Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XV, 1951

К ЗАДАЧЕ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕГУЛИРУЕМЫХ СИСТЕМ

А. И. Лурье

(Ленинград)

В работе автора [1] было показано, что разыскание достаточных критериев устойчивости в «большом» одного важного класса регулируемых систем сводится к установлению характера корней некоторой системы квадратных уравнений. Когда число уравнений не превышает двух, их рассмотрение не составляет труда, но до сих пор не было указано эффективного способа исследования системы большего числа уравнений. Метод, предложенный в статье [1], нашел многочисленные применения; поэтому не лишен интереса и прикладного значения прием приведения упомянутой системы к простому и доступному для исследования виду. Этому и посвящена работа.

1. Напомним вкратце постановку задачи: уравнения движения регулируемой системы записываются в канонической форме [2]:

$$\dot{x}_k = \lambda_k x_k + f(\sigma), \qquad \dot{\sigma} = \sum_{k=1}^{n} \beta_k x_k - rf(\sigma) \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

Здесь λ_k — корни полинома

$$D(\lambda) = (-\lambda)^n + f_1(-\lambda)^{n-1} + \cdots - f_{n-1}\lambda + f_n = \prod_{k=1}^{n} (\lambda_k - \lambda) \tag{1.2}$$

представляющего левую часть характеристического уравнения системы регулирования при выключенном регулирующем органе (разомкнутой системы); предполагается, что вещественная часть всех корней отрицательна и что среди них нет равных корней. Наличие одного нулевого корня в характеристическом уравнении разомкнутой системы допускается; но в этом случае $D(\lambda)$ представляет характеристический определитель указанной системы, поделенной на $-\lambda$, так что в уравнениях (1.1)

$$\operatorname{Re} \lambda_k < 0 \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{1.3}$$

Правда, в системах непрямого регулирования постоянная β_{n+1}, соответствующая нулевому корню, войдет в последнее уравнение (1.1), но, как отмечено в статье [1], небольшое изменение выбора функции Ляпунова, решающей вопрос об устойчивости, устраняет это затруднение; поэтому в дальнейшем можно ограничиться системой вида (1.1) при условии (1.3).

Через σ в уравнениях (1.1) обозначена координата пускового устройства; величины $\beta_1, \ldots, \beta_n$ выражаются через передаточные числа регулируемой системы и корни λ_k по формулам, приведенным в работе [2]. Важно отметить, что вещественному корню λ_k соответствует вещественное β_k, а паре комплексных сопряженных корней λ_s и λ_{s+1} — такая же пара β_s, β_{s+1}. Через $f(\sigma)$ обозначена скорость регулирующего органа; эта функция, удовлетворяет условию

$$\sigma f(\sigma) > 0 \tag{1.4}$$

Наконец, r обозначает число обратной связи. В системе непрямого регулирования при отсутствии выключателя $r = 0$, при наличии его $r > 0$.

В работе[1] был указан способ построения знакоопределенной функции Ляпунова, производная которой, составленная в силу уравнений движения (1.1), будет при соблюдении некоторых условий знакоопределенной противоположного знака. Эти условия, дающие в конечном счете достаточные критерии асимптотической устойчивости, выраженные через исходные параметры системы регулирования, заключаются в следующем: рассматривается система квадратных уравнений

$$2\sqrt{r}\,a_\rho - 2a_\rho \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{a_\alpha}{\lambda_\alpha + \lambda_\rho} + \beta_\rho = 0 \qquad (\rho = 1, \ldots, n) \tag{1.5}$$

относительно неизвестных $a_1, \ldots, a_n$. Эта система должна иметь вещественные решения для неизвестных a_k, соответствующих вещественным λ_k; пары же неизвестных a_s и a_{s+1}, соответствующие комплексным сопряженным парам λ_s и λ_{s+1}, должны быть также комплексными сопряженными.

2. Начнем с нек торого преобразования системы (1.5); умножим каждое уравнение этой системы на λ_ρ^{2k+1} $(k = 0, 1, \ldots)$ и сложим все эти произведения. При этом получится двойная сумма:

$$2 \sum_{\rho=1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{a_\rho a_\alpha \lambda_\rho^{2k+1}}{\lambda_\alpha + \lambda_\rho} = \sum_{\rho=1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{n} a_\rho a_\alpha \frac{\lambda_\alpha^{2k+1} + \lambda_\rho^{2k+1}}{\lambda_\alpha + \lambda_\rho} \tag{2.1}$$

Но

$$\frac{\lambda_\alpha^{2k+1} + \lambda_\rho^{2k+1}}{\lambda_\alpha + \lambda_\rho} = (-1)^k \lambda_\alpha^k \lambda_\rho^k + \sum_{s=0}^{k-1} (-1)^s (\lambda_\alpha^{2k-s} \lambda_\rho^s + \lambda_\rho^{2k-s} \lambda_\alpha^s) \tag{2.2}$$

причем для $k = 0$ правую часть нужно заменить единицей.

Таким образом, получим

$$2\sqrt{r} \sum_{\rho=1}^{n} a_\rho \lambda_\rho^{2k+1} - (-1)^k \left(\sum_{\rho=1}^{n} a_\rho \lambda_\rho^k \right)^2 - 2 \sum_{s=0}^{k-1} (-1)^s \sum_{\rho=1}^{n} a_\rho \lambda_\rho^{2k-s} \sum_{\alpha=1}^{n} a_\alpha \lambda_\alpha^s + \sum_{\rho=1}^{n} \beta_\rho \lambda_\rho^{2k+1} = 0 \tag{2.3}$$

и при $k = 0$

$$2\sqrt{r} \sum_{\rho=1}^{n} a_\rho \lambda_\rho - \left(\sum_{\rho=1}^{n} a_\rho \right)^2 + \sum_{\rho=1}^{n} \beta_\rho \lambda_\rho = 0 \tag{2.4}$$

Теперь проделаем аналогичное преобразование, но разделив каждое из уравнений на λ_ρ^{2k+1}. Замечая, что выражение

$$2\sum_{\rho=1}^{n}\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{a_\rho a_\alpha}{\lambda_\rho^{2k+1}(\lambda_\rho+\lambda_\alpha)}=\sum_{\rho=1}^{n}\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{a_\rho}{\lambda_\rho^{2k+1}}\frac{a_\alpha}{\lambda_\alpha^{2k+1}}\frac{\lambda_\rho^{2k+1}+\lambda_\alpha^{2k+1}}{\lambda_\rho+\lambda_\alpha}$$

отличается от (2.1) заменой чисел a_ρ на $\frac{a_\rho}{\lambda_\rho^{2k+1}}$, получаем вместо (2.3)

$$2\sqrt{r}\sum_{\rho=1}^{n}\frac{a_\rho}{\lambda_\rho^{2k+1}}-(-1)^k\left(\sum_{\rho=1}^{n}\frac{a_\rho}{\lambda_\rho^{k+1}}\right)^2-2\sum_{s=0}^{k-1}(-1)^s\sum_{\rho=1}^{n}\frac{a_\rho}{\lambda_\rho^{s+1}}\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{a_\alpha}{\lambda_\alpha^{2k-s+1}}+$$
$$+\sum_{\rho=1}^{n}\frac{\beta_\rho}{\lambda_\rho^{2k+1}}=0 \tag{2.5}$$

и при $k=0$

$$2\sqrt{r}\sum_{\rho=1}^{n}\frac{a_\rho}{\lambda_\rho}-\left(\sum_{\rho=0}^{n}\frac{a_\rho}{\lambda_\rho}\right)^2+\sum_{\rho=1}^{n}\frac{\beta_\rho}{\lambda_\rho}=0 \tag{2.6}$$

Чтобы получить систему n уравнений, следует при четном $n=2m$ взять уравнения (2.3) и (2.5) для $n=1,2,\dots(m-1)$ и присоединить к ним два уравнения (2.4) и (2.6); при нечетном $n=2m+1$ нужно из одной из групп (2.3) или (2.5) взять на одно уравнение больше. Конечно, можно было бы все уравнения взять из одной группы, но указанный выбор, повидимому, наиболее прост.

3. Преобразование, сделанное в предшествующем пункте, имело целью приведение исходной системы (1.5) к виду, когда неизвестные входят через одинарные суммы с коэффициентами, зависящими лишь от номера рассматриваемой неизвестной.

Следующим шагом — и в этом состоит сущность предлагаемого приема — является переход к новым неизвестным $t_0, t_1, \dots, t_{n-1}$. Вводим в рассмотрение полиномы

$$T(\lambda)=t_0\lambda^{n-1}+t_1\lambda^{n-2}+\dots+t_{n-1} \tag{3.1}$$

с вещественными коэффициентами. Далее полагаем

$$a_\rho=\frac{T(\lambda_\rho)}{D'(\lambda_\rho)}\qquad(\rho=1,2,\dots,n) \tag{3.2}$$

Ясно, что при вещественных λ_ρ величины a_ρ будут вещественны; для пары же комплексно-сопряженных λ_s и λ_{s+1} таковой же будет пара a_s, a_{s+1}. Обратно, лишь при вещественных $t_0,\dots,t_{n-1}$ числа a_ρ будут иметь только что указанные свойства. Заметим еще, что линейное преобразование (3.2) — неособенное, так как его определитель (определитель Вандермонда) отличен от нуля, поскольку все λ_ρ различны.

При помощи подстановки (3.2) системы уравнений (2.3) — (2.6) при использовании приводимых ниже сумматорных формул преобразуются в систему также квадратных уравнений для новых неизвестных $t_0, t_1, \dots, t_{n-1}$, называемую далее разрешающей системой. Она имеет более простой вид, чем исходная, и выражается лишь через исходные параметры регулируемой системы; речь будет итти о разыскании условий, накладываемых на эти параметры, обеспечивающих наличие вещественных корней $t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}$ у разрешающей системы[1]. Эти условия и представят искомые достаточные критерии устойчивости. Область параметров, в которой выполняются эти критерии, нельзя будет расширить (оставаясь в рамках предложенного метода исследования устойчивости), если поставить целью разыскание необходимых и достаточных условий наличия вещественных корней разрешающей системы уравнений. Сумматорные формулы, упомянутые выше определяют значения сумм вида[2]

$$\sigma_k = \sum_{\rho=1}^{n} \frac{\lambda_\rho^{\,k}}{D'(\lambda_\rho)} \tag{3.3}$$

Известно [3], что

$$\sigma_k = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-2)$$

$$\sigma_{n-1} = (-1)^n, \quad \sigma_n = (-1)^n f_1, \quad \sigma_{n+1} = (-1)^n (f_1^2 - f_2) \quad \text{и т. д.} \tag{3.4}$$

$$\sigma_{-1} = -\frac{1}{f_n}, \quad \sigma_{-2} = -\frac{f_{n-1}}{f_n^2}, \quad \sigma_{-3} = \frac{1}{f_n^3}(f_n f_{n-2} - f_{n-1}^2) \quad \text{и т. д.} \tag{3.5}$$

Здесь f_k — коэффициенты полинома $D(\lambda)$; см. (1.2). Пользуясь этими формулами, можно теперь написать при целом, положительном r

$$\sum_{\rho=1}^{n} a_\rho \lambda_\rho^{\,r} = t_0\sigma_{r+n-1} + t_1\sigma_{r+n-2} + \cdots + t_{n-1}\sigma_r \tag{3.6}$$

$$\sum_{\rho=1}^{n} \frac{a_\rho}{\lambda_\rho^{\,r}} = t_{n-1}\sigma_{-r} + t_{n-2}\sigma_{-r+1} + \cdots + t_0\sigma_{-r+n-1} \tag{3.7}$$

Первую группу разрешающих уравнений составляем по (2.4), (2.3), выписывая последовательно уравнения:

для $k = 0$

$$2\sqrt{r}\,(t_0\sigma_n + t_1\sigma_{n-1}) - (t_0\sigma_{n-1})^2 + B_1 = 0 \tag{3.8}$$

для $k = 1$

$$\begin{aligned} 2\sqrt{r}\,(t_0\sigma_{n+2} + t_1\sigma_{n+1} + t_2\sigma_n + t_3\sigma_{n-1}) + (t_0\sigma_n + t_1\sigma_{n-1})^2 - \\ - 2t_0\sigma_{n-1}(t_0\sigma_{n+1} + t_1\sigma_n + t_2\sigma_{n-1}) + B_3 = 0 \end{aligned} \tag{3.9}$$

для $k = 2$

$$\begin{aligned} 2\sqrt{r}\,(t_0\sigma_{n+4} + t_1\sigma_{n+3} + t_2\sigma_{n+2} + t_3\sigma_{n+1} + t_4\sigma_n + t_5\sigma_{n-1}) - \\ - (t_0\sigma_{n+1} + t_1\sigma_n + t_2\sigma_{n-1})^2 - 2t_0\sigma_{n-1}(t_0\sigma_{n+3} + t_1\sigma_{n+2} + \\ + t_2\sigma_{n+1} + t_3\sigma_n + t_4\sigma_{n-1}) + 2(t_0\sigma_n + t_1\sigma_{n-1})(t_0\sigma_{n+2} + \\ + t_1\sigma_{n+1} + t_2\sigma_n + t_3\sigma_{n-1}) + B_5 = 0 \end{aligned} \tag{3.10}$$

и т. д.

[1] Вещественных систем корней будет или четное число, или не будет вовсе.

[2] В этом обозначении следовало бы проставить второй индекс, указывающий степень полинома $D(\lambda)$; мы этого не делаем, не желая осложнять набор следующих ниже формул; но указанное обстоятельство не следует упускать из вида.

Уравнения второй группы будут

для $k = 0$

$$2\sqrt{r}\, t_{n-1}\sigma_{-1} - (t_{n-1}\sigma_{-1})^2 + B_{-1} = 0 \tag{3.11}$$

для $k = 1$

$$2\sqrt{r}(t_{n-1}\sigma_{-3} + t_{n-2}\sigma_{-2} + t_{n-3}\sigma_{-1}) + (t_{n-1}\sigma_{-2} + t_{n-2}\sigma_{-1})^2 - \\ - 2t_{n-1}\sigma_{-1}(t_{n-1}\sigma_{-3} + t_{n-2}\sigma_{-2} + t_{n-3}\sigma_{-1}) + B_{-3} = 0 \tag{3.12}$$

для $k = 2$

$$2\sqrt{r}(t_{n-1}\sigma_{-5} + t_{n-2}\sigma_{-4} + t_{n-3}\sigma_{-3} + t_{n-4}\sigma_{-2} + t_{n-5}\sigma_{-1}) - \\ -(t_{n-1}\sigma_{-3} + t_{n-2}\sigma_{-2} + t_{n-3}\sigma_{-1})^2 - 2t_{n-1}\sigma_{-1}(t_{n-1}\sigma_{-5} + \\ + t_{n-2}\sigma_{-4} + t_{n-3}\sigma_{-3} + t_{n-4}\sigma_{-2} + t_{n-5}\sigma_{-1}) + 2(t_{n-1}\sigma_{-2} + \\ + t_{n-2}\sigma_{-1})(t_{n-1}\sigma_{-4} + t_{n-2}\sigma_{-3} + t_{n-3}\sigma_{-2} + t_{n-4}\sigma_{-1}) + B_{-5} = 0 \tag{3.13}$$

и т. д.

Здесь введено обозначение для свободных членов

$$B_{\pm r} = \sum_{\rho=1}^{n} \beta_\rho \lambda_\rho^{\pm r} \tag{3.14}$$

Имея выражения для величин β_ρ, указанные в [2], можно по тем же сумматорным формулам (3.4) — (3.5) выразить $B_{\pm r}$ через исходные параметры регулируемой системы.

4. Перейдем к рассмотрению частных случаев ($n = 2, 3, 4$).

а) $n = 2$. Имеем

$$T(\lambda) = t_0\lambda + t_1, \qquad D(\lambda) = f^2 - f_1\lambda + f_2 \tag{4.1}$$

Используем уравнения (3.8) и (3.11); найдем

$$2\sqrt{r}(t_0 f_1 + t_1) - t_0^2 + B_1 = 0 \tag{4.2}$$

$$-2\sqrt{r}\,\frac{t_1}{f_2} - \frac{t_1^2}{f_2^2} + B_{-1} = 0 \tag{4.3}$$

Последнее уравнение переписывается в форме

$$\left(\frac{t_1}{f_2} + \sqrt{r}\right)^2 = B_{-1} + r = \Gamma^2 \tag{4.4}$$

Значение t_1 из этого уравнения подставляем в (4.2); оно примет вид:

$$(t_0 - \sqrt{r}\, f_1)^2 = r f_1^2 - 2r f_2 + B_1 + 2\varepsilon\sqrt{r}\, f_2 \Gamma = Д^2 \quad (\varepsilon = \pm 1) \tag{4.5}$$

Условия вещественности чисел t_0 и t_1 будут

$$\Gamma^2 = B_{-1} + r > 0, \qquad Д^2 = r f_1^2 - 2r f_2 + B_1 + 2\varepsilon\sqrt{r}\, f_2\Gamma > 0 \tag{4.6}$$

В этом виде критерии устойчивости для $n = 2$ были даны А. М. Летовым [4].

б) $n=3$. Вычисления становятся более сложными, но остаются вполне обозримыми. Теперь

$$T(\lambda)=t_0\lambda^2+t_1\lambda+t_2, \qquad D(\lambda)=-\lambda^3+f_1\lambda^2-f_2\lambda+f_3 \tag{4.7}$$

Берем уравнения (3.11), (3.8), (3.12):

$$\left(\frac{t_2}{f_3}+\sqrt{r}\right)^2=B_{-1}+r=\Gamma^2 \tag{4.8}$$

$$t_0^2+2\sqrt{r}f_1t_0+2\sqrt{r}t_1=B_1 \tag{4.9}$$

$$2\left(\frac{t_2}{f_3}+\sqrt{r}\right)\left(t_2\frac{f_1f_3-f_2^2}{f_3^3}-t_1\frac{f_2}{f_3^2}-\frac{t_0}{f_3}\right)+\left(t_2\frac{f_2}{f_3}+\frac{t_1}{f_3}\right)^2+B_{-3}=0 \tag{4.10}$$

Из первого уравнения при условии

$$\Gamma^2=B_{-1}+r>0 \tag{4.11}$$

находим для t_2 вещественное значение; исключив далее t_2 из остающихся уравнений (4.9), (4.10) и введя обозначения

$$x=\frac{1}{2}(r\varepsilon\Gamma f_3)^{-1/3}(t_0+f_1\sqrt{r}), \qquad y=-\frac{1}{2}\sqrt{r}(r\Gamma f_3)^{-2/3}(t_1-f_2\sqrt{r})$$

преобразуем эти уравнения к виду

$$x^2-y=M, \qquad y^2-x=N \tag{4.12}$$

где

$$M=\frac{1}{4}(r\Gamma f_3)^{-2/3}[B_1+r(f_1^2-2f_2)]$$

$$N=-\frac{(r\Gamma f_3)^{-1/3}}{4\Gamma f_3}[(2f_1f_3-f_2^2)\Gamma^2+B_{-3}f_3^2] \tag{4.13}$$

Вместо (4.10) можно было бы, например, взять уравнение (3.9) для $k=1$ из первой группы разрешающих уравнений. Это было проделано для проверки вычисления, причем получились те же уравнения (4.12) с правыми частями, отличающимися по внешнему виду, но преобразуемыми одна в другую.

Достаточные критерии асимптотической устойчивости получим теперь как условия (необходимые и достаточные) наличия вещественных пересечений парабол (4.12). Дело сводится к рассмотрению уравнения четвертой степени

$$x^4-2Mx^2-x+M^2-N=0 \tag{4.14}$$

Нужно выразить, что это уравнение имеет хотя бы одну пару вещественных корней. Применив известные правила [5], найдем, что при

$$M>0, \qquad N>0 \tag{4.15}$$

уравнение (4.14) имеет вещественные корни, что, впрочем, сразу видно из построения парабол. Если же хотя бы одно из условий (4.15) не выполняется, то вопрос решается в зависимости от знака выражения

$$F(M,N)=M^3+N^3-M^2N^2-\frac{9}{8}MN+\frac{27}{256} \tag{4.16}$$

представляющего взятый со знаком минус дискриминант уравнения (4.14).

Вещественные корни будут в наличии при

$$F(M, N) > 0 \tag{4.17}$$

Если же $F(M, N) < 0$, то все корни уравнения (4.14) комплексные.

Резюмируем: при $n = 3$ критерии асимптотической устойчивости будут или

$$\Gamma^2 > 0, \qquad M > 0, \qquad N > 0 \tag{4.18}$$

или же, если хотя бы одно из двух последних условий не соблюдено, то

$$\Gamma^2 > 0, \quad F(M, N) > 0 \tag{4.19}$$

где Γ^2, M, N, $F(M, N)$ приведены выше.

Результат этот является, повидимому, существенно новым.

в) $n = 4$. Не будем проводить громоздких вычислений в общем случае, а ограничимся случаем $r = 0$ (отсутствует выключатель). Теперь

$$T(\lambda) = t_0\lambda^3 + t_1\lambda^2 + t_2\lambda + t_3 \tag{4.20}$$

$$D(\lambda) = \lambda^4 - f_1\lambda^3 + f_1\lambda^2 - f_3\lambda + f^4 \tag{4.21}$$

Берем разрешающие уравнения из первой и второй групп для $k = 0$ и $k = 1$:

$$-(t_0\sigma_3)^2 + B_1 = 0 \tag{4.22}$$

$$(t_0\sigma_4 + t_1\sigma_3)^2 - 2t_0\sigma_3(t_0\sigma_5 + t_1\sigma_4 + t_2\sigma_3) + B_3 = 0 \tag{4.23}$$

$$-(t_3\sigma_{-1})^2 + B_{-1} = 0 \tag{4.24}$$

$$(t_3\sigma_{-2} + t_2\sigma_{-1})^2 - 2t_3\sigma_{-1}(t_3\sigma_{-3} + t_2\sigma_{-2} + t_1\sigma_{-1}) + B_{-3} = 0 \tag{4.25}$$

По (4.22) и (4.24) в число критериев устойчивости входят неравенства

$$B_1 > 0, \qquad B_{-1} > 0 \tag{4.26}$$

Считая их выполненными и исключая t_0 и t_3 из (4.23) и (4.25), приведем эти уравнения после некоторых преобразований к виду

$$x^2 - y = M', \qquad y^2 - x = N' \tag{4.27}$$

где обозначено

$$M' = \frac{1}{4}\left(B_1{}^2 B_{-1} f_4{}^2\right)^{-1/3}\left[B_1\left(f_1{}^2 - 2f_2\right) - B_3\right] \tag{4.28}$$

$$N' = -\frac{1}{4}\left(B_1 B_{-1}{}^2 f_4{}^4\right)^{-1/3}\left[B_{-1}\left(2f_2f_4 - f_3{}^2\right) + B_{-3}f_4{}^2\right] \tag{4.29}$$

а x и y пропорциональны t_1 и t_2:

$$x = -\frac{1}{2}\left(t_0{}^2 t_3\right)^{-1/3} t_1, \qquad y = \frac{1}{2}\left(t_0 t_3{}^2\right)^{-1/3} t_2 \tag{4.30}$$

При условиях (4.26) остающиеся критерии устойчивости выражаются через величины M' и N' так же, как в случае „б“.

Заметим в заключение, что полученные критерии устойчивости выражены только через исходные параметры (замкнутой) регулируемой системы. Естественно, что не все ограничения, наложенные по ходу вывода на коэффициенты разомкнутой системы, являются необходимыми. В частности, можно отбросить предположение об отсутствии в разомкнутой системе кратных корней характеристического уравнения со строго отрицательной вещественной частью. Это следует из такого рассуждения: если бы кратные корни были, то сколь угодно малыми изменениями коэффициентов исходных уравнений можно было бы их устранить и получить критерии устойчивости, также сколь угодно мало отличающиеся от тех, которые получаются из системы разрешающих уравнений при подстановке в ее коэффициенты и свободные члены параметров реальной (неизмененной) системы.

Поступила 2 X 1950

Ленинградский политехнический институт

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А. И. Об устойчивости одного класса регулируемых систем. ПММ. 1945. Т. IX. Вып. 5.
2. Лурье А. И. О канонической форме уравнений теории автоматического регулирования. ПММ. 1948. Т. XII. Вып. 5.
3. Лурье А. И. Операционное исчисление в приложении к задачам механики. ГТТИ. 1950. § 12. Стр. 124; § 33. Стр. 398.
4. Летов А. М. Регулирование стационарного состояния системы, подверженной действию постоянных возмущающих сил. ПММ. 1948. Т. XII. Вып. 2.
5. Сушкевич А. К. Основы высшей алгебры. ОНТИ. 1937. § 130. Стр. 122—124.