Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XV, 1951

К ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ РЕГУЛИРУЕМЫХ СИСТЕМ

И. Г. Малкин

(Свердловск)

§ 1. Постановка задачи. Допустим, что система регулирования описывается дифференциальными уравнениями вида

$$\frac{d\eta_i}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{n} a_{i\alpha}\eta_\alpha + h_i f(\sigma) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad \sigma = \sum_{\alpha=1}^{n} j_\alpha \eta_\alpha \tag{1.1}$$

Здесь $a_{i\alpha}$, h_i, j_α — постоянные, σ — параметр, определяющий положение регулируемого органа, $f(\sigma)$ — некоторая функция от σ, удовлетворяющая следующим общим условиям:

а) $f(\sigma)$ непрерывна и такая, что уравнения (1.1) при заданных начальных условиях имеют единственное решение;

б) $f(0) = 0$ и $\sigma f(\sigma) > 0$ при $\sigma \neq 0$.

Система (1.1) имеет положение равновесия $\eta_1 = \cdots = \eta_n = 0$. Будем предполагать, что других положений равновесия эта система не имеет.

Задача заключается в определении условий, при которых положение равновесия устойчиво при любых начальных отклонениях и любом выборе функции $f(\sigma)$, удовлетворяющей вышеуказанным общим условиям. Эту задачу рассматривал А. И. Лурье [1], который применил для ее решения специальное преобразование и указал метод построения функции Ляпунова. Работы А. И. Лурье послужили отправной точкой для ряда других исследований в этом направлении [2—5]. В настоящей работе мы, руководствуясь идеями А. И. Лурье, получаем более простые и общие условия устойчивости.

В дальнейшем играет важную роль постоянная r, определяемая равенством

$$r = -\sum_{\alpha=1}^{n} j_\alpha h_\alpha$$

Эту постоянную А. И. Лурье предложил называть коэффициентом обратной связи. Мы будем предполагать, что эта постоянная отлична от нуля и положительна.

Рассмотрим далее характеристическое уравнение

$$|\, a_{ik} - \delta_{ik}\rho \,| = 0 \tag{1.2}$$

Будем предполагать, что все отличные от нуля корни этого уравнения имеют отрицательную вещественную часть.

Прежде чем перейти к решению задачи устойчивости, покажем, что коэффициент обратной связи r инвариантен относительно любого линейного неособенного преобразования переменных η_i. В самом деле, подвергнем уравнения (1.1) неособенному линейному преобразованию

$$\eta_i = \sum_{\alpha=1}^{n} b_{i\alpha} x_\alpha, \qquad x_i = \sum_{\alpha=1}^{n} c_{i\alpha} \eta_\alpha$$

Тогда эти уравнения примут вид:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{n} a_{i\alpha}^* x_\alpha + h_i^* f(\sigma), \qquad \sigma = \sum_{\alpha=1}^{n} j_\alpha^* x_\alpha$$

и новый коэффициент обратной связи r^* будет

$$r^* = -\sum_{\alpha=1}^{\alpha} j_\alpha^* h_\alpha^*$$

Но как легко видеть,

$$h_i^* = \sum_{\alpha=1}^{n} c_{i\alpha} h_\alpha, \qquad j_i^* = \sum_{\alpha=1}^{n} j_\alpha b_{\alpha i}$$

и, следовательно,

$$-r^* = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{n} c_{i\alpha} b_{\alpha i} h_\alpha j_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{n} h_\alpha j_\alpha = -r$$

так как

$$\sum_{i=1}^{n} c_{i\alpha} b_{\alpha i} = 1$$

что и доказывает наше утверждение.

Установив это, переходим к задаче устойчивости. При этом будем рассматривать три случая: когда характеристическое уравнение (1.2) не имеет нулевых корней, когда это уравнение имеет один нулевой корень и когда это уравнение имеет два нулевых корня. Последний случай будет рассматриваться при некоторых частных предположениях.

§ 2. Условия устойчивости. *1-й случай.* Допустим сначала, что уравнение (1.2) не имеет нулевых корней и, следовательно, все его корни имеют отрицательную вещественную часть.

Рассмотрим совершенно произвольную определенно отрицательную квадратичную форму $W(\eta_1, \ldots, \eta_n)$. Самый общий вид этой формы будет

$$-2W = \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} A_{\alpha\beta} \eta_\alpha \eta_\beta =$$

$$= \alpha_{11}^2 \eta_1^2 + (\alpha_{21} \eta_1 + \alpha_{22} \eta_2)^2 + \cdots + (\alpha_{n1} \eta_1 + \cdots + \alpha_{nn} \eta_n)^2 \qquad (2.1)$$

где $\alpha_{11}, \alpha_{21}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{n1}, \ldots, \alpha_{nn}$ — совершенно произвольные вещественные постоянные.

Подберем теперь квадратичную форму $F(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ таким образом, чтобы выполнялось соотношение

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial \eta_\alpha} (a_{\alpha 1} \eta_1 + \cdots + a_{\alpha n} \eta_n) = W \tag{2.2}$$

Как показал Ляпунов, такая форма F всегда существует, будет единственной и получится обязательно определенно положительной. Пусть

$$2F = \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} B_{\alpha\beta} \eta_\alpha \eta_\beta \tag{2.3}$$

Коэффициенты $B_{\alpha\beta}$ определяются из линейных алгебраических уравнений, которые получаются после приравнивания коэффициентов при подобных членах в обеих частях соотношения (2.2). Практический прием вычисления этих коэффициентов будет рассмотрен ниже.

Рассмотрим теперь функцию

$$V = F(\eta_1, \ldots, \eta_n) + \int_0^\sigma f(\sigma)\, d\sigma \tag{2.4}$$

и составим ее полную производную по времени в силу уравнений (1.1). Будем иметь

$$\begin{gathered} -\frac{dV}{dt} = -\sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{\alpha=1}^{n} a_{i\alpha} \eta_\alpha + h_i f(\sigma) \Big) \Big(\frac{\partial F}{\partial \eta_i} + j_i f(\sigma) \Big) = \\ = -W(\eta_1, \ldots, \eta_n) + r f^2(\sigma) - f(\sigma) \sum_{i=1}^{n} \Big(h_i \frac{\partial F}{\partial \eta_i} + j_i \sum_{\alpha=1}^{n} a_{i\alpha} \eta_\alpha \Big) \end{gathered} \tag{2.5}$$

Полученное выражение представляет собой квадратичную форму относительно величин $\eta_1, \ldots, \eta_n$, $f(\sigma)$. При этом эта форма будет определенно положительной, если коэффициент при первой степени $f(\sigma)$, представляющий собой линейную форму величин $\eta_1, \ldots, \eta_n$, обращается в нуль. Однако это условие, будучи достаточным, не является необходимым. Для получения необходимого и достаточного условия воспользуемся критерием Сильвестра. Дискриминант выражения $-dV/dt$, рассматриваемого как форма $n+1$ переменных $\eta_1, \ldots, \eta_n, f(\sigma)$, имеет вид:

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1n} & P_1 \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2n} & P_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n1} & A_{n2} & \ldots & A_{nn} & P_n \\ P_1 & P_2 & \ldots & P_n & r \end{vmatrix} \tag{2.6}$$

где

$$P_s = -\sum_{i=1}^{n} (j_i a_{is} + h_i B_{is}) \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

Для того чтобы форма $-dV/dt$ была знакоопределенной (положительной), необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры этого дискриминанта были положительны. Первые n миноров

$$D_1 = A_{11}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix}, \ldots, D_n = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n1} & A_{n2} & \ldots & A_{nn} \end{vmatrix}$$

будут необходимо положительны в силу знакоопределенности формы W.

Поэтому остается одно условие

$$D_{n+1} > 0 \tag{2.7}$$

Допустим, что это условие выполнено. Тогда dV/dt будет определенно отрицательной функцией величин $\eta_1, \ldots, \eta_n$. Сама же величина V будет определенно положительной функцией этих величин, так как по свойству функции $f(\sigma)$ выражение

$$\int_0^\sigma f(\sigma)\, d\sigma$$

будет положительным и обращаться в нуль только при $\sigma = 0$. Отсюда на основании теоремы Ляпунова рассматриваемое состояние равновесия будет асимптотически устойчиво. При этом, так как функции V и $-dV/dt$ определенно положительны при любых значениях $\eta_1, \ldots, \eta_n$ и при любом выборе функции $f(\sigma)$, то устойчивость будет иметь место при любых начальных отклонениях и любом выборе функции $f(\sigma)$.

Таким образом, неравенство (2.7) и выражает собой искомое условие устойчивости. Оно содержит через коэффициенты $B_{\alpha\beta}$ произвольные вещественные постоянные $\alpha_{11}, \alpha_{21}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{nn}$. Этими $n+1$ постоянными следует распорядиться таким образом, чтобы область допустимых значений параметров регулируемой системы получилась возможно более широкой.

2-й случай. Допустим теперь, что мы имеем систему $n+1$-го порядка и что характеристическое уравнение имеет один нулевой корень при остальных n корнях с отрицательными вещественными частями. Подходящим выбором переменных уравнения системы могут быть представлены в виде (2.8)

$$\frac{d\eta}{dt} = hf(\sigma), \quad \frac{d\eta_i}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{n} a_{i\alpha}\eta_\alpha + h_i f(\sigma), \quad \sigma = \sum_{\alpha=1}^{n} j_\alpha \eta_\alpha + j\eta \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

где коэффициенты $a_{i\alpha}$ попрежнему таковы, что все корни характеристического уравнения (1.2) имеют отрицательные вещественные части. Коэффициент j необходимо отличен от нуля, так как в противном случае система (2.8) имела бы решение $\eta_1 = \cdots = \eta_n = 0$, $\eta = \text{const}$ и, следовательно, существовало бы бесчисленное множество положений равновесия, что противоречит условию.

Рассмотрим снова функцию

$$V = F(\eta_1, \ldots, \eta_n) + \int_0^\sigma f(\sigma)\, d\sigma$$

Эта функция положительна и может обращаться в нуль только при $\eta_1 = \cdots = \eta_n = \sigma = 0$, т. е. только при $\eta_1 = \cdots = \eta_n = \eta = 0$, так как постоянная j отлична от нуля. Следовательно, V представляет собой определенно положительную функцию переменных $\eta_1, \ldots, \eta_n, \eta$. Для ее производной по времени попрежнему имеем выражение (2.5), в котором

$$r = -\sum_{\alpha=1}^{n} j_\alpha h_\alpha - jh$$

попрежнему представляет собой коэффициент обратной связи, который по условию положителен.

Если выполнено условие (2.7), то dV/dt будет определенно отрицательной функцией относительно $\eta_1, \ldots, \eta_n, f(\sigma)$ и, следовательно, относительно $\eta_1, \ldots, \eta_n, \eta$. Поэтому неравенство (2.7) попрежнему представляет собой условие асимптотической устойчивости при любых начальных отклонениях и любом выборе функции $f(\sigma)$.

3-й случай. Рассмотрим систему $n+2$-го порядка, характеристическое уравнение которой имеет двойной нулевой корень. Этот корень не обращает в нуль по крайней мере один из миноров первого порядка характеристического определителя. В противном случае, как легко показать, будет существовать бесчисленное множество положений равновесия.

В рассматриваемом случае подходящим линейным преобразованием систему уравнений движения можно представить в виде

$$\begin{gathered}\frac{d\eta}{dt} = hf(\sigma), \qquad \frac{d\eta^*}{dt} = -\eta + h^* f(\sigma) \\ \frac{d\eta_i}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{n} a_{i\alpha}\eta_\alpha + h_i f(\sigma) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \qquad \sigma = \sum_{\alpha=1}^{n} j_\alpha \eta_\alpha + j\eta + j^*\eta^*\end{gathered} \tag{2.9}$$

При этом постоянная j^* необходимо отлична от нуля, так как иначе система имела бы бесчисленное множество положений равновесия $\eta_1 = \cdots = \eta_n = \eta = 0$, $\eta^* = \text{const}$.

Сделаем дополнительное предположение, что $hj^* > 0$.

В качестве функции Ляпунова примем функцию

$$V = F(\eta_1, \ldots, \eta_n) + \int_0^\sigma f(\sigma)\, d\sigma + \frac{1}{2h} j^* \eta^2$$

Эта функция будет знакоопределенной положительной относительно всех $n+2$ переменных $\eta_1, \ldots, \eta_n, \eta, \eta^*$. Ее полная производная по времени, составленная в силу уравнений (2.9) имеет вид (2.5). Если выполнено неравенство (2.7), то эта производная будет определенно отрицательной относительно $\eta_1, \ldots, \eta_n, \sigma$ и, следовательно, постоянно отрицательной относительно $\eta_1, \ldots, \eta_n, \eta, \eta^*$. Отсюда на основании теоремы Ляпунова вытекает устойчивость равновесия. Легко, однако, видеть, что устойчивость попрежнему будет асимптотической. В самом деле, dV/dt обращается в нуль только при $\eta_1 = \cdots = \eta_n = \sigma = 0$, т. е. при $\eta_1 = \cdots = \eta_n = j\eta + j^*\eta^* = 0$. В этой точке, которую мы предполагаем отличной от начала координат, величина η не равна нулю. Проходящая через эту точку интегральная кривая уравнений (2.9) касается замкнутой поверхности семейства $V = \text{const}$, проходящей через эту точку (так как в этой точке $dV/dt = 0$). Легко видеть, что при этом интегральная кривая пересекает указанную поверхность снаружи внутрь. В самом деле, в указанной точке имеем

$$\frac{d(j\eta + j^*\eta^*)}{dt} = -j^*\eta$$

и так как $\eta \neq 0$, то, двигаясь вдоль интегральной кривой в сторону возрастания t, будем иметь $j\eta + j^*\eta^* \neq 0$ и, следовательно, $dV/dt < 0$, что и показывает, что интегральная кривая пересекает поверхность $V = \text{const}$ снаружи внутрь. Отсюда непосредственно вытекает асимптотическая устойчивость.

Таким образом, и в рассматриваемом случае неравенство (2.7) выражает достаточное условие асимптотической устойчивости при любых начальных отклонениях и любом выборе функции $f(\sigma)$.

§ 3. Вычисление коэффициентов $B_{\alpha\beta}$. В условии устойчивости (2.7) на основании (2.6) входят неизвестные коэффициенты $Б_{\alpha\beta}$, которые необходимо выразить через известные коэффициенты $A_{\alpha\beta}$. Задача, как указывалось, сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений. Когда число переменных велико, вычисление делается громоздким. Это затруднение совершенно отпадает, если уравнения регулируемой системы приведены, как это делает А. И. Лурье, к каноническому виду.

Допустим сначала, что уравнение (1.2) имеет только простые корни. Заменим переменные η_s переменными x_s при помощи неособенной линейной подстановки

$$x_s = \sum_{\alpha=1}^{n} b_{s\alpha}\eta_\alpha \tag{3.1}$$

Эту подстановку, как известно, можно выбрать таким образом, чтобы система

$$\frac{d\eta_s}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{n} a_{s\alpha}\eta_\alpha$$

преобразовалась к каноническому виду

$$\frac{dx_s}{dt} = \rho_s x_s$$

где ρ_s — корни уравнения (1.2).

Если эту подстановку применить к исследуемым нами уравнениям, то все уравнения в случае 1) и последние n уравнений в случаях 2) и 3) примут вид:

$$\frac{dx_s}{dt} = \rho_s x_s + H_s f(\sigma) \qquad (s = 1, 2, \ldots, n) \tag{3.2}$$

где H_s — некоторые постоянные (эти постоянные при помощи добавочной подстановки $y_s = x_s / H_s$ можно сделать равными единице). При этом коэффициент обратной связи не изменится.

Допустим сначала, что все корни ρ_s вещественны. Составляя уравнение (2.2), которое сейчас имеет вид:

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_s} \rho_s x_s = W$$

где

$$2F = \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} B_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta, \qquad -2W = \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} A_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta$$

и приравнивая коэффициенты при подобных членах, будем иметь

$$(\rho_\alpha + \rho_\beta) B_{\alpha\beta} = -A_{\alpha\beta}$$

что сразу дает явное и простое выражение для коэффициентов $B_{\alpha\beta}$.

Допустим теперь, что уравнение (1.2) имеет кратные корни. В этом случае подстановку (3.1) можно выбрать, как известно, так, чтобы преобразованная система имела вид:

$$\frac{dx_s}{dt} = \rho_s x_s + \sigma_s x_{s-1} + H_s f(\sigma) \qquad (s = 1, 2, \ldots, n) \tag{3.3}$$

где коэффициенты σ_s равны либо единице, либо нулю, причем всегда $\sigma_1 = 0$. Уравнение, связывающее формы F и W, имеет теперь вид:

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_s} (\rho_s x_s + \sigma_s x_{s-1}) = W \tag{3.4}$$

Приравнивая свободные члены, мы снова получим уравнения для $B_{\alpha\beta}$. Если коэффициенты $B_{\alpha\beta}$ вычислять в определенном порядке, а именно, в следующем: B_{nn}, $B_{n, n-1}, \ldots$, B_{n1}, $B_{n-1, n-1}, \ldots$, $B_{n-1, 1}, \ldots$, B_{22}, B_{21}, B_{11}, то для вычисления каждого коэффициента $B_{\alpha\beta}$ получится уравнение вида

$$(\rho_\alpha + \rho_\beta) B_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta}$$

где $C_{\alpha\beta}$ — линейные функции величин A_{ik} и уже вычисленных коэффициентов B_{ik}. Таким образом, случай кратных корней не вносит никаких усложнений по сравнению с корнями простыми.

Рассмотрим теперь случай комплексных корней. Допустим для простоты, что имеются только два комплексных корня $\rho_1 = a + ib$ и $\rho_2 = a - ib$ и что эти корни являются простыми. Все дальнейшие рассуждения сохраняют силу и для самого общего случая, когда имеется несколько пар комплексных корней любой кратности. В рассматриваемом случае уравнения (3.3) будут комплексными и для приведения их к вещественному виду понадобится дополнительное преобразование.

А именно, нужно будет положить

$$x_1 = u_1 + iv_1 \qquad x_2 = u_1 - iv_1 \tag{3.5}$$

После такого преобразования уравнения движения несколько усложнятся и для коэффициентов $B_{\alpha\beta}$ уже не получится таких простых уравнений, как в предыдущих случаях. Чтобы обойти это затруднение, можно поступить следующим образом.

Допустим, что уравнения преобразованы к вещественному виду и что уже найдена форма F, которая является формой переменных $u_1, v_1, x_3, \ldots, x_n$, так же как и форма W. Производная от F в силу однородной части преобразованной системы будет тождественно равна форме W.

Заменим теперь в обеих формах F и W переменные u_1 и v_1 их выражениями через x_1 и x_2, т. е. положим

$$u_1 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad v_1 = \frac{x_1 - x_2}{2i} \tag{3.6}$$

Тогда обе формы станут комплексными и производная от F в силу однородной части комплексных уравнений (3.3) будет попрежнему равна W. Отсюда получаем следующее правило для вычисления формы F. Берем произвольную знакоопределенную форму W от переменных $u_1, v_1, x_3, \ldots, x_n$ и делаем в ней замену (3.6). Получится комплексная форма от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Ищем форму F, удовлетворяющую уравнению (3.4). Эта задача, как мы видели, решается сразу. В полученной форме F делаем замену (3.5), после чего получится искомая форма. Как мы видим, если воспользоваться этим приемом, то комплексные корни не внесут в задачу никаких осложнений.

Поступила 11 IX 1950

Уральский государственный университет

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А. И. Об устойчивости одного класса регулируемых систем. ПММ. 1945. Т. IX. Вып. 5.
2. Летов А. М. Регулирование стационарного состояния системы, подверженной действию постоянных возмущающих сил. ПММ. 1948. Т. XII. вып. 2.
3. Летов А. М. К теории изодромного регулятора. ПММ. 1948. Т. XII. Вып. 4.
4. Летов А. М. Об одном особом случае исследования устойчивости систем регулирования. ПММ. 1948. Т. XII. Вып. 6.
5. Летов А. М. Собственно неустойчивые регулируемые системы. ПММ. 1950. Т. XIV. Вып. 2.