого уравнения нетрудно усмотреть, что оно может быть представлено в форме

$$\frac{\Delta_1(t_0)}{\Delta_2(t_0)}\varphi(t_0)-\frac{B(t_0)}{\Delta_2(t_0)}\lim_{z\to t_0}\frac{1}{\pi i}\int\limits_L\frac{\varphi(t)}{t-z}\,dt=\chi(t_0)+\sum_{\nu=0}^{m-1}a_\nu(t_0-\alpha)^\nu \qquad (2.1)$$

где в левой части, как выше, z стремится к точке t_0 извне S и функция

$$\chi(z)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_L\frac{1}{\Delta_2(t)}\left[-B(t)\varphi(t)+\int\limits_L\omega(t_1)G(t_1,t)\,dt_1-f(t)\right]\frac{dt}{t-z} \qquad (2.2)$$

регулярна в S^* и обращается в нуль на бесконечности. В справедливости (2.1) легко убедиться, обратившись к равенству (1.4), используя свойства содержащихся в нем интегралов Коши, и затем учитывая присоединенный оператор $M(t)$.

Введем, следуя [3] Ф. Д. Гахову, функцию

$$\Omega(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\varphi(t)}{t-z}\,dt,\qquad \Omega(z)=e^{\psi(z)}\Phi(z) \qquad (2.3)$$

где $\psi(z)$ и $\Phi(z)$ — некоторые регулярные всюду функции, за исключением, вообще говоря, точек контура L; одну из них при заданной $\Omega(z)$ можно выбрать по усмотрению, наиболее удобным образом. Равенство (2.1) на L можно представить в виде

$$\frac{(t-\alpha)^m}{g(t)}e^{\psi_i(t)}\Phi_i(t)-e^{\psi_e(t)}\Phi_e(t)=\chi(t)+\sum_{\nu=0}^{m-1}a_\nu(t-\alpha)^\nu \qquad (2.4)$$

Здесь положено

$$g(t)=\frac{\Delta_2(t)}{\Delta_1(t)}(t-\alpha)^m \qquad (2.5)$$

причем индексы i и e, приписанные к $\psi(t)$ и $\Phi(t)$, как обычно, указывают, что берется предельное значение этих функций соответственно изнутри и извне S.

Функция $\ln g(t)$, вообще говоря, не является однозначной на контуре L; допустим, что ее приращение при обходе L в положительном направлении равно:

$$\ln g(t)\Big|_L=-2\pi i\varkappa \qquad (2.6)$$

где $\varkappa$ — целое положительное число или нуль. Взяв в этом случае

$$\psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\ln\{t^\varkappa g(t)\}}{t-z}\,dt \qquad (2.7)$$

будем иметь после очевидных преобразований из равенства (2.5)

$$t^{\varkappa}(t-\alpha)^m \Phi_i(t) - \Phi_e(t) = e^{-\psi_e(t)}\chi(t) + e^{-\psi_e(t)}\sum_{\nu=0}^{m-1} a_\nu (t-\alpha)^\nu \quad \text{на } L \tag{2.8}$$

Последний член в этом равенстве можно представить в виде суммы

$$e^{-\psi_e(t)}\sum_{\nu=0}^{m-1} a_\nu (t-\alpha)^\nu = \sum_{\nu=0}^{m-1}(t-\alpha)^\nu \sum_{k=\nu}^{m-1} a_k c_{k-\nu} + u(t) \tag{2.9}$$

где c_k — коэффициенты разложения функции $e^{-\psi(z)}$ в окрестности бесконечно удаленной точки при условии, что начало координат помещено в $t=\alpha$; функция $u(z)$ регулярна в S^* и обращается в нуль на бесконечности. В связи с этим равенство (2.8) запишем в форме

$$t^{\varkappa}(t-\alpha)^m \Phi_i(t) - \sum_{\nu=0}^{m-1}(t-\alpha)^\nu \sum_{k=\nu}^{m-1} a_k c_{k-\nu} = \Phi_e(t) + e^{-\psi_e(t)}\chi(t) + u(t) \tag{2.10}$$

Левая часть этого равенства аналитически продолжима в область S, правая же часть продолжима в S^* и, кроме того, обращается в нуль на бесконечности. Отсюда заключаем, что везде в S

$$\Phi(z) = -\frac{1}{z^{\varkappa}}\sum_{\nu=0}^{m-1}\frac{1}{(z-\alpha)^{m-\nu}}\sum_{k=\nu}^{m-1} a_k c_{k-\nu} \tag{2.11}$$

Так как функция $\Phi(z)$ в силу сказанного относительно поведения $\omega(t)$ в окрестности $t=\alpha$ не может иметь эту точку полюсом, то необходимо положить

$$a_\nu = N^{(\nu)}(\alpha) = 0 \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, m-1) \tag{2.12}$$

Отсюда вытекает, что $\Phi(z)$ и, следовательно, $\Omega(z)$ тождественно равны нулю в области S; последнее же, в свою очередь, позволяет сразу заключить, что $\varphi(t)$ аналитически продолжима и регулярна в S^*. При этом соотношение (2.10) на основании (2.9) принимает вид:

$$\varphi(t) = \chi(t) \tag{2.13}$$

что в силу (1.2) легко приводится к (1.1). Таким образом, установлена эквивалентность исходного уравнения (1.1) с уравнением Фредгольма (1.11).

Легко видеть, что при целом отрицательном $\varkappa$ уравнение (1.11) уже не будет эквивалентно (1.1). Не представляет труда выписать сингулярное уравнение, которому в этом случае вместо (1.1) эквивалентно уравнение (1.11). Как мы сейчас убедимся, оно будет отличаться от (1.1) лишь дополнительным слагаемым в правой части. В самом деле, пусть $\varkappa = -n$, где n — целое положительное число. Положим

$$\Phi(z) = \Phi^*(z) + \sum_{k=0}^{n-1} b_k z^k \qquad \text{в области } S \tag{2.14}$$

где b_k $(k=0, 1, \ldots, n-1)$ — первые n коэффициентов разложения $\Phi(z)$ в окрестности нуля; очевидно, $\Phi^*(z)$ имеет нуль кратности n в начале координат. Далее нетрудно убедиться в справедливости равенства

$$(t-\alpha)^m \sum_{k=1}^{n} b_{n-k}\frac{1}{t^k} = \sum_{\nu=-n}^{m-1}\delta_{n,m}^{(\nu)} t^\nu$$

$$\delta_{n,m}^{(\nu)} = \sum_{k=E_1(\nu)}^{E_2(\nu)} (-1)^{m-k-\nu} c_m^{m-k-\nu}\, b_{n-k}\, \alpha^{m-k-\nu} \tag{2.15}$$

причем символ $E_1(\nu)$ либо равен 1, либо $-\nu$ в зависимости от того $\nu \geqslant 0$ или $\nu < 0$; $E_2(\nu)$ равно $m-\nu$, если $m-\nu \leqslant n$, и равно n, если $m-\nu > n$.

Введем еще постоянные

$$\varepsilon_{n,\ m}^{(\nu)} = \sum_{k=\nu}^{m-1} c_k^{\nu}\, \delta_{n,\ m}^{(k)}\, \alpha^{k-\nu} \qquad (\nu = 0,\ 1,\ \ldots,\ m-1) \tag{2.16}$$

Соотношение (2.10) может быть теперь записано в виде

$$\frac{(t-\alpha)^m}{t^n}\, \Phi_i^*(t) + \sum_{\nu=0}^{m-1} (t-\alpha)^{\nu} \left\{ \varepsilon_{n,\ m}^{(\nu)} - \sum_{k=\nu}^{m-1} a_k\, c_{k-\nu} \right\} =$$

$$= \Phi_e(t) + e^{-\psi_e(t)}\, \chi(t) + u(t) - \sum_{\nu=1}^{n} \delta_{n,\ m}^{(-\nu)} \frac{1}{t^{\nu}} \tag{2.17}$$

откуда, рассуждая как прежде, найдем, что

$$\Phi^*(z) = -z^n \sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{1}{(z-\alpha)^{m-\nu}} \left\{ \varepsilon_{n,\ m}^{(\nu)} - \sum_{k=\nu}^{m-1} a_k\, c_{k-\nu} \right\} \tag{2.18}$$

в области S и, следовательно,

$$\varepsilon_{n,\ m}^{(\nu)} - \sum_{k=\nu}^{m-1} a_k\, c_{k-\nu} = 0 \quad (\nu = 0,\ 1,\ \ldots,\ m-1), \qquad \Phi^*(z) = 0 \tag{2.19}$$

Первые m из этих равенств позволяют выразить все a_k $(k = 0,\ 1,\ \ldots,\ m-1)$ через b_k $(k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1)$.

Учитывая теперь (2.14), наряду с последними равенствами будем иметь в S

$$\Phi(z) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k\, z^k, \qquad \Omega(z) = e^{\psi(z)} \sum_{k=0}^{n-1} b_k z^k \tag{2.20}$$

Обозначим для удобства это значение $\Omega(z)$ через $T(z)$ и положим на L

$$\varphi(t) = \varphi^*(t) + T(t) \tag{2.21}$$

Очевидно, функция $\varphi^*(z)$ регулярна вне L и обращается в нуль на бесконечности. Отсюда, введя новую функцию

$$E(z) = \left\{ u(z) - \sum_{\nu=1}^{n} \delta_{n,\ m}^{(-\nu)} \frac{1}{z^{\nu}} \right\} \exp\{\psi(z)\} \tag{2.22}$$

и учитывая, что в силу регулярности $T(z)$ в области S имеем в S^* (при условленном направлении обхода L)

$$\Omega(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t-z}\, dt = -\varphi^*(z) \tag{2.23}$$

придем на основании (2.17) к соотношению

$$-\varphi(t) + \chi(t) = -\{E(t) + T(t)\} \tag{2.24}$$

Последнее же в силу (1.2) легко приводится к уравнению

$$A(t_0)\, \omega(t_0) + \frac{B(t_0)}{\pi i} \int_L \frac{\omega(t)}{t-t_0}\, dt +$$

$$+ \int_L \omega(t)\, G(t,\ t_0)\, dt = f(t_0) + B(t_0)\, \{E(t_0) + T(t_0)\} \tag{2.25}$$

действительно, как указывалось, отличающемуся от (1.1) лишь дополнительным слагаемым в правой части. Из сказанного ясно, что условия эквивалентности сингулярного уравнения и уравнения Фредгольма, в которое оно преобразовано, здесь остаются теми же, что в обычном случае, когда одновременно обе функции $\Delta_j(t)$ $(j = 1,\ 2)$ отличны от нуля на L.

§ 3. Перейдем теперь к другому возможному случаю, когда $\Delta_2(t)$ обращается в нуль в некоторых точках кривой L, а $\Delta_1(t)$ всюду на ней отлична от нуля. Здесь также для простоты допустим, что $\Delta_2(t)$ имеет на L лишь один корень $t=\alpha$ кратности m. Введя в этом случае функцию

$$\varphi(t)=\frac{1}{B(t)}\left[\Delta_1(t)\,\omega(t)+\int_L \omega(t_1)\,G(t_1,t)\,dt_1-f(t)\right] \tag{3.1}$$

представим уравнение (1.1) в виде

$$\varphi(t_0)+\lim_{z\to t_0}\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\omega(t)}{t-z}\,dt=0 \tag{3.2}$$

где предельное значение интеграла Коши берется изнутри области S.

Поступая так же, как выше, выразим заключающуюся в (3.1) явно функцию $\omega(t)$ через остальные и подставим ее в интеграл (3.2). Аналогично (1.4) получим

$$\frac{\Delta_2(t_0)}{\Delta_1(t_0)}\varphi(t_0)+\int_L\{\varphi(t)\,R(t,t_0)+\omega(t)\,K(t,t_0)\}\,dt=F(t_0) \tag{3.3}$$

Здесь ядра и свободный член определяются следующими формулами:

$$\begin{gathered}
K(t,t_0)=-\frac{2}{\Delta_1(t_0)}G(t,t_0)-\frac{1}{\pi i}\int_L\left\{\frac{G(t,t_1)}{\Delta_1(t_1)}-\frac{G(t,t_0)}{\Delta_1(t_0)}\right\}\frac{dt_1}{t_1-t_0}\\
R(t,t_0)=\frac{1}{\pi i}\left\{\frac{B(t)}{\Delta_1(t)}-\frac{B(t_0)}{\Delta_1(t_0)}\right\}\frac{1}{t-t_0}\\
F(t_0)=-2\frac{f(t_0)}{\Delta_1(t_0)}-\frac{1}{\pi i}\int_L\left\{\frac{f(t)}{\Delta_1(t)}-\frac{f(t_0)}{\Delta_1(t_0)}\right\}\frac{dt}{t-t_0}
\end{gathered} \tag{3.4}$$

Заменив в уравнении (3.3) функцию $\varphi(t)$ ее выражением из (3.1) и проделав промежуточные выкладки в той же последовательности, как в предыдущем случае, мы придем к уравнению вида (1.6). Ядро и свободный член этого уравнения, за которым сохраним ту же нумерацию, будут теперь соответственно равны:

$$P(t,t_0)=\frac{G(t,t_0)}{\Delta_1(t_0)}+B(t_0)\frac{W(t,t_0)}{\Delta_2(t_0)},\qquad Q(t_0)=\frac{f(t_0)}{\Delta_1(t_0)}+B(t_0)\frac{V(t_0)}{\Delta_2(t_0)} \tag{3.5}$$

где введены обозначения

$$\begin{gathered}
W(t,t_0)=K(t,t_0)+\frac{\Delta_1(t)}{B(t)}R(t,t_0)+\int_L\frac{G(t,t_1)}{B(t_1)}R(t_1,t_0)\,dt_1\\
V(t_0)=F(t_0)+\int_L\frac{f(t)}{B(t)}R(t,t_0)\,dt
\end{gathered} \tag{3.6}$$

Прибавим к левой части нового уравнения (1.6) оператор

$$M(t_0)=-\frac{B(t_0)}{\Delta_2(t_0)}M^*(t_0),\qquad M^*(t_0)=\sum_{k=1}^{m}\frac{d_k}{t_0^{\,k}} \tag{3.7}$$

где d_k — некоторые постоянные; они определяются из условий равенства значений производных оператора $M^*(t)$ при $t=\alpha$ соответственным функционалам (1.9) (разумеется, при указанных здесь значениях W и V). Как нетрудно видеть:

$$M^*(t_0)=\left\{\sum_{\nu=0}^{m-1}\frac{1}{\nu!}N^{\nu}(\alpha)(t_0-\alpha)^{\nu}+\int_L\omega(t)\,X(t,t_0)\,dt-H(t_0)\right\} \tag{3.8}$$

причем $X(t,t_0)$ и $H(t_0)$ — некоторые функции, имеющие, очевидно, точку $t_0=\alpha$ нулем кратности m. После прибавления названного оператора к (1.6) мы придем к уравнению вида (1.11) (сохраним за ним также прежнюю нумерацию) при следующих значениях ядра и свободного члена: (3.9)

$$P^*(t, t_0) = \frac{G(t, t_0)}{\Delta_1(t_0)} + \frac{B(t_0)}{\Delta_2(t_0)} \left\{ W(t, t_0) - \sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{1}{\nu!} W_{t_0}{}^{(\nu)}(t, \alpha)(t_0 - \alpha)^\nu - X(t, t_0) \right\}$$

$$Q^*(t_0) = \frac{f(t_0)}{\Delta_1(t_0)} + \frac{B(t_0)}{\Delta_2(t_0)} \left\{ V(t_0) - \sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{1}{\nu!} V^{(\nu)}(\alpha)(t_0 - \alpha)^\nu - H(t_0) \right\}$$

§ 4. Исследуем, в каком случае полученное уравнение (1.11) будет эквивалентно исходному (1.1). Обращаясь к (3.3), представим уравнение (1.11) в виде

$$\frac{\Delta_2(t_0)}{\Delta_1(t_0)} \varphi(t_0) - \frac{B(t_0)}{\Delta_1(t_0)} \lim_{z \to t_0} \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t - z} dt = \chi(t_0) + \sum_{k=1}^{m} \frac{d_k}{t^k} \tag{4.1}$$

где z стремится к точке t_0 контура L изнутри S и функция $\chi(z)$, регулярная в области S, равна:

$$\chi(z) = -\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{1}{\Delta_1(t)} \left\{ B(t)\varphi(t) - \int_L \omega(t_1) G(t_1, t) dt_1 + f(t) \right\} \frac{dt}{t - z} \tag{4.2}$$

Введя, как в (2.3), функцию $\Omega(z)$, запишем (4.1) следующим образом

$$\Omega_i(t) - g(t)(t - \alpha)^m \Omega_e(t) = \chi(t) + \sum_{k=1}^{m} \frac{d_k}{t^k}, \qquad g(t) = \frac{\Delta_2(t)}{\Delta_1(t)(t - \alpha)^m} \tag{4.3}$$

Допустим сначала, что в формуле (2.6), определяющей приращение $\ln g(t)$ при обходе L, величина $\varkappa$ — целое положительное число, превосходящее или равное m. Определив при этом $\psi(z)$ согласно (2.7), будем иметь из (4.3)

$$\Phi_i(t) - e^{-\psi_i(t)} \chi(t) - u(t) = \frac{(t - \alpha)^m}{t^\varkappa} \Phi_e(t) + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{t^k} \sum_{\nu=k}^{m} c_{\nu-k} d_\nu \tag{4.4}$$

где c_k $(k = 0, 1, \ldots, m-1)$ — коэффициенты разложения $e^{-\psi(z)}$ в окрестности нуля, и регулярная в S функция

$$u(z) = \left\{ e^{-\psi(z)} - \sum_{k=0}^{m-1} c_k z^k \right\} \sum_{\nu=1}^{m} \frac{d_\nu}{z^\nu} + \sum_{k=0}^{m-2} z^k \sum_{\nu=1}^{m-k-1} c_{\nu+k} d_\nu \tag{4.5}$$

Здесь мы использовали легко проверяемое соотношение

$$\sum_{k=0}^{m-1} c_k z^k \sum_{\nu=1}^{m} \frac{d_\nu}{z^\nu} = \sum_{k=-(m-2)}^{m} \frac{1}{z^k} \sum_{\nu=E_1(k)}^{E_2(k)} c_{\nu-k} d_\nu \tag{4.6}$$

в котором $E_1(k) = k$, $E_2(k) = m$, если $k \geqslant 1$, и $E_1(k) = 1$, $E_2(k) = m + k - 1$, если $k \leqslant 0$. Из равенства (4.4) вытекает, что в области S^* функция

$$\Phi(z) = \frac{1}{(z - \alpha)^m} \sum_{k=1}^{m} z^{\varkappa - k} \sum_{\nu=k}^{m} c_{\nu-k} d_\nu \tag{4.7}$$

Отсюда заключаем, что все $d_k = 0$, $u(z) = 0$ и функция $\Phi(z)$ обращается тождественно в нуль в S^*. При этом соотношение (4.4) в силу (3.1) приводит нас непосредственно к (1.1). Таким образом, при условии $\varkappa \geqslant m$ сингулярное уравнение (1.1) и уравнение Фредгольма (1.11) эквивалентны между собой.

Предположим теперь, что равенство (2.6) соблюдается при $\varkappa < m$. Пусть $\varkappa = m - n$, где n — целое положительное число. Введем в области S^* функцию

$$\Phi^*(z) = \Phi(z) - \sum_{k=1}^{n} b_k \frac{1}{z^k} \tag{4.8}$$

где b_k $(k = 1, \ldots, n)$ — коэффициенты разложения $\Phi(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки; при этом, как легко убедиться, будем иметь

$$\frac{(t-\alpha)^m}{t^{m-n}}\Phi_e(t)=t^n\left(1-\frac{\alpha}{t}\right)^m\Phi_e^*(t)+\sum_{\nu=-(n-1)}^{m}\delta_{n,\,m}^{(\nu)}\frac{1}{t^\nu}$$
$$\delta_{n,\,m}^{(\nu)}=\sum_{k=E_1^*(\nu)}^{E_2^*(\nu)}(-1)^{n-k+\nu}\alpha^{n-k+\nu}c_m^{\,n-k+\nu}b_k \tag{4.9}$$

где $E_1^*(\nu)=1$, если $\nu+n\leqslant m+1$, и $E_1^*(\nu)=\nu+n-m$, если $\nu+n>m+1$; $E_2^*(\nu)=n$ при $\nu\geqslant 0$ и $E_2^*(\nu)=n+\nu$ при $\nu<0$. Введя еще постоянные

$$\varepsilon_{n,\,m}^{(\nu)}=\delta_{n,\,m}^{(\nu)}+\sum_{k=\nu}^{m}c_{k-\nu}d_k \quad (\nu=1,\ldots,m) \tag{4.10}$$

запишем (4.4) в виде

$$\Phi_i(t)-\chi(t)\exp\{-\psi_i(t)\}-u(t)-\sum_{\nu=0}^{n-1}\delta_{n,\,m}^{(-\nu)}t^\nu=$$
$$=t^n\left(1-\frac{\alpha}{t}\right)^m\Phi_e^*(t)+\sum_{\nu=1}^{m}\varepsilon_{n,\,m}^{(\nu)}\frac{1}{t^\nu} \tag{4.11}$$

Отсюда, повторяя неоднократно использованные рассуждения, найдем, что

$$\varepsilon_{n,\,m}^{(\nu)}=0 \quad (\nu=1,\ldots,m), \qquad \Phi_e^*(t)=0 \tag{4.12}$$

Следовательно, все d_k $(k=1,\ldots,m)$ могут быть выражены через b_k $(k=1,\ldots,n)$. Полагая далее $\Omega(z)=T(z)$ в S^*, будем иметь

$$T(z)=e^{\psi(z)}\sum_{k=1}^{n}b_k\frac{1}{z^k} \tag{4.13}$$

Очевидно, функция

$$\varphi^*(t)=\varphi(t)+T(t) \quad \text{на } L \tag{4.14}$$

аналитически продолжима и регулярна в области S; вследствие этого, учитывая свойства $T(z)$, найдем, что $\Omega_i(t)=\varphi(t)+T(t)$. Полагая затем

$$E(t)=-e^{\psi(t)}\left[u(t)+\sum_{\nu=0}^{n-1}\delta_{n,\,m}^{(-\nu)}t^\nu\right] \tag{4.15}$$

получим на основании (4.11) и (4.12) соотношение

$$\varphi(t)-\chi(t)=-\{T(t)+E(t)\} \tag{4.16}$$

Последнее, если учесть (3.1), сразу приводит к сингулярному уравнению

$$A(t_0)\,\omega(t_0)+\frac{B(t_0)}{\pi i}\int\limits_L\frac{\omega(t)\,dt}{t-t_0}+\int\limits_L\omega(t)\,G(t,t_0)\,dt=f(t_0)-B(t_0)\{T(t_0)+E(t_0)\}$$

отличающемуся дополнительным слагаемым в правой части от исходного (1.1). Отсюда ясно, что уравнение Фредгольма (1.11) не эквивалентно (1.1) при $\varkappa<m$.

В заключение отметим, что способом, аналогичным изложенному, можно преобразовать систему сингулярных уравнений вида (1.1) в уравнение Фредгольма.

Поступила 18 VII 1950

Институт механики
Академии Наук СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Шерман Д. И. Об одном случае в теории сингулярных уравнений. ДАН СССР. 1948. Т. IX. № 4.
2. Шерман Д. И. О приемах решения некоторых сингулярных интегральных уравнений. ПММ. 1948. Т. XII. Вып. 4.
3. Гахов Ф. Д. Математический сборник, новая серия. 1937. Т. II (44). № 4.
4. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные уравнения. 1946.