Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XV, 1951

О РЕШЕНИЯХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИРРЕГУЛЯРНОЙ ОСОБОЙ ТОЧКОЙ

В. В. Хорошилов

(Ленинград)

В работе [1] мы занимались исследованием решений системы n уравнений вида

$$\frac{dY}{dt} = YP = Y\left(P_0 + \frac{P_1}{t} + \frac{P_2}{t_2} + \cdots\right) \tag{0.1}$$

где вещественные части корней характеристического уравнения матрицы P_0 различны, P_i — постоянные матрицы.

Методом последовательных приближений Н. П. Еругина при указанных выше свойствах P_0 решения системы уравнений (0.1) были построены в виде рядов, равномерно сходящихся на бесконечном промежутке $t_0 \leqslant \infty$, причем там же были получены асимптотические представления решений уравнения (0.1),

В этой работе исследуются решения системы двух уравнений вида (0.1), но при этом применим другой метод последовательных приближений, построенный тоже Н. П. Еругиным [2]. Этот метод в применении к системе двух уравнений позволяет построить ряды, которые быстрее сходятся по сравнению со сходимостью рядов, построенных в предыдущей работе.

Рассматриваются три случая: первые два, когда P_0 имеет чисто диагональную форму $[a_1, a_2]$ и a_i такие, что

$$1)\quad \operatorname{Re}(a_1) \neq \operatorname{Re}(a_2), \qquad 2)\quad \operatorname{Re}(a_1) = \operatorname{Re}(a_2)$$

третий случай, когда матрица P_0 имеет не простые элементарные делители и приводится к виду

$$\begin{Vmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{Vmatrix}$$

Полученные результаты применяются к исследованию решений линейного уравнения второго порядка.

§ 1. Рассмотрим систему двух уравнений

$$\frac{dX}{dt} = XP \tag{1.1}$$

где P — матрица второго порядка, элементы которой

$$p_{ii} = a_i + \sum_{k=1}^{\infty} p_{ii}^{(k)} \frac{1}{t^k}, \qquad p_{il} = \sum_{k=1}^{\infty} p_{il}^{(k)} \frac{1}{t^k} \qquad (i \neq l;\ i, l = 1, 2) \tag{1.2}$$

суть функции переменной t, регулярные в окрестности $t = \infty$, количества $p_{il}^{(k)}$ — постоянные числа и a_1, a_2 имеют различные вещественные части. Не уменьшая общности, предположим

$$\operatorname{Re}(a_1) > \operatorname{Re}(a_2) \tag{1.3}$$

Точка $t = \infty$ является иррегулярной особой точкой для системы (1)

Теорема 1. Система (1.1) с коэффициентами (1.2) при выполнении условия (1.3) имеет фундаментальную систему решений x_{il}, представимых рядами, равномерно сходящимися на бесконечном промежутке (t_0, ∞).

Доказательство. Введем обозначение $P = P_0 + P_1$, где

$$P_0 = \left\| \begin{matrix} p_{11} & 0 \\ 0 & p_{22} \end{matrix} \right\|, \qquad P_1 = \left\| \begin{matrix} 0 & p_{12} \\ p_{21} & 0 \end{matrix} \right\| \tag{1.4}$$

Будем искать решение системы (1.1) в виде

$$X = e^{\int P_0 dt} Z \tag{1.5}$$

где Z — новая неизвестная матрица. Обозначим

$$\varphi_i = \int_1^t p_{ii}\, dt = a_i t - a_i + p_{ii}^{(1)} \ln t + \left[\sum_{k=2}^{\infty} p_{ii}^{(k)} \frac{1}{(1-k)\, t^{k-1}}\right]_1^t \quad (i = 1, 2) \tag{1.6}$$

причем будем предполагать ради простоты вычисления, что ряды в правой части при $t \geqslant 1$ сходятся.

Для определения Z получаем уравнение

$$\frac{dZ}{dt} = ZP_0 - P_0 Z + ZP_1 \tag{1.7}$$

Рассмотрим вспомогательное уравнение

$$\frac{dZ}{dt} = ZP_0 - P_0 Z + \lambda Z P_1 \tag{1.8}$$

где λ — параметр, не зависящий от t.

Решение этой системы будем искать в виде ряда

$$Z = \sum_{k=0}^{\infty} Z_k \lambda^k \tag{1.9}$$

Подставив в (1.7), получим

$$\begin{aligned} \frac{dZ_0}{dt} &= Z_0 P_0 - P_0 Z_0 \\ \frac{dZ_k}{dt} &= Z_k P_0 - P_0 Z_k + Z_{k-1} P_1 \qquad (k = 1, 2, \ldots) \end{aligned} \tag{1.10}$$

или для элементов $Z_{il}^{(k)}$ матрицы Z_k

$$\frac{dZ_{il}^{(k)}}{dt} = p_{ll}\, Z_{il}^{(k)} - p_{ii}\, Z_{il}^{(k)} + \sum_{s=1}^{2} Z_{is}^{(k-1)}\, p_{sl} \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{1.11}$$

полагая при этом $p_{sl} = 0$ $(s = l)$ согласно (1.4).

Можно считать $Z_0 = I$. Уравнение (1.10) легко интегрируется и получается формула для последовательного вычисления $Z_{il}^{(k)}$:

$$Z_{il}^{(k)} = e^{-r_{il}} \int e^{r_{il}} \sum_{s=1}^{2} r_{is}^{(k-1)}\, p_{sl}\, dt \qquad (p_{sl} = 0,\ s = l) \tag{1.12}$$

где

$$r_{il} = \varphi_i - \varphi_l \qquad (i, l = 1, 2)$$

Промежуток интегрирования в формулах (1.12) берется $(1, t)$, если $< l$, и (∞, t), если $i \geqslant l$. Из (1.11) получаем

$$Z_1 = \left\| \begin{matrix} 0 & e^{-r_{12}} \int\limits_1^t e^{r_{12}} p_{12}\, dt \\ e^{-r_{21}} \int\limits_\infty^t e^{r_{21}} p_{21}\, dt & 0 \end{matrix} \right\|$$

$$Z_2 = \left\| \begin{matrix} \int\limits_\infty^t (p_{21} e^{-r_{12}} \int\limits_1^t e^{r_{12}} p_{12} dt)\, dt & 0 \\ 0 & \int\limits_\infty^t (p_{12} e^{-r_{21}} \int\limits_\infty^t e^{r_{21}} p_{21}\, dt)\, dt \end{matrix} \right\| \qquad (1.13)$$

В последующем для вычисления $Z_{il}^{(\varkappa)}$ будем пользоваться формулами

$$Z_{11}^{(2n)} = \int\limits_\infty^t (p_{21} e^{-r_{12}} \int\limits_1^t e^{r_{12}} p_{12} Z_{11}^{(2n-2)}\, dt)\, dt \qquad (n = 1, 2 \ldots)$$

$$Z_{22}^{(2n)} = \int\limits_\infty^t (p_{12} e^{-r_{21}} \int\limits_\infty^t e^{r_{21}} p_{21} Z_{22}^{(2n-2)}\, dt)\, dt \quad (Z_{il}^{(2n)} = 0) \quad (i \neq l) \qquad (1.14)$$

$$Z_{12}^{(2n+1)} = e^{-r_{12}} \int\limits_1^t e^{r_{12}} p_{12} Z_{11}^{(2n)} dt, Z_{21}^{(2n+1)} = e^{-r_{21}} \int\limits_\infty^t e^{r_{21}} p_{21} Z_{22}^{(2n)}\, dt\, (Z_{ii}^{(2n+1)} = 0)$$

Из (1.2) следует

$$|p_{il}| < \frac{a}{t} \qquad (i \neq l) \qquad (1.15)$$

где a — положительная постоянная. Введем обозначение $\rho_{il} = \mathrm{Re}\,(r_{il})$. Тогда, применяя правило Лопиталя, легко установить, что в силу $\mathrm{Re}\,(a_1) - \mathrm{Re}\,(a_2) > 0$ выражения

$$e^{-\rho_{12}} \int\limits_1^t e^{\rho_{12}} \frac{a}{t}\, dt \to 0, \quad e^{-\rho_{21}} \int\limits_\infty^t e^{\rho_{21}} \frac{a}{t}\, dt \to 0 \quad \text{при } t \to \infty$$

будут малым порядка $O(t^{-1})$ при $t \to \infty$. Следовательно,

$$Z_{il}^{(1)} = O(t^{-1}) \quad \text{на } \infty \qquad (i \neq l)$$

Отсюда следует, что все интегралы в Z_k существуют при $t \to \infty$, причем элементы Z_k с увеличением k при $t \to \infty$ будут малыми повышающихся порядков.

Переходим к доказательству равномерной сходимости построенных рядов для элементов Z_{il} матрицы Z, которая должна удовлетворять уравнению (1.7). Очевидно, имеют место неравенства

$$|Z_k(p_{il})| < Z_k(a / t)$$

где $Z_k(a / t)$ вычисляется при $p_{il} = a / t$ $(i \neq l)$.

Далее переменим во всех $Z_k(a / t)$ пределы интегрирования (∞, t) на (t, ∞), заменим p_{il} через a / t, отбросим знак минус и то, во что превратится после этого Z_k, обозначим через $\overline{Z}_k$. Элементы $\overline{Z}_k$ будут положительными и

$$|Z_k| < \overline{Z}_k$$

Обозначим

$$\{Z_{2m}\}_{il} = Z_m^{(il)}, \qquad \{\overline{Z}_{2m}\}_{il} = \overline{Z}_m^{(il)} \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

и проведем сначала рассуждения относительно элемента Z_{11}.

В новых обозначениях он представлен рядом

$$Z_{11} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} Z_m^{(11)} \tag{1.16}$$

Из выражения для Z_2 имеем

$$Z_1^{(11)} = \int_t^{\infty} \frac{a}{t} e^{-\rho_{12}} \int_1 e^{\rho_1} \frac{a}{t}\, dt\, dt \tag{1.17}$$

Согласно (1.14) из выражения для Z_4 получим

$$Z_2^{(11)} = \int_t^{\infty} \frac{a}{t} e^{-\rho_{12}} \int_1^{t} e^{\rho_{12}} \frac{a}{t} \int_t^{\infty} \frac{a}{t} e^{-\rho_{12}} \int_1^{t} e^{\rho_{12}} \frac{a}{t}\, dt\, dt\, dt\, dt$$

Множитель, стоящий под знаком второго интеграла (слева направо) имеет вид:

$$\int_t^{\infty} \frac{a}{t} e^{-\rho_{12}} \int_1^{t} \frac{a}{t} e^{\rho_{12}}\, dt\, dt$$

Это выражение принимает наибольшее значение, когда предел интегрирования $t = 1$. Обозначим

$$\overline{Z}_1^{(11)}(1) = \int_1^{\infty} \frac{a}{t} e^{-\rho_{12}} \int_1^{t} e^{\rho_{12}} \frac{a}{t}\, dt\, dt$$

Получим

$$\overline{Z}_2^{(11)} < \left(\int_t^{\infty} \frac{a}{t} e^{-\rho_{12}} \int_1^{t} e^{\rho_{12}} \frac{a}{t}\, dt dt\right)\left(\int_1^{\infty} \frac{a}{t} e^{-\rho_{12}} \int_1^{t} e^{\rho_{12}} \frac{a}{t}\, dt\, dt\right) = \overline{Z}_1^{(11)}(t)\, \overline{Z}_1^{(11)}(1) \tag{1.18}$$

Заметим, что если в выражениях Z_k всюду, где стоит нижний предел интегрирования $t = 1$, взять за нижний предел интегрирования t_0, то получим вместо (1.18) равенство

$$\overline{Z}_1^{(11)}(t_0) = \int_{t_0}^{\infty} \frac{a}{t} e^{-\rho_{12}} \int_{t_0}^{\infty} e^{\rho_{12}} \frac{a}{t}\, dt\, dt$$

Выбрав теперь достаточно большим t_0, получим неравенство

$$\overline{Z}_1^{(1)}(t_0) < 1 \tag{1.19}$$

Далее из выражения для Z_6 находим

$$\overline{Z}_3^{(11)} < \overline{Z}_1^{(11)}(t)\, [\overline{Z}_1^{(11)}(1)]^2$$

Продолжая так же дальше, вообще получим

$$\overline{Z}_m^{(11)} < \overline{Z}_1^{(11)}(t)\,[\overline{Z}_1^{(11)}(1)]^{m-1} \tag{1.20}$$

Таким образом,

$$Z_{11} < 1 + \frac{\overline{Z}^{(11)}(t)}{\overline{Z}^{(11)}(1)} \sum_{m=1}^{\infty} (\overline{Z}^{(11)}(1))^m \tag{1.21}$$

Согласно (1.19) заменим $\overline{Z}_1^{(11)}(1)$ через $\overline{Z}_1^{(11)}(t_0) < 1$. Тогда ряд (1.21) сходится. Но тогда ряд (1.16) будет равномерно сходящимся на бесконечном промежутке $t_0 \leqslant t < \infty$.

Переходим к рассмотрению Z_{22}. Он представлен рядом

$$Z_{22} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} Z_m^{(22)} \tag{1.22}$$

Из выражений для Z_2 и Z_4 имеем

$$\overline{Z}_1^{(22)} = \int_t^{\infty} \frac{a}{t} e^{-\rho_{21}} \int_t^{\infty} e^{\rho_{21}} \frac{a}{t}\, dt\, dt$$

$$\overline{Z}_2^{(22)} = \int_t^{\infty} \frac{a}{t} e^{-\rho_{21}} \int_{t_0}^{\infty} e^{\rho_{21}} \frac{a}{t_1} \int_{t_1}^{\infty} e^{-\rho_{21}} \frac{a}{t_2} \int_{t_2}^{\infty} e^{\rho_{21}} \frac{a}{t}\, dt\, dt_1\, dt_2\, dt$$

Под знаком второго интеграла в выражении для $\overline{Z}_2^{(22)}$ стоит произведение

$$e^{\rho_{21}} \frac{a}{t_1} \left[\int_{t_1}^{\infty} e^{-\rho_{21}} \frac{a}{t_2} \int_{t_2}^{\infty} e^{\rho_{21}} \frac{a}{t}\, dt\, dt \right]$$

Так как $t_1 \geqslant t_0$, то выражение в скобках принимает максимальное значение при $t_1 = t_0$. Следовательно, имеем

$$\overline{Z}_2^{(22)} < \int_t^{\infty} \frac{a}{t_0} e^{-\rho_{21}} \int_{t_0}^{\infty} e^{\rho_{21}} \frac{a}{t_1} \int_{t_0}^{\infty} e^{-r_{21}} \frac{a}{t_2} \int_{t_2}^{\infty} e^{r_{21}} \frac{a}{t}\, dt\, dt\, dt\, dt =$$

$$= \frac{1}{2!} \left(\int_t^{\infty} e^{-\rho_{21}} \frac{a}{t} \int_t^{\infty} e^{\rho_{21}} \frac{a}{t}\, dt\, dt \right)^2 = \frac{1}{2!} (\overline{Z}_1^{(22)})^2$$

$$\overline{Z}_2^{(22)} < \frac{1}{2!} (Z_1^{(22)})^2 \tag{1.23}$$

Пользуясь такими же рассуждениями, находим

$$\overline{Z}_3^{(22)} = \int_t^{\infty} \frac{a}{t} e^{-\rho_{21}} \int_t^{\infty} \left(\frac{a}{t} e^{\rho_{21}} \overline{Z}_2^{(22)} \right) dt\, dt < \int_t^{\infty} \left[\left(\frac{a}{t} e^{-\rho_{21}} \int_1^{t} \frac{a}{t} e^{\rho_{21}} \right) \overline{Z}_2^{(22)}\, dt \right] dt$$

Заменяя теперь $\overline{Z}_2^{(22)}$ в силу (1.23) большим значением, получим

$$\overline{Z}_3^{(22)} < \int_t^{\infty} \left[\left(\frac{a}{t} e^{-\rho_{21}} \int_t^{\infty} \frac{a}{t} e^{\rho_{21}}\, dt \right) dt\, \frac{1}{2!} (Z_1^{(22)})^2 \right] = \frac{1}{3!} (\overline{Z}_1^{(22)})^3$$

Продолжая так же дальше, вообще получим оценки

$$\overline{Z}_m^{(22)} < \frac{1}{m!}(\overline{Z}_1^{(22)})^m \tag{1.24}$$

и, следовательно,

$$Z_{22} < 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!}(\overline{Z}_1^{(22)})^m = \exp \overline{Z}_1^{(22)} \tag{1.25}$$

Этот ряд при всех $t \geqslant 1$ сходится. Но тогда ряд (1.22) будет равномерно сходящимся на бесконечном промежутке $t \leqslant t < \infty$. Аналогичными рассуждениями для рядов

$$Z_{il} = \sum_{m=1}^{\infty} Z_m^{(i,l)} \qquad (i \neq t)$$

получим мажоранты

$$Z_{12} < e^{-\rho_{12}} \int_{t_0}^{\infty} e^{\rho_{12}} \frac{a}{t}\, dt \sum_{m=0}^{\infty} [\overline{Z}_1^{(11)}(t_0)]^m$$

$$Z_{21} < e^{-r_{21}} \int_1^t e^{r_{21}} \frac{a}{t}\, dt \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} [\overline{z}_1^{(22)}(t)]^m \tag{1.26}$$

При этом предполагается, что нижний предел интегрирования $t = 1$ заменяется через t_0 во всех интегралах.

Отсюда следует равномерная сходимость рядов, построенных для Z_{12} и Z_{21} на бесконечном промежутке $t_0 \leqslant t < \infty$. Теперь из (1.6) следует

$$e^{\varphi_i} = e^{a_i t}\, t^{p_{ii}^{(1)}}\, \psi_i(t) \qquad (l = 1, 2) \tag{1.27}$$

где $\psi_i(t)$ — регулярная функция и ограниченная при $t \to \infty$.

Таким образом, принимая во внимание формулу (1.5), получаем следующие решения системы (1.1):

$$x_{il} = e^{a_i t}\, t^{p_{ii}^{(1)}}\, Z_{il}(t) \qquad (i, l = 1, 2) \tag{1.28}$$

где, i — номер решения и l — номер функции. Легко видеть, что

$$Z_{il} = O(t^{-1}) \quad (i \neq l), \qquad Z_{ii} = 1 + O(t^{-1})$$

Это показывает на основании (1.3), что решения (1.28) линейно независимы.

§ 2. *Теорема 2. В условиях теоремы (1.1) решения системы уравнений (1.1) представимы асимптотическими рядами вида* (2.1)

$$x_{il} = e^{a_i t}\, t^{p_{ii}^{(1)}} \left(\delta_{il} + \frac{c_{il}^{(1)}}{t} + \frac{c_{il}^{(2)}}{t^2} + \cdots + \frac{c_{il}^{(m)}}{t^m} + \frac{\varepsilon_{il}^{(m)}}{t^m} \right) \qquad (i, l = 1, 2)$$

где

$$\lim_{t \to \infty} \varepsilon_{il}^{(m)} = 0, \qquad \delta_{ii} = 1, \qquad \delta_{il} = 0 \quad (i \neq l), \qquad c_{il}^{(j)} = \text{const}$$

Для доказательства рассмотрим элементы $Z_{il}^{(1)}$ матрицы Z_1, именно

$$Z_{12}^{(1)} = e^{-r_{12}} \int_1 e^{r_{12}} p_{12}\, dt, \quad Z_{21}^{(1)} = e^{-r_{21}} \int_{\infty} e^{r_{21}} p_{21}\, dt \tag{2.2}$$

Согласно формулам (1.6) можно написать e^{φ_i} в виде рядов

$$e^{\varphi_i} = \exp\left\{a_i t + p_{ii}^{(1)} \ln t - a_i + \left[\sum_{k=2}^{\infty} p_{ii}^{(k)} \frac{1}{(1-k)\,t^{k-1}}\right]_1^t\right\} =$$

$$= \exp\{a_i t + p_{ii}^{(1)} \ln t\} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_k^{(i)}}{t^k} \qquad (i = 1, 2)$$

где $d_k^{(i)}$ — постоянные. Так как

$$e^{r_{12}} = e^{\varphi_1 - \varphi_2} = \exp\{(a_1 - a_2)\,t + (p_{11}^{(1)} - p_{22}^{(1)}) \ln t\} \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(12)} \frac{1}{t^k} =$$

$$= e^{\alpha t + \beta \ln t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k^{(12)}}{t^k}$$

$$e^{-r_{12}} = e^{-(\varphi_1 - \varphi_2)} = e^{-\alpha t - \beta \ln t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k^{(12)}}{t^k}$$

где обозначено $a_1 - a_2 = \alpha$, $p_{11}^{(1)} - p_{22}^{(1)} = \beta$, то, полагая тепер

$$\overline{p}_{12} = p_{12} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k^{(12)}}{t^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{p}_{12}^{(k)} \frac{1}{t^k}$$

из (2.2) получим

$$Z_{12}^{(1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k^{(12)}}{t^k} e^{-\alpha t - \beta \ln t} \int_1^t e^{\alpha t + \beta \ln t}\, \overline{p}_{12}\, dt$$

Аналогично рассуждая относительно $Z_{21}^{(1)}$, будем иметь

$$Z_{21}^{(1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k^{(12)}}{t^k} e^{\alpha t + \beta \ln t} \int_{\infty}^t e^{-\alpha t - \beta \ln t}\, \overline{p}_{21}\, dt$$

В таком виде функции $Z_{il}^{(1)}$ $(i \neq l)$ интегрированием по частям разлагаются в асимптотические ряды [1]

$$Z_{il}^{(1)} = \frac{A_{il}^{(1)}}{t} + \frac{A_{il}^{(2)}}{t^2} + \cdots + \frac{A_{il}^{(p)}}{t^p} + \frac{\varepsilon_{il}^{(p)}}{t^p}, \qquad \lim_{t\to\infty} \varepsilon_{il}^{(p)} = 0 \qquad (i \neq l)$$

где p — целое и больше ν.

Отсюда следует, что члены рядов (1.16) и (1.22) разлагаются в асимптотические ряды

$$Z_1^{(ii)} = \frac{A_{ii}^{(1)}}{t^2} + \frac{A_{ii}^{(2)}}{t^2} + \cdots + \frac{A_{ii}^{(p)}}{t^p} + \frac{\varepsilon_{ii}^{(p)}}{t^p}, \qquad \lim_{t\to\infty} \varepsilon_{ii}^{(p)} = 0 \qquad (i=1, 2)$$

$$Z_2^{(ii)} = \frac{B_{ii}^{(1)}}{t^2} + \frac{B_{ii}^{(2)}}{t^3} + \cdots + \frac{B_{ii}^{(p)}}{t^p} + \frac{\varepsilon_{ii}^{(p-1)}}{t^p}, \qquad \lim_{t\to\infty} \varepsilon_{ii}^{(p-1)} = 0 \qquad (i=1, 2)$$

. . . .

$$Z_v^{(ii)} = \frac{L_{ii}^{(1)}}{t^v} + \frac{L_{ii}^{(2)}}{t^{v+1}} + \cdots + \frac{L_{ii}^{(p-v+1)}}{t^p} +$$

$$+ \frac{\varepsilon^{(p-v+1)}}{t^p}, \qquad \lim_{t\to\infty} \varepsilon_{ii}^{(p-v+1)} = 0 \qquad (i=1, 2)$$

Таким образом, согласно (1.16) и (1.22), имеем

$$1+\sum_{m=1}^{\nu} Z_m^{(ii)} = 1+\frac{H_{ii}^{(1)}}{t}+\frac{H_{ii}^{(2)}}{t^2}+\cdots+\frac{H_{ii}^{(p)}}{t^p}+\frac{\delta_{ii}^{(p)}}{t^p}$$

$$\lim_{t\to\infty}\delta_{ii}^{(p)}=0 \quad (i=1,2)$$

С другой стороны, остатки рядов (1.16) и (1.22) согласно рассуждениям § 1 и формулам (1.20), (1.24) имеют оценки

$$|Z_{\nu+1}^{(ii)}+Z_{\nu+2}^{(ii)}+\cdots|<\frac{a_{ii}^{(\nu+1)}}{t^{\nu+1}}+\frac{a_{ii}^{(\nu+2)}}{t^{\nu+2}}+\cdots=\frac{h_{ii}^{(\nu)}}{t^\nu}$$

$$\lim_{t\to\infty} h_{ii}^{(\nu)}=0 \quad (i=1,2)$$

где $a_{ii}^{(j)}$ — некоторые постоянные. Отсюда следует, что действительно существуют асимптотические разложения:

$$Z_{ii}=1+\frac{H_{ii}^{(1)}}{t}+\frac{H_{ii}^{(2)}}{t^2}+\cdots+\frac{H_{ii}^{(\nu)}}{t^\nu}+\frac{\lambda_{ii}^{(\nu)}}{t^\nu},\quad \lim_{t\to\infty}\lambda_{ii}^{(\nu)}=0 \quad (i=1,2)$$

где $H_{ii}^{(j)}$ — некоторые постоянные, которые получаются из предыдущих вычислений.

Проводя аналогичные рассуждения относительно Z_{il} $(i\neq l)$, мы также получим асимптотические разложения:

$$Z_{il}=\frac{H_{il}^{(1)}}{t}+\frac{H_{il}^{(2)}}{t^2}+\cdots+\frac{H_{il}^{(\nu+1)}}{t^{\nu+1}}+\frac{\lambda_{il}^{(\nu+1)}}{t^{\nu+1}},\quad \lim_{t\to\infty}\lambda_{il}^{(\nu+1)}=0 \quad (i\neq l)$$

Окончательно, если теперь в формулах (1.26) функции $\psi_i(t)$ представить также в виде асимптотических рядов, то, подставляя полученные разложения Z_{il} в (1.6), будем иметь ряды (1.25).

Таким образом, теорема 2 доказана.

§ 3. Для последующего рассмотрим тот случай, когда в системе (1.1) свободная матрица есть диагональная матрица $[i\alpha, -i\alpha]$ с чисто мнимыми числами и в выражениях для p_{kl} $(i\neq l)$ коэффициенты $p_{kl}^{(1)}=0$ $(k\neq l)$. Итак, пусть дана система уравнений

$$\frac{dX}{dt}+XP \tag{3.1}$$

где P — матрица с элементами

$$p_{kk}=(-1)^{k+1}i\alpha+\sum_{m=1}^{\infty}p_{kk}^{(m)}\frac{1}{t^m},\qquad p_{kl}=\sum_{m=2}^{\infty}p_{kl}^{(m)}\frac{1}{t^m}\quad (k\neq l) \tag{3.2}$$

Лемма 1. Система уравнений (3.1) с коэффициентами (3.2) имеет фундаментальную систему решений x_{il}, представимых рядами, равномерно сходящимися на бесконечном промежутке (t_0, ∞).

Доказательство этой леммы проводится так же, как и доказательство теоремы 1. Поэтому, чтобы не повторять рассуждений § 1, мы укажем только основные факты, из которых вытекает справедливость леммы.

Итак, не уменьшая общности, предположим

$$\operatorname{Re}(p_{11}^{(1)} - p_{22}^{(1)}) \geqslant 1 \tag{3.3}$$

Обозначим снова $P = P_0 + P_1$, где P_0 и P_1 согласно (1.4), и будем искать решения уравнения (3.1) попрежнему в виде (1.5).

Введем обозначение

$$\gamma_k = \int\limits_1^t p_{kk}dt = \tag{3.4}$$

$$= (-1)^{k+1}\, i\alpha t + p_{kk}^{(1)} \ln t + \sum_{m=2}^{\infty} p_{kk}^{(m)} \frac{1}{(1-m)\, t^{m-1}}\Bigg|_1^t - (-1)^{m+1}\, i\alpha$$

Аналогично, как в § 1, получим

$$Z = \sum_{m=1}^{\infty} Z_m \lambda^m \tag{3.5}$$

где $Z_0 = 1$, матрицы Z_1, Z_2 находятся согласно (1.13), а Z_m $(m = 3, 4, \ldots)$ по формулам (1.14).

Теперь здесь $r_{kl} = \gamma_k - \gamma_l$ $(k, l = 1, 2)$ и пределы интегрирования берутся согласно предположению (3.3). Для случая $\operatorname{Re}(p_{11}^{(1)} - p_{22}^{(1)}) < 1$ надо пределы интегрирования заменить $(1, t)$ на (∞, t) и соответственно обратно. В случае $\operatorname{Re}(p_{11}^{(1)} - p_{22}^{(1)}) = 0$ следует брать пределы во всех интегралах (∞, t). Далее, согласно (3.2) имеют место неравенства

$$| p_{il} | < \frac{a}{t^2} \qquad (i \neq l) \tag{3.6}$$

где a — положительная постоянная. А это значит, что функции [пользуясь попрежнему обозначением $\rho_{kl} = \operatorname{Re}(r_{kl})$]

$$e^{-\rho_{12}} \int\limits_1^t e^{\rho_{12}} \frac{a}{t^2}\, dt \to 0\,, \qquad e^{-\rho_{21}} \int\limits_{\infty}^t e^{\rho_{21}} \frac{a}{t^2}\, dt \to 0 \qquad \text{при } t \to \infty$$

будут малыми порядка $O(t^{-1})$ на ∞. Следовательно,

$$Z_{kl}^{(1)} = O(t^{-1}) \qquad \text{на } \infty$$

Этим самым гарантируется существование всех элементов $Z_{kl}^{(m)}$, причем с увеличением m при $t \to \infty$ они будут малыми повышающихся порядков. Это основное свойство элементов $Z_{kl}^{(m)}$ и позволяет снова получить оценки для членов рядов

$$Z_{kk} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} Z_m^{(k,k)} \tag{3.7}$$

согласно (1.20) и (1.24) в виде формул

$$| Z_m^{(11)} | < \overline{Z}_1^{(11)}(t)\, [Z_1^{(11)}(t_0)]^{m-1}, \qquad | Z_m^{(22)} | < \frac{1}{m!} [\overline{Z}^{(22)}(t)]^m \tag{3.8}$$

где теперь

$$\overline{Z}_1^{(11)}(t_0) = \int\limits_{t_0}^{\infty} \frac{a}{t^2} e^{-\rho_{12}} \int\limits_{t_0}^{\infty} e^{\rho_{12}} \frac{a}{t^2}\, dt, \qquad \overline{Z}_1^{(22)} = \int\limits_t^{\infty} \frac{a}{t^2} e^{-\rho_{21}} \int\limits_t^{\infty} e^{\rho_{21}} \frac{a}{t^2}\, dt$$

Таким образом, согласно (1.21), (1.25), (3.8) получаем

$$|Z_{11}| < 1 + \frac{\overline{Z}_1^{(11)}(t)}{\overline{Z}_1^{(11)}(t_0)} \sum_{m=1}^{\infty} \overline{Z}(t_0)^m, \qquad |Z_{22}| < e^{\overline{Z}_1(22)} \tag{3.9}$$

Выберем теперь t_0 так большим, чтобы $Z_1^{(11)}(t_0) < 1$.

Тогда ряды (3.9) будут сходиться. Но тогда ряды (3.8) будут равномерно сходящимися на бесконечном промежутке $t_0 \leqslant t < \infty$.

Отсюда следует, что ряды

$$Z_{kl} = \sum_{m=1}^{\infty} Z_m^{(k,\, l)} \qquad (k \neq l)$$

согласно (1.26) и (3.9) будут также равномерно сходящимися на промежутке $t_0 \leqslant t < \infty$. Окончательно, принимая во внимание формулу (1.5), получаем следующие решения системы (3.1):

$$x_{kl} = e^{(-1)^{k+1} i\alpha t}\, t^{p_{kk}^{(1)}} Z_{kl}(t) \qquad (k, l = 1, 2) \tag{3.10}$$

причем $Z_{kl} = O(t^{-1})$, $Z_{kk} = 1 + O(t^{-1})$.

Легко видеть, что полученные решения линейно независимы.

§ 4. Из построенных рядов для системы (3.1) легко получить ассимптотические представления решений x_{kl}. Обозначим снова

$$\alpha_1 = i\alpha - (-i\alpha), \qquad \beta = p_{11}^{(1)} - p_{22}^{(1)}$$

Тогда, следуя рассуждениям § 2, придем к функциям вида

$$e^{-\alpha_1 t - \beta \ln t} \int_{t_0}^{t} e^{\alpha_1 t + \beta \ln t} \frac{1}{t^n}\, dt, \qquad e^{\alpha_1 t + \beta \ln t} \int_{\infty}^{t} e^{-\alpha_1 t - \beta \ln t} \frac{1}{t^n}\, dt$$

где согласно (3.3) $\beta \geqslant 1$, $n \geqslant 2$. Интегрированием по частям можно написать асимптотические разложения этих функций по степеням t^{-1}. Далее, проводя рассуждения так же, как это сделано в § 2, получим, таким образом, асимптотические разложения решений системы (3.1) в виде рядов

$$x_{kl} = e^{(-1)^{k+1} i\alpha t}\, t^{p_{hk}^{(1)}} \left(\delta_{kl} + \frac{M_{kl}^{(1)}}{t} + \cdots + \frac{M_{kl}^{(n-1)}}{t^{n-1}} + \frac{\varepsilon_{kl}^{(n-1)}}{t^{n-1}} \right) \tag{4.1}$$

где

$$\lim_{t \to \infty} \varepsilon_{kl}^{(n-1)} = 0, \qquad \delta_{kk} = 1, \qquad \delta_{kl} = 0 \quad (k \neq l) \quad M_{kl}^{(i)} = \text{const}$$

Таким образом, справедлива следующая лемма.

Лемма 2. Фундаментальная система решений системы уравнений (3.1) с коэффициентами (3.2) представима асимптотическими рядами вида (4.1).

Это утверждение остается в силе, если $\beta = p_{11}^{(1)} - p_{22}^{(1)} < 1$; в этом случае только надо поменять пределы (t_0, ∞) на (∞, t) и обратно, причем в случае $\beta = 0$ везде пределы брать (∞, t).

§ 5. Пусть дана система двух уравнений

$$\frac{dX}{dt} = XP = X\left(P^{(0)} + \frac{P^{(1)}}{t} + \frac{P^{(2)}}{t^2} + \cdots\right) \tag{5.1}$$

где $P^{(k)}$ — постоянные матрицы второго порядка. Точка $t = \infty$ является иррегулярной особой точкой для (5.1).

Рассмотрим тот случай, когда $P^{(0)}$ имеет чисто диагональную форму $P^{(0)} = [a_1, a_2]$. Положим теперь, что числа a_1 и a_2 имеют одну и ту же вещественную часть a. Вводя вместо X новую искомую матрицу $X = e^{at}X_1$, мы получим для X_1 уравнение вида (5.1), в котором $P^{(0)}$ есть чисто диагональная матрица $[i\alpha_1, i\alpha_2]$ с чисто мнимыми числами на главной диагонали. Будем предполагать, что уравнение (5.1) уже обладает этим свойством. Далее, не уменьшая общности рассуждений, предположим еще, что $\alpha_1 = -\alpha_2 = \alpha$, т. е, $P^{(0)} = [i\alpha_1 - i\alpha]$. Итак, пусть матрица P задана элементами

$$p_{kk} = (-1)^{k+1}\, i\alpha + \sum_{m-1}^{\infty} p_{kk}{}^{(m)}\frac{1}{t^m}, \qquad p_{kl} = \sum_{m=1}^{\infty} p_{kl}{}^{(m)}\frac{1}{t^m} \quad (k \neq l) \tag{5.2}$$

где $p_{kl}{}^{(m)}$ — постоянные числа. Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема 3. Система уравнений (5.1) с коэффициентами (5.2) имеет фундаментальную систему решений x_{kl}, представимых рядами, равномерно сходящимися на бесконечном промежутке (t_0, ∞).

Для доказательства этой теоремы приведем уравнения (5.1) к виду рассмотренной в § 3 системы уравнений (3.1) и затем применим лемму 1.

Введем новую неизвестную матрицу Y по формуле

$$X = Ye^{[\ln t,\, 0]} \tag{5.3}$$

Подставляя (5.3) в (5.1), получим

$$\frac{dY}{dt} = Y\left[-\frac{1}{t},\quad 0\right] + Y\begin{Vmatrix} p_{11} & tp_{12} \\ \frac{1}{t}p_{21} & p_{22}\end{Vmatrix}$$

или

$$\frac{dY}{dt} = Y\left\{\begin{Vmatrix} i\alpha & p_{12}{}^{(1)} \\ 0 & -i\alpha\end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} \overline{p}_{11}{}^{(1)} & p_{12}{}^{(2)} \\ 0 & p_{22}{}^{(1)}\end{Vmatrix}\frac{1}{t}\right\} + YP_1(t^{-2}) \tag{5.4}$$

где $P_1(t^{-2})$ — матрица, элементы которой начинаются со степени не ниже t^{-2}, и обозначено $\overline{p}_{11}{}^{(1)} = p_{11}{}^{(1)} - 1$.

Применим теперь к уравнению (5.4) подстановку

$$Y = US$$

где U — новая неизвестная матрица и

$$S = \begin{Vmatrix} 1 & \frac{p_{12}{}^{(1)}}{2i\alpha} \\ 0 & 1\end{Vmatrix} \tag{5.5}$$

Получим

$$\frac{dU}{dt} = U\left\{\begin{Vmatrix} i\alpha & 0 \\ 0 & -i\alpha\end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} \overline{p}_{11}{}^{(1)} & \overline{p}_{12}{}^{(1)} \\ 0 & p_{22}{}^{(1)}\end{Vmatrix}\frac{1}{t}\right\} + UP_2(t^{-2})$$

Здесь обозначено

$$\overline{p}_{12}^{(1)} = p_{12}^{(2)} + \frac{p_{12}^{(1)}}{2i\alpha}\left[p_{22}^{(1)} - p_{11}^{(1)} + 1\right]$$

Эту систему представим в следующем виде:

$$\frac{dU}{dt} = U\left[P_0 + P_2(t^{-1})\right] = U\overline{P} \tag{5.6}$$

где $\overline{P} = P_0 + P_2(t^{-2})$ и P_0 — матрица с элементами

$$\{P_0\}_{kl} = p_{kl}^{(0)}$$

причем

$$p_{11}^{(0)} = i\alpha + \overline{p}_{11}^{(1)} t^{-1}, \qquad p_{12}^{(0)} = \overline{p}_{12}^{(1)} t^{-1} \tag{5.7}$$

$$p_{21}^{(0)} = 0, \qquad p_{22}^{(0)} = -i\alpha + p_{22}^{(1)} t^{-1}$$

Поставим теперь себе целью уничтожить элементы $p_{12}^{(1)} t^{-1}$ в матрице P_0, т. е. привести матрицу, стоящую перед степенью t^{-1}, к чисто диагональному виду и так, чтобы матрица $[i\alpha, \ -i\alpha]$ осталась без изменения. Для этого воспользуемся идеей преобразования квадратной матрицы к треугольному виду[2]. Введем неизвестную матрицу V по формуле

$$V = UQ \tag{5.8}$$

где

$$Q = \left\| \begin{matrix} 1 & \tau(t) \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\|, \qquad \Delta(Q) = 1, \qquad Q^{-1} = \left\| \begin{matrix} 1 & -\tau(t) \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\|$$

Подставляя (5.8) в (5.6), получим

$$\frac{dV}{dt} = V\left(Q^{-1}\overline{P}Q + Q^{-1}\frac{dQ}{dt}\right) = V(R_0 + R_1) = VR \tag{5.9}$$

г обозначено

$$R = R_0 + R_1, \qquad R_0 = Q^{-1}P_0Q + Q^{-1}\frac{dQ}{dt}, \qquad R_1 = Q^{-1}P_2(t^{-2})\,Q \tag{5.10}$$

Пусть

$$\{R_0\}_{kl} = r_{hl}^{(0)}, \qquad \{R_1\}_{kl} = r_1^{(k,\,l)}$$

Из второй формулы (5.10), в чем нетрудно убедиться, следует

$$r_{kk}^{(0)} = p_{kk}^{(0)}, \qquad r_{21}^{(0)} = 0, \qquad r_{12}^{(0)} = \tau' + \tau\left(p_{11}^{(0)} - p_{22}^{(0)}\right) + p_{12}^{(0)} \tag{5.11}$$

Подставляя из (5.7) значение $p_{kl}^{(0)}$ в выражение для $r_{12}^{(0)}(t)$, получим

$$r_{12}^{(0)} = \tau' + \tau\left(\overline{p}_{11}^{(1)} - p_{22}^{(1)}\right)\frac{1}{t} + 2i\alpha\tau + \overline{p}_{12}^{(1)}\frac{1}{t}$$

Выберем теперь τ так, чтобы $2i\alpha\tau + \overline{p}_{12}^{(1)} t^{-1} = 0$. Тогда

$$\tau = \frac{\lambda_{12}^{(1)}}{t}, \qquad r_{12}^{(0)}(t) = \frac{\lambda_{12}^{(2)}}{t^2} \tag{5.12}$$

где обозначено

$$\lambda_{12}^{(1)} = -\frac{\overline{p}_{12}^{(1)}}{2\alpha i}, \qquad \lambda_{12}^{(2)} = \lambda_{12}^{(1)}\left(\overline{p}_{11}^{(1)} - p_{22}^{(1)} - 1\right)$$

Отсюда, принимая во внимание равенства (5.7), (5.9) и формулу $r_{kl} = r_{kl}^0 + r_1^{(k,l)}$, уравнение (5.9) напишем в форме

$$\frac{dV}{dt} = VR \tag{5.13}$$

где элементы матрицы R выражаются формулами (5.14)

$$r_{kk} = (-1)^{k+1} i\alpha + r_{kk}'^{(1)} \frac{1}{t} + \sum_{m=2}^{\infty} r_{kk}^{(m)} \frac{1}{t^{(m)}}, \qquad r_{kl} = \sum_{m=2}^{\infty} r_{kl}^{(m)} \frac{1}{t^m} \quad (k \neq l)$$

Здесь

$$r_{11}^{(1)} = \bar{p}_{11}^{(1)} = p_{11}^{(1)} - 1, \qquad r_{22}^{(1)} = p_{22}^{(1)}$$

Выражение $r_{kl}^{(m)}$ дается предыдущими вычислениями. Полученная система уравнений (5.13) с коэффициентами (5.14) имеет вид системы уравнений (3.1). На основании леммы 1 решения системы (5.13) выражаются формулами

$$V_{kl} = e^{(-1)^{k+1} i\alpha t} t^{r_{kk}^{(1)}} \zeta_{kl}(t) \qquad (k, l = 1, 2) \tag{5.15}$$

где $\zeta_{kl}(t)$ — ряды, равномерно сходящиеся на бесконечном промежутке $t_0 \leqslant t < \infty$, причем $\zeta_{kk}(t) \to 1$, $\zeta_{kl}(t) \to 0$ $(k \neq l)$ при $t \to \infty$.

Окончательно, принимая во внимание формулы (5.3), (5.5), (5.8) и первую из (5.12), решения системы уравнений (5.1) получим в виде

$$\begin{aligned} x_{11} &= e^{i\alpha t} t^{p_{11}^{(1)}} z_{11}, & x_{12} &= e^{i\alpha t} t^{p_{11}^{(1)}} z_{12} \\ x_{21} &= e^{-i\alpha t} t^{p_{22}^{(1)}+1} z_{21}, & x_{22} &= e^{-i\alpha t} t^{p_{22}^{(1)}} z_{22} \end{aligned} \tag{5.16}$$

где z_{kl} — ряды, равномерно сходящиеся на бесконечном промежутке $t_0 \leqslant t < \infty$, и, как нетрудно убедиться:

$$z_{kl} = O(t^{-1}), \qquad z_{kk} = 1 + O(t^{-1})$$

Это показывает, что решения (5.16) линейно независимы. Таким образом, теорема 3 полностью доказана.

§ 6. Рассмотрим асимптотические представления решений уравнения (5.1). На основании леммы 2 § 4 заключаем, что решения (§ 2) уравнения (5.13) представимы асимптотическими рядами вида (4.1). Но тогда решения (5.16) системы уравнений (5.1) можно представить в виде формул

$$\begin{aligned} x_{11} &= e^{i\alpha t} t^{p_{11}^{(1)}} s_{11}, & x_{12} &= e^{i\alpha t} t^{p_{11}^{(1)}} s_{12} \\ x_{21} &= e^{-i\alpha t} t^{p_{22}^{(1)}+1} s_{21}, & x_{22} &= e^{-i\alpha t} t^{p_{22}^{(1)}} s_{22} \end{aligned} \tag{6.1}$$

где s_{kl} представляют собой асимптотические ряды вида

$$s_{kl} = \delta_{kl} + \frac{c_{kl}^{(1)}}{t} + \frac{c_{kl}^{(2)}}{t^2} + \cdots + \frac{c_{kl}^{(m-1)}}{t^{m-1}} + \frac{\varepsilon_{kl}^{(m-1)}}{t^{m-1}} \qquad (k, l = 1, 2)$$

$$\delta_{kk} = 1, \quad \delta_{kl} = 0 \quad (k \neq l), \qquad \lim_{t \to \infty} \varepsilon_{kl}^{(m-1)} = 0 \qquad (k, l = 1, 2)$$

Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 4. Решения системы уравнений (5.1) с коэффициентами (5.2) представимы асимптотическими рядами вида (6.1).

§ 7. Рассмотрим теперь случай, когда свободный член матрицы P имеет не простые элементарные делители. Именно рассмотрим систему

$$\frac{dX}{dt} = X \begin{Vmatrix} a + p_{11} & p_{12} \\ 1 + p_{21} & a + p_{22} \end{Vmatrix} \qquad (7.1)$$

где

$$p_{kl} = \sum_{m=1}^{\infty} p_{kl}^{(m)} \frac{1}{t^m} \qquad (k, l = 1, 2)$$

Точка $t = \infty$ будет иррегулярной особой точкой для системы (7.1). Пользуясь предыдущими результатами, докажем следующую теорему.

Теорема 5. Система уравнений (7.1) при $p_{12}^{(1)} \neq 0$ *имеет фундаментальную систему решений* x_{kl}, *представимых рядами, равномерно сходящимися на бесконечном промежутке* $t_0 \leqslant t < \infty$.

В случае $p_{12}^{(1)} = 0$ она вырождается в систему уравнений с особой регулярной точкой $t = \infty$. Нетрудно убедиться в том, что, применяя последовательно к системе (7.1) подстановки

$$X = X_1 e^{at}, \qquad t = \tau^2, \qquad X_1 = Y e^{[\ln \tau,\, 0]} \qquad (7.2)$$

где τ — новая независимая переменная, X, Y — последовательно вводимые новые неизвестные матрицы, получим

$$\frac{dY}{dt} = Y \left[\begin{Vmatrix} 0 & 2p_{12}^{(1)} \\ 2 & 0 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 2p_{11}^{(1)} - 1 & 0 \\ 0 & 2p_{22}^{(1)} \end{Vmatrix} \frac{1}{\tau} \right] + Y P_1 \left(\frac{1}{\tau^2} \right) \qquad (7.3)$$

Характеристическое уравнение свободной матрицы для этой системы имеет вид:

$$\rho^2 - 4p_{12}^{(1)} = 0, \qquad \rho_1 = 2\sqrt{p_{12}^{(1)}}, \qquad \rho_2 = -\rho_1 \qquad (7.4)$$

Применим к (7.3) подстановку

$$Y = US \qquad (7.5)$$

где U — новая неизвестная матрица и

$$S = \begin{Vmatrix} 1 & -\sqrt{p_{12}^{(1)}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{p_{12}^{(1)}}} & 1 \end{Vmatrix}$$

получим

$$\frac{dU}{dt} = U \left[\begin{Vmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_2 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} \sigma & \bar{p}_{12}^{(1)} \\ \bar{p}_{21}^{(1)} & \sigma \end{Vmatrix} \frac{1}{\tau} \right] + U P_2 (t^{-2}) \qquad (7.6)$$

Здесь обозначено

$$\sigma = p_{11}^{(1)} + p_{22}^{(1)} - \frac{1}{2}$$

Случай 1. Пусть $p_{12}^{(1)} > 0$. В этом случае мы получаем из (7.6) систему вида (1.1). На основании теоремы 1 решения уравнения (7.6) имеют вид:

$$u_{i1} = e^{\rho_i \tau} \tau^{\sigma} \zeta_{i1}(\tau), \qquad u_{i2} = e^{\rho_i \tau} \tau^{\sigma} \zeta_{i2}(\tau) \qquad (i = 1, 2) \qquad (7.7)$$

где $\zeta_{il}(\tau)$ представляют собой ряды, равномерно сходящиеся на бесконечном промежутке $\tau_0 \leqslant \tau < \infty$. Принимая во внимание (7.2) и (7.5), окончательно решения для (7.1) в случае $p_{12}^{(1)} > 0$ получим в виде

$$\begin{aligned} x_{11} &= e^{at+\rho_1\sqrt{t}}\, t^{\frac{1}{2}(\sigma+1)} z_{11}(t), & x_{12} &= e^{at+\rho_1\sqrt{t}}\, t^{\frac{1}{2}(\sigma+1)} z_{12}(t) \\ x_{21} &= e^{at+\rho_2\sqrt{t}}\, t^{\frac{1}{2}(\sigma+2)} z_{21}(t), & x_{22} &= e^{at+\rho_2\sqrt{t}}\, t^{\frac{1}{2}\sigma} z_{22}(t) \end{aligned} \tag{7.8}$$

$$z_{il}(t) = O(t^{-2}) \quad (i \neq l), \qquad z_{ii}(t) = 1 + O(t^{-2})$$

Линейная независимость этих решений очевидна.

Случай 2. Пусть $p_{12}^{(1)} < 0$. Введем обозначение $p_{12}^{(1)} = -\beta$, где $\beta > 0$. Тогда согласно (7.4) в уравнении (7.6) ρ_1, ρ_2 будут чисто мнимыми числами вида $\rho_1 = i2\sqrt{\beta}$, $\rho_2 = -i2\sqrt{\beta}$. Теперь уравнение (7.6) приобретает вид уравнения (5.1) с коэффициентами (5.4). Следовательно, на основании теоремы 3 решения системы (7.6) согласно (5.16) выражаются формулами

$$\begin{aligned} u_{11} &= e^{\rho_1\tau}\tau^{\sigma}\zeta_{11}(\tau), & u_{12} &= e^{\rho_1\tau}\tau^{\sigma}\zeta_{12}(\tau) \\ u_{21} &= e^{\rho_2\tau}\tau^{\sigma+1}\zeta_{21}(\tau), & u_{22} &= e^{\rho_2\tau}\tau^{\sigma}\zeta_{22}(\tau) \end{aligned} \tag{7.9}$$

где $\zeta_{il}(\tau)$ — ряды, равномерно сходящиеся на бесконечном промежутке $\tau_0 \leqslant \tau < \infty$, причем $\zeta_{il} = O(\tau^{-1})$ $(i \neq l)$, $\zeta_{ii} = 1 + O(\tau^{-1})$.

Принимая во внимание (7.2) и (7.5), окончательно решения системы (7.1) в случае $p_{12}^{(1)} < O$ получим

$$\begin{aligned} x_{11} &= e^{at+\rho_1\sqrt{t}}\, t^{\frac{1}{2}(\sigma+1)} \eta_{11}(t), & x_{12} &= e^{at+\rho_1\sqrt{t}}\, t^{\frac{1}{2}(\sigma+1)} \eta_{12}(t) \\ x_{21} &= e^{at+\rho_2\sqrt{t}}\, t^{\frac{1}{2}(\sigma+2)} \eta_{21}(t), & x_{22} &= e^{at+\rho_2\sqrt{t}}\, t^{\frac{1}{2}\sigma} \eta_{22}(t) \end{aligned} \tag{7.10}$$

где $\eta_{il}(t)$ — ряды, равномерно сходящиеся на бесконечном промежутке $t_0 \leqslant t < \infty$:

$$\eta_{il}(t) = O(t^{-\frac{1}{2}}) \qquad (i \neq l), \qquad \eta_{ii}(t) = 1 + O(t^{-\frac{1}{2}})$$

Случай 3. Пусть $p_{12}^{(1)} = O$. В этом случае подстановка

$$X = Ye^{[at+\ln t,\ at]}$$

где Y — новая неизвестная матрица, переводит систему (7.1) в систему уравнений вида

$$\frac{dY}{dt} = Y\left(\frac{P_1}{t} + \frac{P_2}{t^2} + \cdots\right)$$

для которой точка $t = \infty$ является регулярной особой точкой. Таким образом, теорема 5 полностью доказана.

§ 8. Рассмотрим асимптотическое представление решений уравнения

$$\frac{dX}{dt} = X \begin{Vmatrix} a + p_{11} & p_{12} \\ 1 + p_{21} & a + p_{22} \end{Vmatrix} \tag{8.1}$$

где

$$p_{il} = \sum_{m=1}^{\infty} p_{il}^{(m)} \frac{1}{t^m} \qquad (i, l = 1, 2), \qquad p_{12}^{(1)} \neq 0$$

В случае $p_{12}^{(1)} > 0$ согласно теореме 2 § 2 мы можем написать асимптотические разложения решений (7.7) уравнения (7.6) по степеням τ^{-1}, а тогда, заменяя τ через $t^{1/2}$, получим окончательно из (7 8) асимптотические представления решений x_{il} системы уравнений (8.1) в виде

$$\begin{aligned} x_{11} &= e^{at+\rho_1\sqrt{t}}\, t^{\frac{1}{2}(\sigma+1)} s_{11}, & x_{12} &= e^{at+\rho_1\sqrt{t}}\, t^{\frac{1}{2}(\sigma+1)} s_{12} \\ x_{21} &= e^{at+\rho_2\sqrt{t}}\, t^{\frac{1}{2}(\sigma+2)} s_{21}, & x_{22} &= e^{at+\rho_2\sqrt{t}}\, t^{\frac{1}{2}\sigma} s_{22} \end{aligned} \tag{8.2}$$

где s_{il} — асимптотические ряды по степеням $t^{-\frac{1}{2}}$ и имеет вид:

$$s_{il} = \delta_{il} + \frac{A_{il}^{(1)}}{t^{1/2}} + \frac{A_{il}^{(2)}}{t} + \cdots + \frac{A_{il}^{(m)}}{t^{m/2}} + \frac{\lambda_{il}^{(m)}}{t^{m/2}}, \quad \lim_{t\to\infty} \lambda_{il}^{(m)} = 0 \quad (i, l = 1, 2)$$
$$\delta_{ii} = 1, \qquad \delta_{il} = 0 \quad (i \neq l), \qquad A_{il}^{(j)} = \text{const} \tag{8.3}$$

При $p_{12}^{(1)} < 0$ на основании теоремы 4 § 6 мы можем написать решения (7.9) в виде асимптотических рядов по степеням t^{-1}.

Далее согласно (7.10) окончательно получаем асимптотические представления решений x_{il} уравнения (8.1) в случае $p_{12}^{(1)} < 0$ в виде формул

$$\begin{aligned} x_{11} &= e^{at+\rho_1\sqrt{t}}\, t^{\frac{1}{2}(\sigma+1)} s_{11}', & x_{12} &= e^{at+\rho_1\sqrt{t}}\, t^{\frac{1}{2}(\sigma+1)} s_{12}' \\ x_{21} &= e^{at+\rho_2\sqrt{t}}\, t^{\frac{1}{2}(\sigma+2)} s_{21}', & x_{22} &= e^{at+\rho_2\sqrt{t}}\, t^{\frac{1}{2}\sigma} s_{22}' \end{aligned} \tag{8.4}$$

где s_{21}' — асимптотические ряды по степеням $t^{-\frac{1}{2}}$ вида (8.3).

Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 6. Фундаментальная система решений x_{il} уравнения (8.1) при $p_{12}^{(1)} > 0$ представима асимптотическими рядами вида (8.2); если $p_{12}^{(1)} < 0$, то рядами вида (8.4).

§ 9. Применим полученные результаты к исследованию линейного дифференциального уравнения вида

$$y'' + \left(a_0 + \frac{a_1}{t} + \frac{a_2}{t^2} + \cdots\right) y' + \left(b_0 + \frac{b_1}{t} + \frac{b_2}{t^2} + \cdots\right) y = 0 \tag{9.1}$$

Точка $t = \infty$ является иррегулярной особой точкой для этого уравнения.

Обычное введение функций $y_1 = y$, $y_2 = y'$ приводит к системе двух уравнений

$$\frac{dY}{dt} = YP = Y\left[P_0 + \frac{P_1}{t} + \frac{P_2}{t^2} + \cdots\right] \tag{9.2}$$

где

$$P_0 = \left\| \begin{matrix} 0 & -b_0 \\ 1 & -a_0 \end{matrix} \right\|, \qquad P_i \text{ — постоянные матрицы}$$

Характеристическое уравнение для матрицы P_0 имеет вид:

$$\alpha^2 + a_0\alpha + b_0 = 0 \tag{9.3}$$

Если теперь корни α_1, α_2 этого уравнения будут такими, что

1) $\operatorname{Re}(\alpha_1) \neq \operatorname{Re}(\alpha)$, 2) $\operatorname{Re}(\alpha_1) = \operatorname{Re}(\alpha_2)$, 3) $\alpha_1 = \alpha_2$

то применим указанный выше метод последовательных приближений, и решения y_{i1}, y_{i2} системы (9.2) будут представлять собою ряды, равномерно сходящиеся на бесконечном промежутке $t_0 \leqslant t < \infty$, причем из посторонних рядов легко получить и асимптотические представления этих решений.

Таким образом, теоремы, доказанные в предыдущих параграфах относительно решений системы двух уравнений, будут справедливы и относительно решений α_1, α_2 линейного уравнения (9.1), для этого их надо только перефразировать соответственно случаям: 1), 2), 3) для корней α_1, α_2 уравнения (9.3).

Рассмотрим примеры. Уравнение Уиттекера имеет вид [3])

$$\frac{d^2W}{dt^2}+\left(-\frac{1}{4}+\frac{K}{t}+\frac{1/_4-m^2}{t^2}\right)W=0 \tag{9.4}$$

Здесь t — вещественная переменная и $t=\infty$ является иррегулярной особой точкой. Характеристическое уравнение и корни его будут

$$\alpha^2-\frac{1}{4}=0, \qquad \alpha_1=\frac{1}{2}, \qquad \alpha_2=-\frac{1}{2}$$

Введем новые функции y_1, y_2 равенствами

$$W=y_1+y_2, \qquad \frac{dW}{dt}=\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2$$

и обозначим

$$b_1=k, \qquad b_2=\frac{1}{4}-m^2, \qquad a_1=a_2=0$$

Эти равенства приводят к системе уравнений

$$\frac{dY}{dt}=Y\left(P_0+\frac{P_1}{t}+\frac{P_2}{t^2}+\cdots\right) \tag{9.5}$$

где

$$P_0=\begin{Vmatrix}\alpha_1 & 0\\ 0 & \alpha_2\end{Vmatrix}$$

и P_1 и P_2 — матрицы с элементами

$$p_{il}^{(m)}=(-1)^{l+1}\frac{\alpha_1 a_m+b_m}{\alpha_2-\alpha_1} \qquad (m=1,\ 2)$$

и, очевидно,

$$p_{11}^{(1)}=-k, \qquad p_{22}^{(1)}=k$$

В силу $\alpha_1\neq\alpha_2$ на основании теоремы 1 решения системы (9.5) представимы рядами, равномерно сходящимися на бесконечном промежутке (t_0, ∞), и даются формулами (1.28). Окончательно решения уравнения (9.4) получим в виде

$$W_1=e^{\frac{1}{2}t}\,t^{-k}Z_1(t), \qquad W_2=e^{-\frac{1}{2}t}\,t^{k}\,Z_2(t)$$

где $Z_i(t)$ — ряды, равномерно сходящиеся на бесконечном промежутке (t_0, ∞). Отсюда получаем согласно теореме 2 и асимптотические представления:

$$W_i=e^{(-1)^{i+1}\frac{1}{2}t}\,t^{(-1)^i k}\left(1+\frac{c_{i1}}{t}+\frac{c_{i2}}{t^2}+\cdots+\frac{c_{im}}{t^m}+\frac{\lambda_{im}}{t^m}\right) \quad (i=1,\ 2)$$

$$\lim\lambda_{im}=0 \quad \text{при} \quad t\to\infty$$

В качестве второго примера рассмотрим уравнение Бесселя

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{1}{t}\frac{dy}{dt} + \left(1 - \frac{n^2}{t^2}\right)y = 0 \tag{9.6}$$

где n — параметр, принимающий конечные значения. Точка $t = \infty$ является иррегулярной особой точкой для этого уравнения. Применяя подстановку $y = t^{-\frac{1}{2}}u$, где u — новая неизвестная функция, получим

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \left(1 - \frac{n^2}{t^2}\right)u = 0 \tag{9.7}$$

Характеристическое уравнение и корни его будут

$$\alpha^2 + 1 = 0, \qquad \alpha_1 = i, \qquad \alpha_2 = -i$$

Указанный выше метод (теорема 3) позволяет получить решения (9.7) в виде равномерно сходящихся рядов на промежутке $t_0 \leqslant t \leqslant \infty$, где $t_0 \geqslant 1$, и решения для (9.6) выражаются в виде формул

$$y_k = e^{(-1)^{k+1}it}\, t^{-\frac{1}{2}} Z_k(t) \qquad (k = 1,\ 2) \tag{9.8}$$

где $Z_k(t)$ — ряды, равномерно сходящиеся на бесконечном промежутке $t_0 \leqslant t < \infty$, причем

$$Z_k = 1 + O(t^{-1}) \qquad (k = 1,\ 2)$$

Отсюда получаем и асимптотические разложения:

$$y_k = e^{(-1)^{k+1}\, it}\, t^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{H_k^{(1)}}{t} + \frac{H_k^{(2)}}{t^2} + \cdots + \frac{H_k^{(m-1)}}{t^{m-1}} + \frac{\varepsilon_k^{(m-1)}}{t^{m-1}}\right)$$

$$\lim_{t\to\infty} \varepsilon_k^{(m-1)} = 0 \qquad (k = 1,\ 2)$$

Замечание. Рассуждения, проведенные относительно случаев

$$\mathrm{Re}(a_1) = \mathrm{Re}(a_2), \qquad P_0 = \left\| \begin{matrix} a & 0 \\ 1 & a \end{matrix} \right\| \tag{9.9}$$

можно также провести применением метода последовательных приближений, изложенного в предыдущей работе [1].

Поступила 30 X 1950

ЛИТЕРАТУРА

1. Хорошилов В. В. О решениях систем линейных дифференциальных уравнений с иррегулярной особой точкой. Ученые записки Ленинградского университета, серия математических наук. 1950. Вып. 19. № 137.

2. Еругин Н. П. Приводимые системы. Труды Математического института им. В. А. Стеклова. Т. XIII.

3. Смирнов В. И. Курс высшей математики. 1949. Т. III.