Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XV, 1951

О ПРОДОЛЖЕНИИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Н. П. Еругин

(Ленинград)

На основании теоремы существования можно утверждать.

Лемма 1. Дана система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \ldots, x_n, t) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

где $f_i(x_1, \ldots, x_n, t)$ определены и непрерывны в конечной замкнутой области $A(x_1, \ldots, x_n)$ и $p \leqslant t \leqslant q$ (p и q — конечные числа).

Пусть G — такая конечная замкнутая область, что всякая точка $(x_1^\circ, \ldots, x_n^\circ) = x^\circ$ из нее лежит вместе с окрестностью $|x_i - x_i^\circ| \leqslant a$ $(i = 1, \ldots, n)$ в области A, и пусть $|f_i(x_1, \ldots, x_n, t| \leqslant M$ при всех $x_1, \ldots, x_n$ из области A и при $p \leqslant t \leqslant q$.

Тогда существует решение системы (1)

$$x_i = x_i(x_1^\circ, \ldots, x_n^\circ, t_0;\ t) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

проходящее в момент $t = t_0$ через точку x°. Это решение определено и непрерывно в промежутке

$$|t - t_0| \leqslant h = \min\left[\frac{a}{M},\ a\right]$$

где $p + a \leqslant t_0 \leqslant q - a$, и при таких t решение не выходит из области

$$|x_i - x_i^\circ| \leqslant Mh \leqslant a \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

Таким образом, здесь дается промежуток для t, не зависящий от точки x°, из области G, и t_0 из промежутка $p + a \leqslant t_0 \leqslant q - a$, в котором определено решение (как функция t_0).

Замечание 1. Всякое решение $x_i = x_i(x_1^*, \ldots, x_n^*, t^*;\ t)$, проходящее через точку $(x_1^*, \ldots, x_n^*\ t^*)$, где точка $(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ из области

$$|x_k^* - x_k^\circ| \leqslant (t^* - t_0) M \qquad (k = 1, \ldots, n), \qquad t_0 < t^* < t_0 + h$$

при $t^* < t < t_0 + h$ не выходит из области

$$|x_k^\circ - x_k| \leqslant Mh \leqslant a \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

Это следует из

$$x_k = x_k^* + \int_{t^*}^{t} f_k(x_1, \ldots, x_n, t)\, dt$$

$$|x_k - x_k^*| \leqslant M(t - t^*) \leqslant M(t_0 + h - t^*) = Mh - (t^* - t_0) M$$

на основании

$$|x_k^* - x_k^\circ| \leqslant (t^* - t_0) M$$

Если имеем решение, проходящее через точку $(x_1^\circ, \ldots, x_n^\circ, t_0)$ и непрерывное в промежутке $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + h_1$, $h_1 < h$, то для $t > t_0 + h_1$ это решение можно продолжить, сохраняя непрерывность и в точке $t = t_0 + h_1$, а можно и нарушить непрерывность в этой точке[1] $t = t_0 + h_1$. Так как согласно замечанию 1 при любом продолжении решение для $t > t_0 + h_1$ не выходит из области $|x_i - x_i^\circ| \leqslant Mh \leqslant a$, то продолжать его можно на промежуток $t_0 \leqslant t < t_0 + h$.

Очевидно, это продолжение не будет единственным для непрерывных $f_i(x_1, \ldots, x_n, t)$ и в том случае, если на всем промежутке $t_0 \leqslant t < t_0 + h$ сохраняем непрерывность решения[2].

Но во всяком случае имеем

$$|x_i - x_i^\circ| \leqslant Mh \leqslant a \quad \text{при } t_0 \leqslant t < t_0 + h$$

Замечание 2. Если имеем решение, проходящее через точку $(x_1^\circ, \ldots, x_n, t_0)$ и непрерывное в промежутке $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + h_1$, $h_1 < h$, то для $t_0 + h_1 < t < t_0 + h$ решение можно продолжить непрерывно или разрывно в некоторых точках (произвольно выбранных) и при всяком продолжении имеем

$$|x_i - x_i^\circ| \leqslant Mh \leqslant a \quad \text{при } t < t_0 + h$$

Так как для промежутка $t_0 + h_1 < t < t_0 + h$ решение можно продолжить не однозначно, то можно поставить вопрос, возможно ли на этот промежуток продолжить решение так, чтобы при $t \to t_0 + h$ решение $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ не имело предела. Если мы допускаем разрывные решения, то, очевидно, такое продолжение возможно. Но можно ли так продолжить решение, сохраняя непрерывность при $t < t_0 + h$?

На этот вопрос отвечает следующая лемма.

Лемма 2. Предположим, имеется решение системы (1)

$$x_i = x_i(x_1^\circ, \ldots, x_n^\circ, t_0;\ t) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{2}$$

определенное и непрерывное в промежутке $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + h_1$, $h_1 < h$, где $(x_1^\circ, \ldots, x_n^\circ)$, t_0 и h те самые, которые были введены в лемме 1.

Тогда, продолжая непрерывно это решение на промежуток $t_0 \leqslant t < t_0 + h$, мы имеем $|x_i^\circ - x_i| \leqslant Mh \leqslant a$ и это решение имеет предел при $t \to t_0 + h$.

Доказательство. Предположим, лемма не верна, т. е. существует решение $x_1(t), \ldots, x_n(t)$, которое не имеет предела при $t \to t_0 + h$.

Тогда по крайней мере одна из функций $x_k(t)$ $(k = 1, \ldots, n)$ не имеет предела.

---

[1] Т. е. для $t > t_0 + h_1$ можно строить решение с начальными условиями $x_k = x_k(t_0 + h_1) + \varepsilon$ $(k=1, \ldots, n)$ при $t = t_0 + h_1$, где $|\varepsilon| < Mh_1$.

[2] Так как через всякую точку области может проходить бесконечное множество решений.

Пусть $x_m(t)$ не имеет предела при $t \to t_0 + h$. Так как $|x_m(t) - x_m^\circ| \leqslant Mh$ при $t < t_0 + h$, то существуют два числа $x_m^{(1)}$ и $x_m^{(2)}$ из промежутка $(x_m^\circ - Mh,\ x_m^\circ + Mh)$ такие, что $x_m(t)$ принимает эти значения при $t \to t_0 + h$ бесконечное число раз, т. е. существуют $t_k^{(1)} \to t_0 + h$ и $t_k^{(2)} \to t_0 + h$ при $k \to \infty$, для которых имеем

$$x_m(t_k^{(1)}) = x_m^{(1)}, \qquad x_m(t_k^{(2)}) = x_m^{(2)} \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{3}$$

Так как $x_i(t)$ $(k = 1, \ldots, n)$ непрерывны при $t < t_0 + h$, то в силу непрерывности $f_m(x_1, \ldots, x_n, t)$ и производная $dx_m(t)/dt$ непрерывна при $t < t_0 + h$.

А тогда имеем

$$\frac{x_m(t_k^{(2)}) - x_m(t_k^{(1)})}{t_k^{(2)} - t_k^{(1)}} = \frac{dx_m(\xi_k)}{dt} \qquad (t_k^{(1)} < \xi_k < t_k^{(2)} < t_0 + h) \tag{4}$$

Пусть $x_i(\xi_k) = \zeta_i^{(k)}$ $(i = 1, \ldots n;\ k = 1, 2, \ldots)$. Согласно предыдущему

$$|x_i^\circ - \zeta_i^{(k)}| \leqslant Mh \leqslant a \qquad (i = 1, \ldots, n;\ k = 1, 2 \ldots) \tag{5}$$

На основании

$$\frac{dx_m(\xi_k)}{dt} = f_m(\zeta_1^{(k)}, \ldots, \zeta_n^{(k)}, \xi_k)$$

и (3) из (4) имеем

$$\frac{x_m^{(2)} - x_m^{(1)}}{t_k^{(2)} - t_k^{(1)}} = f_m(\zeta_1^{(k)}, \ldots, \zeta_n^{(k)}, \xi_k) \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{6}$$

Так как $t_k^{(2)} - t_k^{(1)} \to 0$ при $k \to \infty$, то левая часть равенства (6) стремится к бесконечности при $k \to \infty$, в то время как правая часть в силу (5) остается ограниченной, именно

$$|f_m(\zeta_1^{(k)}, \ldots, \zeta_n^{(k)}, \xi_k)| \leqslant M$$

Полученное противоречие доказывает лемму 2.

Теорема. Дана система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \ldots, x_n, t) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

где $f_i(x_1, \ldots, x_n, t)$ непрерывны в области $D(x_1, \ldots, x_n)$ и $p \leqslant t \leqslant q$ (p и q — конечные).

Тогда всякое решение системы (1) при $t \to T$, где $p < T < q$ либо стремится к точке M_0 области D, либо стремится к границе области D (т. е. точка $M(t) = M(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ при $t \to T$ попадает в как угодно малую окрестность границы области D и больше оттуда не выходит)[1].

Доказательство. Предположим, теорема не верна. Так как точка $M(t)$ не стремится к границе области D (и, в частности, к ∞, если D — неограниченная область), то найдется конечная замкнутая область

---

[1] Для одного уравнения теорема известна [(1)].

$X(x_1, \ldots, x_n)$ настолько большая, что точка $M(t)$ заходит в нее бесконечное число раз (при $t \to T$).

Действительно, возьмем область $X_1(x_1, \ldots, x_n)$, погруженную вместе с гриницами в область D.

Если при всех t из промежутка $|t - T| < \delta_1$ точка $M(t)$ находится вне области X_1, то возьмем область $X_2 \supset X_1$.

Если при t из промежутка $|t - T| < \delta_2 < \delta_1$ $M(t)$ будет вне области X_2, то берем область $X_3 \supset X_2$.

Таким образом, либо встретим область $X(x_1, \ldots, x_n)$ такую, что из всякой области $|t - T| < \delta_k$, $\delta_k \to 0$ при $k \to \infty$ найдутся t_k, для которых $M(t_k)$ лежит в области X, либо $M(t) \to$ к границе области D.

Предположим, $M(t)$ не стремится к границе области D при $t \to T$, т. е. имеем область X (конечную и замкнутую), в которой будут точки $M(t_k)$ и $t_1, t_2, \ldots, \to T$.

Но тогда имеем последовательность $t_1, t_2, \ldots, \to T$, для которой $M(t_1), M(t_2), \ldots \to M_0(x_1^\circ, \ldots, x_n^\circ)$, где M_0 лежит в области X.

Построим решения, проходящие через точки $M_k(x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})$, соответствующие $t = t_k$.

Эти решения $M_k(t)$ определены в промежутке $|t - t_k| < h$, где h не зависит от t_k и $(x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})$, и обладают свойством: если $M_k(t)$ непрерывно при $t < t^*$, где $|t^* - t_k| \leqslant h$, то $M_k(t)$ имеет предел в области X при $t \to t^*$. Это имеем на основании леммы 1 и леммы 2.

Так как при достаточно большом k величина T попадает в промежуток $|t - t_k| < h$, то и при $t \to T$ точка $M(t)$ стремится к пределу в области X. Очевидно, $M(t) \to M_0$ $(x_1^\circ, \ldots, x_n^\circ)$ при $t \to T$, так как это имеем для частичной последовательности $t_1, t_2 \ldots \to T$.

Теорема доказана.

Следствие 1. Если при $t > T$ решение $M(t)$ не продолжимо, то точка $M(t) \to$ к границе области D при $t \to T$ (и если граница состоит из конечного числа точек, то точка $M(t)$ либо стремится к одной из этих точек, либо к ∞).

Следствие 2. Если $M(t) \subset D' \subset D$, то движение $M(t)$ продолжимо на все t (известный факт).

Следствие 3. Если $f_i(x_1, \ldots, x_n, t)$ $(i = 1, \ldots, n)$ определены и непрерывны при всех $x_1, \ldots, x_n$ и t, то либо $M(t)$ продолжима на все t, либо при $t \to T$ (конечное) $M(t) \to \infty$, т. е. $M(t)$ покидает навсегда сферу любого радиуса.

Поступила 17 X 1950

ЛИТЕРАТУРА

1. Степанов В. В. Курс обыкновенных уравнений. 1950.