

## МИКРОСТРУКТУРА ТУРБУЛЕНТНОГО ПОТОКА

А. М. Обухов, А. М. Яглом

(Москва)

В 1941 г. А. Н. Колмогоровым<sup>[1,2]</sup> была предложена общая теория локально изотропной турбулентности, позволившая предсказать ряд закономерностей турбулентного потока при больших числах Рейнольдса. Наиболее важные из этих закономерностей — зависимость среднего квадрата разности скоростей в двух точках от их взаимного расстояния и зависимость коэффициента турбулентной диффузии от масштаба явления — были получены А. Н. Колмогоровым<sup>[1,2]</sup> и А. М. Обуховым<sup>[3]</sup> в том же 1941 г.; в настоящее время эти закономерности экспериментально подтверждены непосредственными измерениями, производившимися и в аэродинамических трубах в лаборатории<sup>[4,5]</sup> и в атмосфере<sup>[6,7]</sup>, а также в океане<sup>[8]</sup><sup>1</sup>. В последние годы в лаборатории атмосферной турбулентности Геофизического института АН СССР был проведен ряд исследований, развивающих далее указанную теорию; результаты некоторых из этих исследований изложены в настоящей статье<sup>2</sup>.

Основные физические представления, лежащие в основе теории А. Н. Колмогорова, можно кратко просуммировать следующим образом<sup>3</sup>. Турбулентный поток при больших числах Рейнольдса рассматривается как результат наложения возмущений (вихрей) самых разнообразных масштабов. Лишь самые крупные из этих вихрей возникают непосредственно из-за неустойчивости осредненного течения; масштаб  $L$  этих крупнейших вихрей сравним с расстоянием, на котором существенно меняется скорость осредненного потока (например, в турбулентном пограничном слое — с расстоянием до стенки)<sup>4</sup>.

Движение наиболее крупных вихрей, в свою очередь, оказывается неустойчивым и порождает более мелкие вихри второго порядка, вихри второго порядка порождают более мелкие вихри третьего порядка и т. д. вплоть до мельчайших вихрей, оказывающихся уже устойчивыми (т. е. таких, что характеризующее их число Рейнольдса меньше критического).

Поскольку для всех вихрей, кроме наименьших из них, характерное число Рейнольдса велико, то на их движение вязкость не оказывает заметного влияния. Следовательно, движение всех не слишком малых вихрей не сопровождается заметной диссипацией энергии: вихри  $n$ -го порядка практически всю энергию, получае-

<sup>1</sup> Приложения этих закономерностей к некоторым вопросам физики атмосферы можно найти в работах<sup>[9,10]</sup>.

<sup>2</sup> Помимо результатов, содержащихся в настоящей статье, можно указать также на теоретическое исследование структуры поля температур (или концентраций какой-либо пассивной примеси) в турбулентном потоке, изложенное в<sup>[11,12]</sup>. Приложения этих последних результатов можно найти в работах<sup>[13,14]</sup>.

<sup>3</sup> Более подробное изложение см. в книге<sup>[15]</sup>.

<sup>4</sup> Заметим, что длина  $L$  совпадает с длиной пути смешения, вводимой в полуэмпирической теории турбулентности.

мую ими от вихрей  $(n - 1)$ -го порядка, затрачивают на образование вихрей  $(n + 1)$ -го порядка. Движение же мельчайших из существующих вихрей «ламинарно» и уже существенно зависит от молекулярной вязкости; в этих мельчайших вихрях вся энергия, передающаяся вдоль каскада вихрей, переходит в теплоту.

Движение всех вихрей, кроме самых крупных из них, можно считать однородным и изотропным: ориентирующее влияние осредненного течения перестает чувствоваться уже на вихрях сравнительно невысокого порядка. Существенно также, что это движение можно считать квазистационарным: изменение статистических характеристик движения рассматриваемых вихрей происходит очень медленно по сравнению с периодами, характерными для этих вихрей. Отсюда вытекает, что движение всех вихрей, масштабы которых значительно меньше  $L$  (микроструктура или локальная структура потока), должно подчиняться некоторым общим статистическим закономерностям, не зависящим от геометрии потока и от свойств осредненного течения. Установление этих общих закономерностей, имеющих широкую область применимости, и составляет содержание теории локально изотропной турбулентности.

При исследовании закономерностей локальной структуры большую ценность представляют соображения теории подобия и теории размерностей: одни эти соображения позволяют получить ряд существенных результатов. Для применения этих соображений надо прежде всего выделить те основные величины, от которых может зависеть локальная структура потока. В силу однородности и изотропности движения рассматриваемой совокупности вихрей характеристики осредненного движения (типа характерных длин, характерных скоростей и т. д.) в число этих основных величин не войдут. Таким образом, остаются только две величины: средняя диссипация энергии за единицу времени на единицу массы жидкости  $\epsilon$ , определяющая интенсивность потока энергии, передающегося вдоль каскада вихрей различных масштабов, и кинематическая вязкость  $\nu$ , играющая основную роль в процессе диссипации<sup>1</sup>. Эти две величины и будут играть основную роль в излагаемой далее теории. Выпишем размерности  $\epsilon$  и  $\nu$ :

$$[\epsilon] = L^2 T^{-3}, \quad [\nu] = L^2 T^{-1}$$

Очевидно, что из этих двух величин можно составить единственную комбинацию размерности длины

$$\eta = \left( \frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{1/4}$$

Длина  $\eta$  определяет какой-то внутренний масштаб, характерный для локальной структуры; пользуясь приведенной выше физической картиной турбулентного движения,  $\eta$  можно отождествить с масштабом наименьших вихрей, в которых происходит диссипация энергии (ибо никакой другой характерной длины эта картина не содержит). Масштаб  $\eta$  впервые был введен в работе А. Н. Колмогорова<sup>[1]</sup>; он называется внутренним (или локальным) масштабом турбулентности (в противоположность внешнему масштабу  $L$ ).

При дальнейшем анализе микроструктуры оказывается целесообразным рассматривать отдельно два предельных случая: случай масштабов, много больших  $\eta$ , и случай масштабов, много меньших  $\eta$ . Выделим прежде всего совокупность вихрей, размеры которых много меньше  $L$ , но много больше масштаба  $\eta$  наименьших

<sup>1</sup> Жидкость всюду предполагается несжимаемой и имеющей постоянную плотность  $\rho$ . Величина  $\rho$  здесь не включена в число основных величин, поскольку в основной части статьи (§ 1 и 3) будут рассматриваться чисто кинематические характеристики потока, которые, конечно, не могут зависеть от плотности; при исследовании же структуры поля давлений (§ 2)  $\rho$  надо будет добавить к  $\epsilon$  и  $\nu$ . Относительно основных величин, от которых может зависеть локальная структура температурного поля, см. работы<sup>[11;12]</sup>.



вихрей; движение таких вихрей, как уже указывалось, не должно зависеть от вязкости  $\nu$ , что сразу сильно облегчает получение конкретных результатов подсчетом размерностей. Во втором крайнем случае, при масштабах движения, много меньших  $\eta$ , движение можно считать ламинарным, что также сильно облегчает изучение закономерностей такого движения. В промежуточной же области масштабов порядка  $\eta$  теория размерностей дает, как правило, менее конкретные результаты; так, например, из этой теории следует, что любая безразмерная функция расстояния, определяемая локальной структурой, должна быть универсальной функцией относительно  $r/\eta$ , однако вид этой функции при значениях аргумента порядка единицы остается неопределенным.

В настоящей работе сделана попытка количественного описания структуры основных гидродинамических полей (поля скоростей, поля давлений, поля ускорений<sup>1</sup>) для всех расстояний, меньших  $L$  (т. е. для всей области применимости теории Колмогорова). С этой целью привлечены некоторые дополнительные гипотезы, имеющие известные экспериментальные основания. В качестве асимптотических формул для  $r \gg \eta$  и для  $r < \eta$ , при этом, в частности, получаются и известные ранее результаты, причем все неопределенные численные коэффициенты, фигурирующие в этих результатах, оказываются выраженными через единственную постоянную  $S$  (асимметрию), значение которой экспериментально определялось Таунсендом<sup>[4]</sup>. Заметим еще, что безразмерная величина  $S$  (так же как и величины  $\epsilon$  и  $\nu$ ) входит лишь в выражение для характерных масштабов, так что с точностью до выбора единиц измерения структура всех рассматриваемых полей при сделанных предположениях описывается универсальными функциями, не зависящими ни от каких экспериментальных данных (см. ниже фиг. 1, 2 и 3; смысл этих функций будет разъяснен в соответствующих местах работы).

Исследование структуры поля скоростей, содержащееся в § 1 настоящей работы, принадлежит А. М. Обухову; исследование структуры поля давлений (§ 2) было начато А. М. Обуховым<sup>[16]</sup> и продолжено А. М. Ягломом; исследование поля ускорений (§ 3) выполнено А. М. Ягломом. Некоторые результаты настоящей работы были предварительно опубликованы в виде отдельных кратких сообщений<sup>[7, 16, 17]</sup>.

**§ 1. Вычисление структурных функций поля скоростей.** Для возможности использования представления о локально изотропной турбулентности при исследовании поля скоростей турбулентного потока необходимо прежде всего выделить те характеристики этого поля, которые зависят только от локальной структуры. Заметим, что сама истинная скорость  $v$  будет в основном определяться осредненным течением. Обычно применяемое в теории турбулентности разделение истинной скорости  $v$  на среднюю скорость  $\bar{v}$  и пульсационную скорость  $v' = v - \bar{v}$  выделяет компоненту скорости  $v'$ , не зависящую от этого осредненного течения, но не решает поставленной нами задачи, так как за значение  $v'$  в основном будут ответственны крупнейшие вихри, масштаб которых сравним с  $L$ . Однако, как впервые заметил А. Н. Колмогоров<sup>[1]</sup>, нужное нам выделение можно произвести, рассматривая разность скоростей в двух достаточно близких точках (т. е. относительное движение двух близких элементов жидкости): ясно, что на эту разность не будут влиять крупные вихри, переносящие рассматриваемую пару точек как целое. Поэтому в теории локально изотропной турбулентности за основные количественные характе-

<sup>1</sup> Здесь и в дальнейшем под ускорением потока подразумевается полное ускорение  $dv/dt$  двигающейся в пространстве частицы жидкости.



ристики структуры поля скоростей принимаются функции

$$D_{ij}(M, M') = [\overline{v_i(M') - v_i(M)}][\overline{v_j(M') - v_j(M)}] \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (1.1)$$

где  $v_i(M)$  есть  $i$ -я компонента вектора скорости  $\mathbf{v}(M)$  в точке  $M$ , а черта сверху служит символом осреднения. Функция  $D_{ij}(M, M')$  называется *структурной функцией* поля скоростей; согласно сказанному выше при расстоянии  $r$  между точками  $M$  и  $M'$ , много меньшем  $L$ , эта функция зависит лишь от локальной структуры потока. В силу однородности и изотропности движения вихрей масштаба, много меньшего  $L$ , функция  $D_{ij}(M, M')$  при  $r \ll L$  является инвариантной тензорной функцией относительно вектора  $MM'$  и, следовательно, представима в виде

$$D_{ij}(M, M') = A(r) \xi_i \xi_j + B(r) \delta_{ij} \quad (1.2)$$

где  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  — компоненты вектора  $MM'$  (так что  $\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2} = r$ ), а  $\delta_{ij} = 1$  при  $i = j$  и  $\delta_{ij} = 0$  при  $i \neq j$ .

Полагая в этой формуле сперва  $v_i = v_j = v_n$ , где  $v_n$  есть проекция вектора скорости на некоторое направление, перпендикулярное вектору  $MM'$ , а затем  $v_i = v_j = v_l$ , где  $v_l$  есть проекция  $\mathbf{v}$  на направление вектора  $MM'$ , легко убедиться, что (1.2) можно представить в виде

$$D_{ij}(M, M') = \frac{D_{ll}(r) - D_{nn}(r)}{r^2} \xi_i \xi_j + D_{nn}(r) \delta_{ij} \quad (1.3)$$

где функции  $D_{ll}(r)$  и  $D_{nn}(r)$  (продольная и поперечная структурные функции) имеют простой физический смысл:

$$D_{ll}(r) = \overline{[v_l(M') - v_l(M)]^2}, \quad D_{nn}(r) = \overline{[v_n(M') - v_n(M)]^2} \quad (1.4)$$

Определение этих функций  $D_{ll}(r)$  и  $D_{nn}(r)$  и будет основной целью настоящего параграфа<sup>1</sup>.

В теории локально изотропной турбулентности оказывается возможным считать структурные функции  $D_{ll}(r)$  и  $D_{nn}(r)$  не зависящими от времени; фактически при этом мы опираемся на предположение о квазистационарности статистического режима в области достаточно малых масштабов. Из соображений теории подобия следует, что в области применимости теории локально изотропной турбулентности (т. е. при  $r \ll L$ ) функции  $D_{ll}(r)$  и  $D_{nn}(r)$  представимы в виде

$$D_{ll}(r) = V \sqrt{\varepsilon} d_{ll}\left(\frac{r}{\eta}\right), \quad D_{nn}(r) = V \sqrt{\varepsilon} d_{nn}\left(\frac{r}{\eta}\right) \quad (1.5)$$

где  $\eta = (\nu^3 \varepsilon^{-1})^{1/4}$  — внутренний масштаб турбулентности, а  $d_{ll}(x)$  и  $d_{nn}(x)$  — некоторые универсальные функции.

<sup>1</sup> В теории изотропной турбулентности обычно используются корреляционные функции (продольная и поперечная)

$$B_{ll}(r) = \overline{v_l(M) v_l(M')}, \quad B_{nn}(r) = \overline{v_n(M) v_n(M')}$$

Структурные функции в изотропном случае связаны с корреляционными следующими соотношениями:

$$D_{ll}(r) = 2(B(0) - B_{ll}(r)), \quad D_{nn}(r) = 2(B(0) - B_{nn}(r))$$

где  $B(0) = B_{ll}(0) = B_{nn}(0)$ .

Ясно, что формулы (1.5) можно также представить в виде

$$D_{ll}(r) = u_1^2 \beta_{ll} \left( \frac{r}{\eta_1} \right), \quad D_{nn}(r) = u_1^2 \beta_{nn} \left( \frac{r}{\eta_1} \right) \quad (1.6)$$

где

$$\eta_1 = k_1 \sqrt[4]{\nu^3 / \varepsilon}, \quad u_1 = k_2 \sqrt[4]{\nu \varepsilon} \quad (1.7)$$

Здесь  $k_1$  и  $k_2$  — численные множители, которые мы можем выбирать по усмотрению и которые будем всегда предполагать имеющими порядок единицы, а  $\beta_{ll}(x)$  и  $\beta_{nn}(x)$  — новые универсальные функции, графики которых получаются из графиков функций  $d_{ll}(x)$  и  $d_{nn}(x)$  простым изменением масштабов по осям  $x$  и  $y$ .

Поскольку при  $r \gg \eta$  функции  $D_{ll}(r)$  и  $D_{nn}(r)$  в силу указанных выше физических представлений не должны зависеть от вязкости  $\nu$ , то должны иметь место асимптотические равенства

$$d_{ll}(x) \sim x^{2/3}, \quad d_{nn}(x) \sim x^{2/3} \quad \text{при } x \gg 1 \quad (1.8)$$

Такие же равенства справедливы, конечно, и в отношении функций  $\beta_{ll}(x)$  и  $\beta_{nn}(x)$ . Отсюда следует, что при  $r \gg \eta$

$$D_{ll}(r) \approx C \varepsilon^{2/3} r^{2/3}, \quad D_{nn}(r) \approx C' \varepsilon^{2/3} r^{2/3} \quad (1.9)$$

(так называемый закон  $^{2/3}$ ). В другом крайнем случае, при  $r \ll \eta$ , разность скоростей  $v(M') - v(M)$  будет первого порядка малости по  $r$  (для таких расстояний скорость в точке потока есть непрерывная и дифференцируемая функция координат), так что здесь

$$D_{ll}(r) \approx Ar^2, \quad D_{nn}(r) \approx A' r^2 \quad (1.10)$$

Перейдем к более полной теории, опирающейся на уравнения гидродинамики. Прежде всего, воспользуемся уравнением неразрывности

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1.11)$$

нетрудно показать, что

$$D_{nn}(r) = D_{ll}(r) + \frac{r}{2} \frac{dD_{ll}(r)}{dr} \quad (1.12)$$

и что

$$[\overline{v(M') - v(M)}][\overline{p(M') - p(M)}] = 0 \quad (1.13)$$

где  $p(M)$  — давление в точке  $M$  (см., например, [2, 15]; ср. также [18, 19]). Используя теперь соотношения (1.12), (1.13) и уравнения движения

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \Delta v_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.14)$$

можно показать, что функция  $D_{ll}(r)$  связана со структурной функцией третьего порядка

$$D_{lll}(r) = \overline{[v_l(M') - v_l(M)]^3} \quad (1.15)$$



известным соотношением<sup>1</sup> А. Н. Колмогорова [2]

$$D_{lll}(r) - 6\nu \frac{dD_{ll}(r)}{dr} = -\frac{4}{5}\varepsilon r \quad (1.16)$$

При  $r \ll \eta$  в этом соотношении можно пренебречь членом  $D_{lll}(r)$  (так как при таких  $r$  функция  $D_{lll}(r)$  будет третьего порядка малости по  $r$ ), и, следовательно, в силу (1.16) и (1.12)

$$D_{ll}(r) = \frac{1}{15} \frac{\varepsilon}{\nu} r^2, \quad D_{nn}(r) = \frac{2}{15} \frac{\varepsilon}{\nu} r^2 \quad \text{при } r \ll \eta \quad (1.17)$$

Это есть некоторое уточнение соотношений (1.10). Наоборот, при  $r \gg \eta$  в (1.16) можно отбросить член с вязкостью, так что

$$D_{lll}(r) = -\frac{4}{5}\varepsilon r \quad \text{при } r \gg \eta \quad (1.18)$$

Введем в рассмотрение безразмерную величину — асимметрию распределения вероятностей для продольной компоненты разности скоростей

$$S = \frac{D_{lll}(r)}{[D_{ll}(r)]^{3/2}} \quad (1.19)$$

Из соображений теории размерностей следует, что при  $r \gg \eta$  величина  $S$  должна иметь постоянное значение (она может зависеть только от  $r$  и от  $\varepsilon$ , но из этих двух величин нельзя составить никакой безразмерной комбинации). Из (1.19), (1.18) и (1.12) следует, что при  $r \gg \eta$

$$D_{ll}(r) = \left(-\frac{4}{5S}\right)^{2/3} \varepsilon^{2/3} r^{2/3}, \quad D_{nn}(r) = \frac{4}{3} \left(-\frac{4}{5S}\right)^{2/3} \varepsilon^{2/3} r^{2/3} \quad (1.20)$$

Таким образом, коэффициенты  $C$  и  $C'$  формул (1.9) связаны с асимметрией  $S$  следующими простыми соотношениями:

$$C = \left(-\frac{4}{5S}\right)^{2/3}, \quad C' = \frac{4}{3} C \quad (1.21)$$

Отсюда вытекает, что  $S$  всегда отрицательно:  $S = -|S|$ . Формулы (1.17), (1.9) и (1.21) были получены в 1941 г. А. Н. Колмогоровым [1, 2].

<sup>1</sup> В случае однородной и изотропной турбулентности из уравнений (1.14) легко выводится уравнение относительно корреляционных функций [18, 19]

$$\frac{\partial B_{ll}}{\partial t} = \left(\frac{\partial B_{lll}}{\partial r} + \frac{4}{r} B_{lll}\right) + 2\nu \left(\frac{\partial^2 B_{ll}}{\partial r^2} + \frac{4}{r} \frac{\partial B_{ll}}{\partial r}\right)$$

где

$$B_{lll} = \overline{v_l^2(M) v_l(M')}$$

Заменяя здесь корреляционные функции структурными, по формулам, приведенным в сноске на стр. 6 (и аналогичной формуле для  $B_{lll}$ ), получим

$$-4\varepsilon = \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{4}{r}\right) \left(D_{lll} - 6\nu \frac{dD_{ll}}{dr}\right) \quad \left(\varepsilon = -\frac{3}{2} \frac{dB}{dt}\right)$$

Из этого уравнения (1.16) получается после однократного интегрирования по  $r$ . Аналогично можно получить равенства и (1.12), (1.13) из известных результатов, относящихся к изотропной турбулентности. Можно также показать, что все равенства (1.12), (1.13), (1.16) верны и в рамках теории локально изотропного потока.

Заметим еще, что в книге [15] уравнение (1.16) приведено с опiskой в значении коэффициента при  $D_{lll}$ .

До сих пор выводы, полученные из уравнений гидродинамики, лишь немного уточняли результаты, полученные ранее из анализа размерностей, и относились только к двум крайним случаям:  $r \gg \eta$  и  $r \ll \eta$ . Что касается подсчета  $D_{II}(r)$  для промежуточных значений  $r$ , то здесь одного лишь соотношения (1.16), конечно, недостаточно: в это соотношение входят две неизвестные функции  $D_{II}(r)$  и  $D_{III}(r)$  и, следовательно, для их определения необходимо иметь еще одно соотношение между ними. Теория не дает нам этого недостающего соотношения; однако его можно попытаться извлечь из данных эксперимента.

В настоящее время известны результаты непосредственных измерений величины  $S$  для различных расстояний, произведенные Таунсендом [4] в аэродинамической трубе при весьма больших значениях числа Рейнольдса с целью проверки теории Колмогорова. Эти измерения показали, что асимметрию  $S$  можно считать с достаточной степенью точности постоянной не только для  $r \gg \eta$ , но и вообще для всех значений  $r$ , лежащих в области применимости теории локально изотропной турбулентности; экспериментальное значение  $S$  для всех  $r$  близко<sup>1</sup> к  $-0.4$ . Этот экспериментальный факт и дает дополнительное соотношение между  $D_{II}(r)$  и  $D_{III}(r)$ , позволяющее однозначно определить эти функции для всех  $r$ .

Итак, примем, что асимметрия  $S$  постоянна. В силу (1.16) и (1.19)

$$6\nu \frac{dD_{II}}{dr} + |S| [D_{II}(r)]^{3/2} = \frac{4}{5} \varepsilon r \quad (1.22)$$

где  $|S|$  есть постоянная. Это уравнение относительно функции  $D_{II}(r)$  с коэффициентами, зависящими от  $\nu$ ,  $\varepsilon$  и  $|S|$ , значительно упростится, если перейти к безразмерным величинам и ввести в выражения для масштабов пока неопределенные числовые множители  $k_1$  и  $k_2$ , т. е. воспользоваться формулами (1.6) и (1.7). Тогда для  $\beta_{II}(x)$  получим

$$6 \frac{k_2^2}{k_1} \frac{d\beta_{II}}{dx} + |S| k_2^3 [\beta_{II}(x)]^{3/2} = \frac{4}{5} k_1 x \quad (1.23)$$

Величины  $\varepsilon$  и  $\nu$  в это уравнение уже не входят; при соответствующем подборе постоянных  $k_1$  и  $k_2$  можно освободиться также и от экспериментальной константы  $|S|$  и получить для  $\beta_{II}(x)$  уравнение с числовыми коэффициентами. Удобно выбрать  $k_1$  и  $k_2$  так, чтобы

$$\frac{|S| k_1 k_2}{6} = \left(\frac{4}{3}\right)^{3/2}, \quad \frac{2}{15} \frac{k_1^2}{k_2^2} = 1 \quad (1.24)$$

т. е. положить

$$k_1 = \frac{4\sqrt{5}}{4} \frac{1}{|S|} \approx \frac{5.035}{|S|}, \quad k_2 = \frac{4\sqrt{2}}{4} \frac{1}{\sqrt{45} |S|} \approx \frac{1.838}{|S|} \quad (1.25)$$

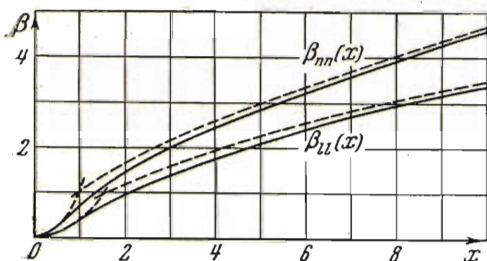
<sup>1</sup> Экспериментально определенные значения  $S$  колеблются в пределах от  $-0.36$  до  $-0.42$ ; этот разброс находится в пределах точности измерений. В качестве наиболее вероятного значения  $S$  Таунсенд дает значение  $-0.38$ . Однако последний знак здесь вряд ли можно считать надежным.



При этом для  $\beta_{II}(x)$  получим уравнение

$$\frac{d\beta_{II}(x)}{dx} + \left[ \frac{4}{3} \beta_{II}(x) \right]^{3/2} = x \quad (1.26)$$

Уравнение (1.26) вместе с начальным условием  $\beta_{II}(0) = 0$  однозначно определяет безразмерную продольную структурную функцию  $\beta_{II}(x)$ ,



Фиг. 1

описывающую структуру поля скоростей<sup>1</sup>. Соответствующая безразмерная поперечная структурная функция  $\beta_{nn}(x)$  определится при этом из соотношения (1.12), которое в силу (1.6) может быть представлено в виде

$$\beta_{nn}(x) = \beta_{II}(x) + \frac{\nu}{x} \frac{d\beta_{II}(x)}{dx} \quad (1.27)$$

На фиг. 1 нанесены графики функций  $\beta_{II}(x)$  и  $\beta_{nn}(x)$ , где  $\beta_{II}(x)$  определено при помощи численного интегрирования<sup>2</sup> уравнения (1.26) при условии  $\beta_{II}(0) = 0$ , а  $\beta_{nn}(x)$  подсчитано по  $\beta_{II}(x)$  из соотношения (1.27). Пунктиром на фиг. 1 представлены асимптотические значения этих функций при малых и при больших значениях  $x$ :

$$\beta_{II}(x) \approx \frac{1}{2} x^2, \quad \beta_{nn}(x) \approx x^2 \quad \text{при } x \ll 1 \quad (1.28)$$

$$\beta_{II}(x) \approx \frac{3}{4} x^{2/3}, \quad \beta_{nn}(x) \approx x^{2/3} \quad \text{при } x \gg 1 \quad (1.29)$$

<sup>1</sup> Структура турбулентного потока может быть описана также при помощи распределения энергии по спектру.

Обозначим через  $E(p)$  энергию совокупности возмущений, волновое число которых превосходит  $p$  (заметим, что масштаб возмущения обратно пропорционален волновому числу). В статистической теории однородных (стационарных) процессов и полей доказывается, что существует взаимно однозначное соответствие между корреляционной (структурной) функцией и функцией  $E(p)$ ; формулы, позволяющие выразить одну из этих функций через другую, близки по типу к преобразованию Фурье (ср. [20, 31]). Закон  $2/3$  для структурных функций (1.9) эквивалентен пропорциональности спектральной функции  $E(p)$  при  $p < p_1$  величине  $p^{-2/3}$  (т. е. пропорциональности спектральной плотности  $dE(p)/dp = E'(p)$  величине  $p^{-5/3}$ ); масштаб  $\eta$  соответствует в спектральной теории некоторому критическому волновому числу  $p_1 = 1/\eta$ . В такой форме закон  $2/3$  впервые был получен А. М. Обуховым [3] в 1941 г. Приведенное в тексте полное описание структурной функции  $D_{II}(r)$  эквивалентно определению спектральной функции не только при  $p < p_1$ , но и для всех вообще значений  $p$ . Имеется ряд попыток [3, 24, 22, 5] непосредственного теоретического расчета функции  $E(p)$  для всех  $p$ ; однако полученные при этом результаты трудно сравнимы с экспериментальными данными.

<sup>2</sup> При больших значениях  $x$  (при  $x > 8$ ) целесообразно воспользоваться асимптотическим разложением для  $\beta_{II}(x)$ :

$$\beta_{II}(x) \sim \frac{3}{4} x^{2/3} \left( 1 - \frac{1}{3} x^{-4/3} - \frac{5}{36} x^{-8/3} + \dots \right)$$



Эти последние формулы соответствуют асимптотическим равенствам (1.17) и (1.20) для структурных функций. Особенно простой вид асимптотических формул для функции  $\beta_{nn}(x)$  позволяет очень просто определить значения величин  $\eta_1$  и  $u_1$  равенства (1.6) по найденной из эксперимента<sup>1</sup> поперечной структурной функции  $\beta_{nn}(x)$ ; именно по этой причине выбраны указанные выше значения коэффициентов  $k_1$  и  $k_2$ .

Непосредственное сравнение вычисленных кривых с экспериментальными кривыми, полученными при измерениях в аэродинамических трубах, технически трудно осуществимо из-за малости масштаба  $\eta$ . Таким образом, при измерениях в трубах обычно удается лишь проверить выполнимость закона  $^{2/3}$  (см., например, [4,5]).

Что же касается результатов, относящихся к ходу кривых при  $r \sim \eta_1$ , то здесь приходится довольствоваться косвенной проверкой типа проверки предположения о постоянстве асимметрии.

Более удобными с этой точки зрения, повидимому, являются измерения в атмосфере, так как здесь масштаб  $\eta_1$  несколько больше (порядка нескольких миллиметров). Тем не менее подобные эксперименты и здесь являются весьма сложными, и до сих пор мы имеем лишь одну работу, содержащую данные, относящиеся к масштабам порядка  $\eta_1$ : это работа Гёдеке<sup>[23]</sup>, измерявшего средние абсолютные разности скоростей в направлении, перпендикулярном базе (что соответствует поперечной структурной функции), для расстояний  $r$ , меняющихся от 0.1 до 80 см на высоте 1.15 м над поверхностью земли. Обработка этих данных<sup>[7]</sup> показала, что они хорошо укладываются на полученную здесь теоретическую кривую для  $\beta_{nn}(x)$  при  $\eta_1 = 0.54$  см и  $u_1 = 2.02$  см/сек.

**§ 2. Вычисление структурной функции поля давлений.** Перейдем к изучению локальной структуры поля давлений в турбулентном потоке<sup>2</sup>. В качестве количественной характеристики этой структуры, как и в случае поля скоростей, выберем соответствующую структурную функцию

$$\Pi(M, M') = \overline{[p(M') - p(M)]^2} \quad (2.1)$$

В случае локально изотропного потока функция  $\Pi(M, M')$  при расстоянии  $r$  между точками  $M$  и  $M'$ , много меньшем внешнего масштаба

<sup>1</sup> Технически измерение  $D_{nn}(r)$  осуществить значительно проще, чем измерение  $D_{11}(r)$ ; поэтому в экспериментальных работах обычно измеряют именно  $D_{nn}(r)$ . Аппроксимируя далее полученную кривую для  $D_{nn}(r)$  при малых значениях  $r$  параболой, а при больших значениях  $r$  законом  $^{2/3}$ , мы получим в качестве координат точки пересечения этих двух асимптотических выражений как раз величины  $\eta_1$  и  $u_1$ <sup>2</sup>. Указанное построение удобно выполнять в логарифмическом масштабе: при этом парабола и закон  $^{2/3}$  представляются двумя прямыми (ср. [7]).

<sup>2</sup> Из того факта, что при выводе основного уравнения, связывающего вторые и третьи моменты поля скоростей изотропного (локально изотропного) несжимаемого потока, давление исключается [см. [18, 19], а также равенство (1.13)], не следует, что в изотропном (локально изотропном) турбулентном потоке пульсации давления отсутствуют. Такое ошибочное заключение было сделано М. Д. Миллионщиковым<sup>[24]</sup>.

турбулентности  $L$ , будет зависеть только от  $r$ :

$$\Pi(M, M') = \Pi(r) \quad (2.2)$$

и будет полностью определяться локальной структурой потока.

Из соображений теории размерностей следует, что

$$\Pi(r) = q_1^2 \pi\left(\frac{r}{\eta_1}\right) \quad (2.3)$$

где

$$\eta_1 = k_1 \sqrt[4]{\frac{r \nu^3}{\varepsilon}}, \quad q_1 = \rho u_1^2 = k_2^2 \rho \sqrt{\nu \varepsilon} \quad (2.4)$$

Здесь  $k_1$  и  $k_2$  — числовые коэффициенты, которые мы будем считать совпадающими с коэффициентами (1.25), а  $\pi(x)$  — универсальная функция. Далее, так как при  $r \gg \eta_1$  структурная функция  $\Pi(r)$  не должна зависеть от вязкости  $\nu$ , то асимптотически

$$\pi(x) \sim x^{4/3} \quad \text{при } x \gg 1 \quad (2.5)$$

и, значит,

$$\Pi(r) \sim \rho^2 \varepsilon^{4/3} r^{4/3} \sim \rho^2 [D_{11}(r)]^2 \quad \text{при } r \gg \eta_1 \quad (2.6)$$

Ниже будет показано, как можно приближенно рассчитать числовой коэффициент в этой формуле и вообще весь ход функции  $\pi(x)$ .

С этой целью воспользуемся уравнениями (1.14). Если продифференцировать  $i$ -ое уравнение по  $x_i$  и составить сумму по  $i$ , то в силу (1.11) члены с  $\partial v_i / \partial t$  и с  $\Delta v_i$  выпадут и

$$\sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left( v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{1}{\rho} \Delta p \quad (2.7)$$

или иначе

$$\Delta p = -\rho \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \quad (2.8)$$

(здесь мы еще раз пользуемся уравнением неразрывности).

Из равенства (2.8) нетрудно вывести дифференциальное уравнение относительно функции  $\Pi(r)$ . Проще всего при этом рассуждать следующим образом. Предположим сперва, что поле скоростей и поле давлений статистически однородны и изотропны (а не только локально однородны и локально изотропны); в таком случае, умножив левую и правую части уравнения (2.8), выписанного для точки  $M$  с координатами  $x_1, x_2, x_3$ , соответственно на левую и правую части аналогичного равенства для точки  $M'$  с координатами  $x'_1, x'_2, x'_3$ , осреднив результат и приняв во внимание, что в случае однородного и изотропного поля давлений

$$\overline{\Delta p(M) \Delta p(M')} = \Delta^2 \overline{p(M) p(M')}$$

где в правой части дифференцирование производится по компонентам  $\xi_i = x'_i - x_i$  вектора  $MM'$ , получим

$$\Delta^2 \overline{p(M) p(M')} = \rho^2 \sum_{i,j,k,l} \frac{\partial v_i(M)}{\partial x_j} \frac{\partial v_j(M)}{\partial x_i} \frac{\partial v_k(M')}{\partial x'_l} \frac{\partial v_l(M')}{\partial x'_k} \quad (2.9)$$



Отметим теперь, что в случае однородного и изотропного потока корреляционная функция  $\overline{p(M)p(M')}$  связана со структурной функцией (2.1) соотношением<sup>1</sup>

$$\Pi(r) = 2[\overline{p^2} - \overline{p(M)p(M')}] \quad (2.10)$$

Следовательно, равенство (2.9) можно переписать в виде

$$\Delta^2 \Pi(r) \equiv \frac{d^4 \Pi(r)}{dr^4} + \frac{4}{r} \frac{d^3 \Pi(r)}{dr^3} = -2\rho^2 \sum_{i,j,k,l} \overline{\frac{\partial v_i(M)}{\partial x_j} \frac{\partial v_j(M)}{\partial x_i} \frac{\partial v_k(M')}{\partial x_l'} \frac{\partial v_l(M')}{\partial x_k'}} \quad (2.11)$$

Это и есть искомое уравнение; оно имеет смысл также и в случае локально однородного и локально изотропного (но не однородного и изотропного) потока и при помощи более сложных рассуждений его можно вывести и без предположения об однородности и изотропности.

Итак, мы видим, что структурная функция  $\Pi(r)$  является решением уравнения (2.11), в правой части которого стоит некоторая комбинация из четвертых моментов производных поля скоростей. К сожалению, эти моменты нам неизвестны и, для того чтобы извлечь какую-нибудь пользу из уравнения (2.11), приходится принять еще дополнительную гипотезу, позволяющую подсчитывать подобные моменты. В качестве такой гипотезы здесь принимается предположение М. Д. Миллионщикова<sup>[24]</sup> о том, что четвертые моменты поля скоростей выражаются через вторые моменты, точно так же как и в случае нормального распределения Гаусса<sup>2</sup>; в качестве первого приближения это предположение представляется вполне естественным. Заметим, что сделанное здесь допущение находит известное оправдание в измерениях Таунсенда<sup>[41]</sup>, показавших, что экспериментальное значение четвертого момента для производной скорости  $\partial v_i / \partial x_i$  отличается всего на 15% от значения этой величины, подсчитанного по измеренному значению второго момента в предположении о нормальном распределении.

Напомним теперь, что для любых четырех случайных величин  $w_1, w_2, w_3$  и  $w_4$ , подчиняющихся четырехмерному нормальному закону распределения, имеет место равенство (см., например,<sup>[25]</sup>)

$$\overline{w_1 w_2 w_3 w_4} = \overline{w_1 w_2} \overline{w_3 w_4} + \overline{w_1 w_3} \overline{w_2 w_4} + \overline{w_1 w_4} \overline{w_2 w_3}$$

Применяя эту формулу к произведению четырех производных поля скоростей, входящему в правую часть (2.11), получим

$$\begin{aligned} \sum_{i,j,k,l} \overline{\frac{\partial v_i(M)}{\partial x_j} \frac{\partial v_j(M)}{\partial x_i} \frac{\partial v_k(M')}{\partial x_l'} \frac{\partial v_l(M')}{\partial x_k'}} &= \sum_{i,j,k,l} \overline{\frac{\partial v_i(M)}{\partial x_j} \frac{\partial v_j(M)}{\partial x_i} \frac{\partial v_k(M')}{\partial x_l'} \frac{\partial v_l(M')}{\partial x_k'}} + \\ &+ \sum_{i,j,k,l} \overline{\frac{\partial v_i(M)}{\partial x_j} \frac{\partial v_k(M')}{\partial x_l'} \frac{\partial v_j(M)}{\partial x_i} \frac{\partial v_l(M')}{\partial x_k'}} + \sum_{i,j,k,l} \overline{\frac{\partial v_i(M)}{\partial x_j} \frac{\partial v_l(M')}{\partial x_k'} \frac{\partial v_j(M)}{\partial x_i} \frac{\partial v_k(M')}{\partial x_l'}} \end{aligned} \quad (2.12)$$

<sup>1</sup> Ср. список на стр. 6.

<sup>2</sup> Отметим, что в недавней работе Гайзенберга<sup>[21]</sup> использовалась гипотеза о спектральных функциях изотропного турбулентного потока, в точности эквивалентная этому предположению М. Д. Миллионщикова.

Первый член справа здесь пропорционален  $\overline{\Delta p(M) \Delta p(M')}$ . Легко проверить, что в случае локально изотропного потока он обращается в нуль; это можно вывести, например, из (1.3) и (1.12). Что касается последних двух членов, то они равны между собой. Заметим еще, что в случае локально изотропного потока

$$\frac{\partial v_i(M) \partial v_k(M')}{\partial x_j \partial x_l'} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 D_{ik}(M, M')}{\partial \xi_j \partial \xi_l} \quad (2.13)$$

где  $D_{ik}$  — структурная функция (1.1), а  $\xi_j = x_j' - x_j$ . Отсюда следует, что при сделанном предположении о связи вторых и четвертых моментов уравнение (2.11) можно представить в виде

$$\frac{d^4 \Pi(r)}{dr^4} + \frac{4}{r} \frac{d^3 \Pi(r)}{dr^3} = -\rho^2 \sum_{i, j, k, l} \frac{\partial^2 D_{ik}}{\partial \xi_j \partial \xi_l} \frac{\partial^2 D_{jl}}{\partial \xi_i \partial \xi_k} \quad (2.14)$$

Функция в правой части этого равенства, конечно, зависит только от  $r$

$$\Phi(M, M') = \sum_{i, j, k, l} \frac{\partial^2 D_{ik}(M, M')}{\partial \xi_j \partial \xi_l} \frac{\partial^2 D_{jl}(M, M')}{\partial \xi_i \partial \xi_k} = \Phi(r) \quad (2.15)$$

Пользуясь равенствами (1.3) и (1.12), ее можно привести после довольно длинных преобразований к виду

$$\Phi(r) = \frac{6}{r^2} \left( \frac{dD_{ll}}{dr} \right)^2 + \frac{20}{r} \frac{dD_{ll}}{dr} \frac{d^2 D_{ll}}{dr^2} + 4 \left( \frac{d^2 D_{ll}}{dr^2} \right)^2 + 4 \frac{dD_{ll}}{dr} \frac{d^3 D_{ll}}{dr^3} \quad (2.16)$$

Согласно определению (2.1), функция  $\Pi(r)$  есть четная, обращающаяся в нуль при  $r = 0$ , поэтому имеем два граничных условия:

$$\Pi(0) = 0 \quad (2.17)$$

$$\Pi'(0) = 0 \quad (2.18)$$

В качестве третьего граничного условия потребуем<sup>1</sup>

$$\frac{\Pi(r)}{r^2} \rightarrow 0 \quad \text{при } r \rightarrow \infty \quad (2.19)$$

Уравнение (2.14) при условиях (2.17), (2.18) и (2.19) имеет единственное решение, которым и будет искомая структурная функция<sup>2</sup>.

Так как все линейно независимые решения однородного уравнения, отвечающего (2.14), находятся без труда (это будут  $1$ ,  $r$ ,  $r^2$  и  $r^{-1}$ ), то нужное решение неоднородного уравнения может быть построено при помощи функции Грина. Легко проверить, что в случае граничных

<sup>1</sup> Можно показать, что это условие необходимо для того, чтобы корреляция между разностями значений давления в двух парах точек стремилась к нулю при неограниченном удалении одной пары от другой (расстояния между точками внутри каждой пары считаем фиксированными).

<sup>2</sup> Может показаться странным, что граничных условий у нас только три, в то время как (2.14) есть уравнение четвертого порядка. Фактически, однако, (2.17) есть двойное условие: нуль есть особая точка уравнения (2.14) и поэтому граничным условием будет уже требование регулярности решения в нуле.



условий (2.17), (2.18), (2.19) эта функция для уравнения (2.14) имеет вид:

$$G(r, \xi) = \begin{cases} -\frac{r^2 \xi}{6} & \text{при } r \leq \xi \\ \frac{\xi^3}{2} - \frac{r \xi^2}{2} - \frac{\xi^4}{6r} & \text{при } r \geq \xi \end{cases} \quad (2.20)$$

Искомое решение  $\Pi(r)$  можно представить в виде

$$\Pi(r) = -\rho^2 \int_0^{\infty} G(r, \xi) \Phi(\xi) d\xi \quad (2.21)$$

Функцию  $\Phi(r)$ , задаваемую равенством (2.16), в силу соотношений 1.6) и (1.7) можно представить в виде

$$\Phi(r) = \left(\frac{k_2}{k_1}\right)^4 \frac{\varepsilon^2}{\nu^2} \varphi\left(\frac{r}{\eta_1}\right) \quad (2.22)$$

где  $k_1$ ,  $k_2$  и  $\eta_1$  определяются из равенств (1.25) и (1.7), а  $\varphi(x)$  есть универсальная функция:

$$\varphi(x) = \frac{6}{x^2} \left(\frac{d\beta_{II}}{dx}\right)^2 + \frac{20}{x} \frac{d\beta_{II}}{dx} \frac{d^2\beta_{II}}{dx^2} + 4 \left(\frac{d^2\beta_{II}}{dx^2}\right)^2 + 4 \frac{d\beta_{II}}{dx} \frac{d^3\beta_{II}}{dx^3} \quad (2.23)$$

Подставляя теперь (2.20) и (2.22) в (2.21) и произведя замену переменных, найдем [ср. (2.3), (2.4)], что

$$\Pi(r) = k_2^4 \rho^2 \nu \varepsilon \pi\left(\frac{r}{\eta_1}\right) \quad (2.24)$$

где

$$\begin{aligned} \pi(x) &= \int_0^x \left(-\frac{\zeta^3}{2} + \frac{x\zeta^2}{2} + \frac{\zeta^4}{6x}\right) \varphi(\zeta) d\zeta + \int_x^{\infty} \frac{x^2 \zeta}{6} \varphi(\zeta) d\zeta = \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^x \zeta^3 \varphi(\zeta) d\zeta + \frac{x}{2} \int_0^x \zeta^2 \varphi(\zeta) d\zeta + \frac{1}{6x} \int_0^x \zeta^4 \varphi(\zeta) d\zeta + \frac{x^2}{6} \int_x^{\infty} \zeta \varphi(\zeta) d\zeta \end{aligned} \quad (2.25)$$

Таким образом, универсальная функция  $\pi(x)$  равенства (2.3) оказывается связанной с функцией  $\beta_{II}(x)$ , подсчитанной в предыдущем параграфе, соотношениями (2.25) и (2.23). Уравнение (1.26) выражает производную  $d\beta_{II}/dx$  через саму функцию  $\beta_{II}(x)$ ; применив это уравнение несколько раз, мы сможем выразить через  $\beta_{II}(x)$  также и вторую и третью производные этой функции, а следовательно, и функцию  $\varphi(x)$ . Итак, зная функцию  $\beta_{II}(x)$  из § 1, мы можем определить  $\varphi(x)$  и численно подсчитать все интегралы в (2.25), т. е. можем вычислить функцию  $\pi(x)$ , определяющую в силу равенства (2.3) структуру поля давления. График найденной таким образом функции  $\pi(x)$  приведен на фиг. 2.

Пунктиром на фиг. 2 приведены кривые, определяющие асимптотическое поведение  $\pi(x)$  при малых и при больших  $x$ . Так как движение жидкости в масштабах, много меньших  $\eta_1$ , ламинарно, то при  $x \ll 1$

$$\pi(x) \approx ax^2 \quad (2.26)$$

(ср. аналогичный вывод для структурных функций поля скоростей на стр. 7). Коэффициент  $a$  в этой формуле легко может быть найден из

равенства (2.25). Действительно, согласно (1.28), имеем  $\beta_{II}(x) \approx \frac{1}{2}x^2$  при  $x \ll 1$ , поэтому функция  $\varphi(x)$  для таких  $x$  может считаться постоянной:  $\varphi(x) \approx 30$ . Подставляя это значение в (2.25), найдем, что член, пропорциональный  $x^2$ , дает только последний из интегралов в (2.25) и что

$$a = \frac{1}{6} \int_0^{\infty} \zeta \varphi(\zeta) d\zeta \approx 0.8 \quad (2.27)$$

(это значение здесь получено при помощи численного интегрирования). Кривая

$$\pi(x) = 0.83 x^2$$

и является первой из асимптотических кривых, нанесенных на фиг. 2.

Во втором крайнем случае, при  $x \gg 1$ , согласно (1.29) имеем

$\beta_{II}(x) \approx \frac{3}{4} x^{2/3}$  и, следовательно,  $\varphi(x) \approx \frac{7}{18} x^{-8/3}$ . Равенство (2.25), теперь представим в виде

$$\begin{aligned} \pi(x) &= \int_0^x \left( -\frac{\zeta^3}{2} + \frac{x\zeta^2}{2} + \frac{\zeta^4}{6x} \right) \frac{7}{18} \zeta^{-8/3} d\zeta + \int_x^{\infty} \frac{x^2 \zeta}{6} \frac{7}{18} \zeta^{-8/3} d\zeta + \\ &+ \int_0^x \left( -\frac{\zeta^3}{2} + \frac{x\zeta^2}{2} + \frac{\zeta^4}{6x} \right) \left( \varphi(\zeta) - \frac{7}{18} \zeta^{-8/3} \right) d\zeta + \int_x^{\infty} \frac{x^2 \zeta}{6} \left( \varphi(\zeta) - \frac{7}{18} \zeta^{-8/3} \right) d\zeta = \\ &= \frac{9}{16} x^{4/3} + \int_0^x \left( -\frac{\zeta^3}{2} + \frac{x\zeta^2}{2} + \frac{\zeta^4}{6x} \right) \left( \varphi(\zeta) - \frac{7}{18} \zeta^{-8/3} \right) d\zeta + \\ &+ \int_x^{\infty} \frac{x^2 \zeta}{6} \left( \varphi(\zeta) - \frac{7}{18} \zeta^{-8/3} \right) d\zeta \quad (2.28) \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что значения интегралов в правой части (2.28) при  $x \rightarrow \infty$  будут расти не быстрее, чем первая степень  $x$ , так что главным членом асимптотической формулы для  $\pi(x)$  будет член  $\frac{9}{16} x^{4/3}$ . Таким образом, числовой коэффициент в равенстве (2.5) равен  $\frac{9}{16}$ , причем в (2.5) символ асимптотического равенства имеет лишь тот смысл, что

$$\frac{\pi(x)}{\frac{9}{16} x^{4/3}} \approx \frac{\pi(x)}{[\beta_{II}(x)]^2} \approx 1 \quad \text{при } x \gg 1 \quad \text{или} \quad \frac{\Pi(r)}{\rho^2 [D_{II}(r)]^2} \approx 1 \quad \text{при } r \gg \eta_1$$

Разность же  $\pi(x) - \frac{9}{16} x^{4/3}$  с ростом  $x$  даже безгранично возрастает. Для получения последующих членов асимптотической формулы для



$\pi(x)$  преобразуем далее равенство (2.28):

$$\begin{aligned} \pi(x) = & \frac{9}{16} x^{4/3} + \frac{x}{2} \int_0^{\infty} \zeta^2 \left( \varphi(\zeta) - \frac{7}{18} \zeta^{-8/3} \right) d\zeta - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \zeta^3 \left( \varphi(\zeta) - \frac{7}{18} \zeta^{-8/3} \right) d\zeta + \\ & + \frac{1}{6x} \int_0^{\infty} \zeta^4 \left( \varphi(\zeta) - \frac{7}{18} \zeta^{-8/3} \right) d\zeta + \\ & + \int_x^{\infty} \left( -\frac{x}{2} \zeta^2 + \frac{1}{2} \zeta^3 - \frac{1}{6x} \zeta^4 + \frac{x^2}{6} \zeta \right) \left( \varphi(\zeta) - \frac{7}{18} \zeta^{-8/3} \right) d\zeta \quad (2.29) \end{aligned}$$

Здесь интегралы от 0 до  $\infty$  весьма быстро сходятся и могут быть подсчитаны численно, а последний интеграл от  $x$  до  $\infty$  при  $x \gg 1$  может быть оценен при помощи асимптотической формулы, выписанной в примечании на стр. 10; заметим, что этот интеграл дает лишь незначительную добавку к постоянному члену асимптотической формулы для  $\pi(x)$ . Окончательно с точностью до членов, стремящихся к нулю при  $x \rightarrow \infty$ ,

$$\pi(x) \approx \frac{9}{16} x^{4/3} - 0.08x + 0.85 \quad \text{при } x \gg 1 \quad (2.30)$$

Это и есть уравнение асимптотической кривой для больших  $x$ , нанесенной на фиг. 2.

Нам неизвестны экспериментальные данные о структуре поля давлений, которые можно было бы сравнить с полученными здесь результатами. Следует отметить, что согласно приведенным выше расчетам средние квадратичные значения разности давлений, как правило, оказываются настолько малыми, что измерение их должно быть сопряжено с преодолением очень больших экспериментальных трудностей. Отсюда еще не следует, однако, что расчет структурной функции поля давлений практически бесполезен: в следующем параграфе мы покажем, что полученные отсюда значения локальных градиентов давления весьма велики, так что ускорения, создаваемые пульсациями давления, могут играть существенную роль в процессах, происходящих в турбулентном потоке.

**§ 3. Вычисление корреляционных функций поля ускорений.** Будем изучать поле ускорений частицы жидкости в турбулентном потоке. Это поле отличается от полей, рассмотренных выше, в том отношении, что за значение ускорения в одной точке ответственны в основном самые мелкие вихри<sup>1</sup>, а не самые крупные, как это будет для пульсаций

<sup>1</sup> Из соображений теории размерностей следует, что вихрям масштаба  $l$ , где  $l \gg \eta$ , отвечает характерный период  $T_l = (l^2/\varepsilon)^{1/3}$ , так что скорость, характерная для этих вихрей, равна:  $v_l = l/T_l = (\varepsilon l)^{1/3}$ , а характерное для них ускорение равно:  $\omega_l = l/T_l^2 = (\varepsilon^2/l)^{1/3}$ . Мы видим, таким образом, что при уменьшении масштаба длин характерная скорость уменьшается, а характерное ускорение возрастает. Отсюда вытекает, что за значение ускорения в одной точке потока в основном должны быть ответственны мельчайшие вихри масштабов  $l \ll \eta$  (для таких вихрей приведенные здесь размерностные соображения, конечно, уже не действительны, ибо движение этих вихрей существенно зависит от вязкости).

скорости или давления. По этой причине в случае поля ускорений локальной структурой потока определяются не только статистические характеристики разностей значений поля в двух точках (такие, как, например, структурная функция), но и статистические характеристики самих значений поля. Важнейшей из таких характеристик является корреляционная функция — среднее значение произведения значений поля в двух точках (т. е. в рассматриваемом случае среднее значение произведения компонент ускорения)<sup>1</sup>. Вычисление этой корреляционной функции и будет составлять основное содержание настоящего параграфа.

Предварительно определим значение корреляционной функции в нуле, т. е. средний квадрат ускорения частицы жидкости в одной точке; эта величина является наиболее интересной числовой характеристикой поля ускорений. В силу уравнений движения (1.14) компоненты ускорения частицы жидкости

$$w_i = \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.1)$$

равны:

$$w_i = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + v \Delta v_i \quad (3.2)$$

Отсюда вытекает, что

$$\sum_{i=1}^3 \overline{w_i^2} = \frac{1}{\rho^2} \sum_{i=1}^3 \overline{\left(\frac{\partial p}{\partial x_i}\right)^2} - \frac{2v}{\rho} \sum_{i=1}^3 \overline{\frac{\partial p}{\partial x_i} \Delta v_i} + v^2 \sum_{i=1}^3 \overline{(\Delta v_i)^2} \quad (3.3)$$

Первый и третий члены правой части этого равенства без труда могут быть выражены через структурные функции (1.4), (2.4) поля скоростей и поля давлений:

$$\sum_{i=1}^3 \overline{\left(\frac{\partial p}{\partial x_i}\right)^2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 \Pi(0)}{\partial x_i^2} = \frac{3}{2} \frac{d^2 \Pi(0)}{dr^2} \quad (3.4)$$

$$\sum_{i=1}^3 \overline{(\Delta v_i)^2} = -\frac{1}{2} \Delta^2 \left( \sum_{i=1}^3 D_{ii}(0) \right) \quad (3.5)$$

Что же касается среднего члена, то он может быть выражен через взаимные структурные функции

$$D_{ip}(M, M') = \overline{[v_i(M') - v_i(M)][p(M') - p(M)]} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.6)$$

поля скоростей и поля давления. Так как в случае несжимаемого локально изотропного потока эти функции должны быть равны нулю [см. равенство (1.13)], то средний член правой части (3.3) обращается в

<sup>1</sup> Ясно, что корреляционная функция является более содержательной характеристикой поля, чем структурная функция: зная корреляционную функцию, мы всегда можем определить также и структурную функцию (см. примечание на стр. 6), но не наоборот.



нуль и, следовательно,

$$\sum_{i=1}^3 \overline{w_i^2} = \frac{3}{2\rho^2} \frac{d^2 \Pi(0)}{dr^2} - \frac{\nu^2}{2} \Delta^2 \left( \sum_{i=1}^3 D_{ii}(0) \right) \quad (3.7)$$

Но в силу (2.24), (1.7), (1.25), (2.26) и (2.27)

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Pi(0)}{dr^2} &= \frac{k_2^4}{k_1^2} \rho^2 \nu^{-1/2} \varepsilon^{3/2} \pi''(0) = \frac{1}{3} \frac{k_2^4}{k_1^2} \left( \int_0^\infty \zeta \varphi(\zeta) d\zeta \right) \rho^2 \nu^{-1/2} \varepsilon^{3/2} \approx \\ &\approx \frac{0.15}{|S|} 4.96 \rho^2 \nu^{-1/2} \varepsilon^{3/2} \approx \frac{0.74}{|S|} \rho^2 \nu^{-1/2} \varepsilon^{3/2} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Следовательно<sup>1</sup>,

$$\frac{3}{2\rho^2} \frac{d^2 \Pi(0)}{dr^2} = \frac{1}{\rho^2} \sum_{i=1}^3 \overline{\left( \frac{\partial p}{\partial x_i} \right)^2} \approx \frac{1.1}{|S|} \nu^{-1/2} \varepsilon^{3/2} \quad (3.9)$$

Далее, воспользовавшись тем, что при любом выборе системы координат

$$\sum_{i=1}^3 D_{ii}(r) = D_{ll}(r) + 2D_{nn}(r) \quad (3.10)$$

и равенством (1.12), получим

$$\begin{aligned} \Delta^2 \sum_{i=1}^3 D_{ii}(r) &\equiv \left( \frac{d^4}{dr^4} + \frac{4}{r} \frac{d^3}{dr^3} \right) \left( 3D_{ll}(r) + r \frac{dD_{ll}(r)}{dr} \right) = \\ &= r \frac{d^5 D_{ll}(r)}{dr^5} + 11 \frac{d^4 D_{ll}(r)}{dr^4} + \frac{24}{r} \frac{d^3 D_{ll}(r)}{dr^3} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Переходя здесь по формулам (1.6), (1.7) от  $D_{ll}(r)$  к безразмерной функции  $\beta_{ll}(x)$ , будем иметь

$$\Delta^2 \sum_{i=1}^3 D_{ii}(r) = \frac{k_2^2}{k_1^4} \nu^{-5/2} \varepsilon^{3/2} \left\{ \frac{r}{\eta_1} \beta_{ll}^{\text{IV}} \left( \frac{r}{\eta_1} \right) + 11 \beta_{ll}^{\text{IV}} \left( \frac{r}{\eta_1} \right) + \frac{24}{r/\eta_1} \beta_{ll}^{\text{III}} \left( \frac{r}{\eta_1} \right) \right\} \quad (3.12)$$

Заметим теперь, что в силу (1.25)

$$\frac{k_2^2}{k_1^4} = \frac{|S| \sqrt{2}}{120 V^5} \quad (3.13)$$

и что  $\beta_{ll}(x)$  — четная функция  $x$ , которая может быть разложена в окрестности нуля в степенный ряд по  $x^2$ :

$$\beta_{ll}(x) = b_1 x^2 + b_2 x^4 + \dots \quad (3.14)$$

Из (3.12), (3.13) и (3.14) вытекает, что

$$\Delta^2 \left( \sum_{i=1}^3 D_{ii}(0) \right) = \frac{|S| \sqrt{2}}{120 V^5} \nu^{-5/2} \varepsilon^{3/2} 840 b_2 = \frac{7 \sqrt{2} |S|}{V^5} b_2 \nu^{-5/2} \varepsilon^{3/2} \quad (3.15)$$

<sup>1</sup> Расчет величины  $|\text{grad } p|^2$  для локально изотропной турбулентности содержится также в работе Гайзенберга [21]. Метод Гайзенберга основан на использовании спектральной функции  $E(p)$  (см. сноску на стр. 10) и требует значительно более сложных вычислений. К тому же в окончательную формулу Гайзенберга входят величины, которые не могут быть отдельно измерены на опыте.

Таким образом, остается только определить, чему равен коэффициент  $b_2$  в (3.14). Из первого равенства (1.28) следует, что  $b_1 = \frac{1}{2}$ . Подставив теперь разложение (3.14) в уравнение (1.26) и приравняв коэффициенты при  $r^3$  (или, что то же самое, продифференцировав уравнение (1.26) по  $r$  три раза и положив затем  $r = 0$ ), легко получаем равенство

$$b_2 = -\frac{1}{3\sqrt{6}} \quad (3.16)$$

Подставляя это значение  $b_2$  в (3.15), будем иметь

$$-\frac{v^2}{2} \Delta^2 \left( \sum_{i=1}^3 D_{ii}(0) \right) = v^2 \sum_{i=1}^3 \overline{(\Delta v_i)^2} = \frac{7|S|}{6V\sqrt{15}} v^{-1/2} \epsilon^{3/2} \approx 0.3 |S| v^{-1/2} \epsilon^{3/2}$$

Заметим, что так как  $|S| \approx 0.4$ , то из сравнения (3.9) с (3.17) следует, что ускорение частиц жидкости в турбулентном потоке в основном определяется флуктуирующими градиентами давления, а не силами трения: член с  $\Pi''(0)$  в равенстве (3.7) оказывается более чем в 20 раз превосходящим член, зависящий от вязкости. Как увидим в дальнейшем, это сильно упрощает расчет корреляционных функций поля ускорений.

Подставляя (3.9) и (3.17) в (3.7), мы окончательно для расчета среднего квадратичного ускорения  $w_0$  получим следующую формулу:

$$w_0^2 = \sum_{i=1}^3 \overline{(w_i)^2} \approx \left( \frac{4.1}{|S|} + 0.3 |S| \right) v^{-1/2} \epsilon^{3/2} \quad (3.18)$$

Учитывая, что  $|S| \approx 0.4$ , можно заменить (3.18) простым соотношением:

$$w_0^2 \approx 3v^{-1/2} \epsilon^{3/2} \quad (3.19)$$

Это общее соотношение позволяет уже без труда оценивать порядок величины  $w_0$  в конкретных турбулентных потоках.

Для примера применим формулу (3.19) для расчета среднего квадратичного ускорения в некоторых турбулентных потоках за решеткой в аэродинамических трубах и в турбулентной атмосфере. В случае изотропной турбулентности, создаваемой турбулизирующими решетками в аэродинамических трубах, диссипация  $\epsilon$  может быть определена или как

$$\epsilon = -\frac{3}{2} V \frac{d\overline{v'^2}}{dx}$$

где  $\overline{v'^2}$  — средняя квадратичная пульсация скорости,  $V$  — средняя скорость,  $x$  — расстояние от решетки, или как

$$\epsilon = \frac{15v\overline{v'^2}}{\lambda^2}$$

где  $\lambda$  — введенная Тэйлором длина, экспериментально определяемая вписыванием параболы в график корреляционной функции  $B_{ii}(r)$ . Зная диссипацию  $\epsilon$ , мы можем вычислить  $w_0$  по формуле

$$w_0 = 2.77 \epsilon^{3/4} \text{ см/сек}^2 \quad (3.20)$$

получаемой подстановкой в (3.19) вязкости воздуха  $\nu = 0.15 \text{ см}^2/\text{сек}$ .



В частности, воспользовавшись некоторыми данными, приведенными в работе Таунсенда [4] (эти данные относятся к потоку в аэродинамической трубе за квадратной решеткой с величиной ячейки  $M = 6$  дюймов на расстоянии  $x = 30.5 M$  от решетки при различных значениях средней скорости  $V$ ), для  $\varepsilon$  и  $\omega_0$  получим следующие значения:

$V$ м сек <sup>-1</sup>	$\varepsilon$ см <sup>2</sup> сек <sup>-3</sup>	$\omega_0$ см сек <sup>-2</sup>
12.2	160.5	60.4
24.4	312.4	206.8
30.5	559.8	320.3

Мы видим, таким образом, что мгновенные значения ускорения в турбулентном потоке за решеткой будут порядка нескольких м/сек<sup>2</sup>.

Применение формулы (3.19) или (3.20) к расчету ускорений в турбулентной атмосфере затрудняется тем, что в настоящее время не имеется никаких измерений диссипации энергии для этого случая. Однако при той точности, которую имеют наши расчеты, мы вполне можем воспользоваться оценкой величины  $\varepsilon$  для турбулентной атмосферы по формулам теории логарифмического пограничного слоя. Известно [15], что для логарифмического пограничного слоя

$$\varepsilon = \frac{1}{\kappa} \frac{v_*^3}{y} \quad (3.21)$$

где  $y$  — расстояние от стенки,  $\kappa$  — безразмерная постоянная (константа Кармана), равная приблизительно 0.4, а  $v_* = \sqrt{\tau_0/\rho}$  ( $\tau_0$  — напряжение трения,  $\rho$  — плотность) — так называемая динамическая скорость, определяемая по разности средних скоростей в двух точках или по средней скорости в одной точке и величине шероховатости. Подставляя в формулу (3.19) выражение (3.21) для диссипации и  $\nu = 0.15$  см<sup>2</sup> сек<sup>-1</sup>, получим расчетную формулу, определяющую среднее квадратичное ускорение в воздушном логарифмическом пограничном слое:

$$\omega_0 \approx 5.5 \frac{v_*^{9/4}}{y^{3/4}} \frac{\text{см}}{\text{сек}^2} \quad (3.22)$$

Так как  $v_*$  пропорционально средней скорости  $V$ , то отсюда

$$\omega_0 \sim V^{9/4} \quad (3.23)$$

т. е.  $\omega_0$  быстро растет с ростом  $V$ . Для примера примем величину шероховатости  $h_0 = 3$  см (заметим, впрочем, что приведенные ниже расчеты сравнительно слабо зависят от величины шероховатости) и обозначим через  $V$  среднюю скорость ветра на высоте  $y = 150$  см; тогда

$$v_* = \frac{\kappa V}{\ln(y/h_0)} \approx 0.1 V \quad (3.24)$$

и для среднего квадратичного ускорения  $\omega_0$  при различных скоростях  $V$  получаем следующие значения:

$V$ м сек <sup>-1</sup>	1	3	5	6	8
$\omega_0$ см сек <sup>-2</sup>	22	260	830	1200	2400

Таким образом, среднее квадратичное ускорение в рассматриваемых условиях при средней скорости ветра  $V \approx 5.5$  м сек<sup>-1</sup> достигает величины ускорения  $g$  силы тяжести, а при большем ветре может значительно превзойти это ускорение. Естественно думать, что столь значительные ускорения могут играть заметную роль во многих физических процессах в атмосфере (например, в явлении коагуляции туманов).

Перейдем к вычислению корреляционной функции поля ускорений:

$$A_{ij}(M, M') = \overline{w_i(M) w_j(M')} \quad (3.25)$$

Воспользовавшись опять уравнением (3.2), получим

$$A_{ij}(M, M') = \frac{1}{\rho^2} \overline{\frac{\partial p}{\partial x_i} \frac{\partial p'}{\partial x_j'}} - \frac{v}{\rho} \left( \overline{\frac{\partial p}{\partial x_i} \Delta' v_j'} + \overline{\Delta v_i \frac{\partial p'}{\partial x_j'}} \right) + v^2 \overline{\Delta v_i \Delta' v_j'} \quad (3.26)$$

Здесь величины без штрихов относятся к точке  $M$ , а величины со штрихами — к точке  $M'$ . Средний член в правой части этого равенства может быть отброшен по тем же причинам, по которым мы ранее отбрасывали средний член в правой части (3.3), а первый и третий члены легко выражаются через структурные функции (1.1) и (2.1). Имеем

$$\overline{\frac{\partial p}{\partial x_i} \frac{\partial p'}{\partial x_j'}} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Pi(M, M')}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \quad (3.27)$$

где  $\xi_i, \xi_j$  — компоненты вектора  $MM'$  и

$$\overline{\Delta v_i \Delta' v_j'} = -\frac{1}{2} \Delta^2 D_{ij}(M, M') \quad \left( \Delta = \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_3^2} \right) \quad (3.28)$$

Преобразуем теперь выражения (3.27) и (3.28). Поскольку  $\Pi(M, M')$  зависит только от расстояния  $r = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}$ , то

$$\frac{\partial^2 \Pi(M, M')}{\partial \xi_i \partial \xi_j} = \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left\{ \frac{d\Pi(r)}{dr} \frac{\xi_j}{r} \right\} = \left\{ \frac{d^2 \Pi(r)}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d\Pi(r)}{dr} \right\} \frac{\xi_i \xi_j}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Pi(r)}{dr} \delta_{ij} \quad (3.29)$$

Заменяя далее  $D_{ij}(M, M')$  согласно (1.3) и (1.12) на

$$\left[ D_{11}(r) + \frac{r}{2} D_{11}'(r) \right] \delta_{ij} - \frac{1}{2r} D_{11}'(r) \xi_i \xi_j$$

получим

$$\Delta^2 D_{ij}(M, M') = D_1(r) \frac{\xi_i \xi_j}{r^2} + D_2(r) \delta_{ij} \quad (3.30)$$

где

$$D_1(r) = -\frac{12}{r^3} \frac{dD_{11}}{dr} + \frac{12}{r^2} \frac{d^2 D_{11}}{dr^2} - 4 \frac{d^4 D_{11}}{dr^4} - \frac{r}{2} \frac{d^5 D_{11}}{dr^5} \quad (3.31)$$

$$D_2(r) = \frac{4}{r^3} \frac{dD_{11}}{dr} - \frac{4}{r^2} \frac{d^2 D_{11}}{dr^2} + \frac{8}{r} \frac{d^3 D_{11}}{dr^3} + 5 \frac{d^4 D_{11}}{dr^4} + \frac{r}{2} \frac{d^5 D_{11}}{dr^5} \quad (3.32)$$

Таким образом,

$$A_{ij}(M, M') = A_1(r) \frac{\xi_i \xi_j}{r^2} + A_2(r) \delta_{ij} \quad (3.33)$$



где

$$A_1(r) = \frac{1}{2\varphi^2} \left\{ \frac{d^2\Pi(r)}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d\Pi(r)}{dr} \right\} - \frac{v^2}{2} D_1(r) \quad (3.34)$$

$$A_2(r) = \frac{1}{2\varphi^2 r} \frac{d\Pi(r)}{dr} - \frac{v^2}{2} D_2(r) \quad (3.35)$$

а  $D_1(r)$  и  $D_2(r)$  определяются по формулам (3.31) и (3.32).

Функции  $A_1(r)$  и  $A_2(r)$  выражаются через продольную и поперечную корреляционные функции поля ускорений, определяемые равенствами

$$A_{ll}(r) = \overline{w_l(M) w_l(M')}, \quad A_{nn}(r) = \overline{w_n(M) w_n(M')} \quad (3.36)$$

где  $w_l(M)$  и  $w_l(M')$  — проекции ускорений в точках  $M$  и  $M'$  на направление вектора  $MM'$ , а  $w_n(M)$  и  $w_n(M')$  — проекции ускорений в этих же точках на некоторое направление, перпендикулярное вектору  $MM'$ . Действительно, поле ускорений локально изотропного турбулентного потока изотропно в обычном смысле и, следовательно,

$$A_{ij}(M, M') = \frac{A_{ll}(r) - A_{nn}(r)}{r^2} \xi_i \xi_j + A_{nn}(r) \delta_{ij} \quad (3.37)$$

(ср., например, [19] и равенство (1.3) выше). Сравнивая (3.33) и (3.37) и учитывая (3.34), (3.35), получим

$$A_{ll}(r) = A_1(r) + A_2(r) = \frac{1}{2\varphi^2} \frac{d^2\Pi(r)}{dr^2} - \frac{v^2}{2} (D_1(r) + D_2(r)) \quad (3.38)$$

$$A_{nn}(r) = A_2(r) = \frac{1}{2\varphi^2 r} \frac{d\Pi(r)}{dr} - \frac{v^2}{2} D_2(r) \quad (3.39)$$

В формулах (3.38) и (3.39) можно обычным образом перейти к безразмерным функциям; эти безразмерные функции могут быть далее рассчитаны при помощи результатов § 1 и 2.

Отметим, что при этих расчетах члены с  $D_1(r)$  и  $D_2(r)$  можно отбросить, не делая при этом заметной ошибки. Действительно, выше было показано, что при  $r=0$  члены, зависящие от вязкости, т. е. как раз члены, содержащие  $D_1(r)$  и  $D_2(r)$ , пренебрежимо малы по сравнению с членами, определяемыми градиентами давления. С ростом  $r$  и те и другие члены убывают, причем асимптотически члены, зависящие от вязкости, убывают гораздо быстрее, чем члены, определяемые градиентами давления: из формул (2.6) и (1.9) следует, что при  $r \gg \eta_1$

$$\frac{d^2\Pi(r)}{dr^2} \sim r^{-2/3}, \quad \frac{1}{r} \frac{d\Pi(r)}{dr} \sim r^{-2/3} \quad (3.40)$$

$$D_1(r) \sim r^{-10/3}, \quad D_2(r) \sim r^{-10/3} \quad (3.41)$$

Таким образом, и при малых и при больших  $r$  члены (3.38), (3.39), содержащие  $v$ , значительно меньше членов, зависящих от  $\Pi(r)$ . В связи с этим при исследовании структуры поля ускорений в турбулентном потоке вполне допустимо откинуть члены с вязкостью в уравнениях движения и считать, что

$$w_i = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.42)$$

$$A_{ij}(M, M') = \frac{1}{2\varphi^2} \frac{\partial^2 \Pi(M, M')}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \quad (3.43)$$

При этом для продольной и поперечной корреляционных функций (3.36) имеем

$$A_{ll}(r) = \frac{1}{2\rho^2} \frac{d^2\Pi(r)}{dr^2}, \quad A_{nn}(r) = \frac{1}{2\rho^2 r} \frac{d\Pi(r)}{dr} \quad (3.44)$$

Переходя теперь по формулам (2.24), (1.7) и (1.25) к безразмерным величинам и воспользовавшись равенством (2.25), найдем

$$A_{ll}(r) = \frac{k_2^4}{k_1^2} v^{-1/2} \varepsilon^{3/2} \alpha_{ll}\left(\frac{r}{\eta_1}\right) \approx \frac{0.45}{|S|} v^{-1/2} \varepsilon^{3/2} \alpha_{ll}\left(\frac{r}{\eta_1}\right) \quad (3.45)$$

$$A_{nn}(r) = \frac{k_2^4}{k_1^2} v^{-1/2} \varepsilon^{3/2} \alpha_{nn}\left(\frac{r}{\eta_1}\right) \approx \frac{0.45}{|S|} v^{-1/2} \varepsilon^{3/2} \alpha_{nn}\left(\frac{r}{\eta_1}\right) \quad (3.46)$$

где  $\alpha_{ll}(x)$  и  $\alpha_{nn}(x)$  — универсальные функции, задаваемые формулами

$$\alpha_{ll}(x) = \frac{1}{6x^3} \int_0^x \zeta^4 \varphi(\zeta) d\zeta + \frac{1}{6} \int_x^\infty \zeta \varphi(\zeta) d\zeta \quad (3.47)$$

$$\alpha_{nn}(x) = \frac{1}{4x} \int_0^x \zeta^2 \varphi(\zeta) d\zeta - \frac{1}{12x^3} \int_0^x \zeta^4 \varphi(\zeta) d\zeta + \frac{1}{6} \int_x^\infty \zeta \varphi(\zeta) d\zeta \quad (3.48)$$

Как и в случае поля скоростей и поля давлений, при  $x \ll 1$  и при  $x \gg 1$  можно получить для введенных в излагаемой теории функций простые асимптотические формулы. Прежде всего ясно, что

$$\alpha_{ll}(0) = \alpha_{nn}(0) = \frac{1}{6} \int_0^\infty \zeta \varphi(\zeta) d\zeta \approx 0.83 \quad (3.49)$$

Полагая теперь в формулах (3.47), (3.48)  $x \ll 1$ , мы можем воспользоваться тем, что для таких значений  $x$  согласно первой формуле (1.28)  $\beta_{ll}(x) \approx \frac{1}{2} x^2$  и, следовательно,  $\varphi(x) \approx 30$ ; отсюда имеем

$$\alpha_{ll}(x) \approx \alpha_{ll}(0) - \frac{3}{2} x^2, \quad \alpha_{nn}(x) \approx \alpha_{nn}(0) - \frac{1}{2} x^2 \quad \text{при } x \ll 1 \quad (3.50)$$

Во втором крайнем случае, при  $x \gg 1$ , асимптотическое поведение  $\alpha_{ll}(x)$  и  $\alpha_{nn}(x)$  определяем при помощи формул (2.30) и (3.44). Имеем

$$\alpha_{ll}(x) \approx \frac{1}{8} x^{-2/3}, \quad \alpha_{nn}(x) \approx \frac{3}{8} x^{-2/3} \quad \text{при } x \gg 1 \quad (3.51)$$

Вычисление функций  $\alpha_{ll}(x)$  и  $\alpha_{nn}(x)$  при  $x \sim 1$  можно произвести численно, воспользовавшись данными, содержащимися в § 1 и 2. При этом удобно вместо  $\alpha_{ll}(x)$  и  $\alpha_{nn}(x)$  ввести нормированные функции

$$R_{ll}(x) = \frac{\alpha_{ll}(x)}{\alpha_{ll}(0)}, \quad R_{nn}(x) = \frac{\alpha_{nn}(x)}{\alpha_{nn}(0)} \quad (3.52)$$

Эти функции равны коэффициенту корреляции продольных (соответственно поперечных) компонент ускорения в двух точках на расстоянии  $r = x\eta_1$  друг от друга. Графики функций  $R_{ll}(x)$  и  $R_{nn}(x)$ , определенные посредством численного интегрирования интегралов, фигурирующих в правых частях (3.47) и (3.48), приведены на фиг. 3. Мы видим, что продольная корреляционная функция  $R_{ll}(x)$  быстро затухает и практи-



чески при  $x \geq 1.1$  может уже считаться равной нулю; наоборот, функция  $R_{nn}(x)$  затухает сравнительно медленно и при  $x = 3$  равна приблизительно 0.17. Для оценки величины этих функций при значительно больших значениях  $x$  (порядка 10 и более) можно воспользоваться формулами (3.51); согласно этим формулам при  $x = 10$ , например, мы будем иметь  $R_{ll}(10) \approx 0,03$ ,  $R_{nn}(10) \approx 0.1$  (на фиг. 3 область применимости формул (3.51) не изображена, так как для этого пришлось бы выбрать значительно более мелкий масштаб).

Отметим еще, что вид корреляционных функций поля ускорений, изображенных на фиг. 3, резко отличается от вида корреляционных функций поля скоростей для изотропной турбулентности:

в случае поля скоростей график продольной корреляционной функции обычно располагается выше графика поперечной функции и ось абсцисс пересекает не первый, а второй из этих графиков. Эта разница в поведении корреляционных функций для скоростей и для ускорений объясняется тем, что поле скоростей в несжимаемой жидкости есть соленоидальное векторное поле, а поле ускорений мы считаем полем потенциальным [см. равенство (3.42)]. Отсюда вытекает, что функции  $R_{ll}(x)$  и  $R_{nn}(x)$  связаны между собой соотношением

$$R_{ll}(x) = R_{nn}(x) + x \frac{dR_{nn}(x)}{dx} \quad (3.53)$$

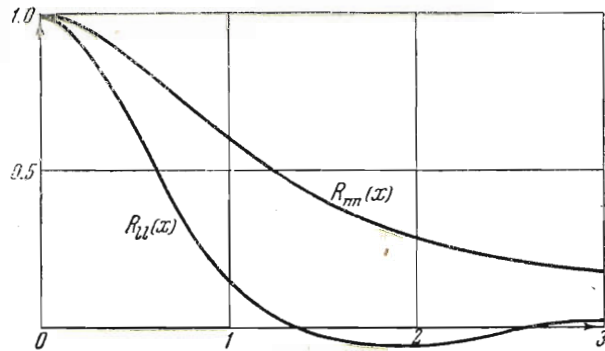
(это соотношение, являющееся необходимым и достаточным условием для того, чтобы изотропное векторное поле, имеющее корреляционные функции  $R_{ll}(x)$  и  $R_{nn}(x)$ , было потенциальным, принадлежит А. М. Обухову), в то время как корреляционные функции  $B_{ll}(r)$  и  $B_{nn}(r)$  поля скоростей удовлетворяют условию Кармана [ср. <sup>119]</sup> и (1.13)]

$$B_{nn}(r) = B_{ll}(r) + \frac{r}{2} \frac{dB_{ll}(r)}{dr} \quad (3.54)$$

Условия (3.53) и (3.54) помимо мало существенного множителя  $\frac{1}{2}$  во втором члене правой части отличаются друг от друга тем, что роли продольной и поперечной функций в них противоположны; поэтому и неудивительно, что функции  $R_{ll}(x)$  и  $R_{nn}(x)$  ведут себя обратно тому, как ведут себя функции  $B_{ll}(r)$  и  $B_{nn}(r)$ .

В заключение авторы выражают благодарность А. В. Перепелкиной и Ю. В. Прохорову, выполнившим численные расчеты для § 2 и 3.

Поступила 7 X 1950



Фиг. 3

## ЛИТЕРАТУРА

1. Колмогоров А. Н. Локальная структура турбулентности в несжимаемой жидкости при очень больших числах Рейнольдса. ДАН СССР. 1941. Т. 30. № 4.
2. Колмогоров А. Н. Рассеяние энергии при локально изотропной турбулентности. ДАН СССР. 1941. Т. 32. № 1.
3. Обухов А. М. О распределении энергии в спектре турбулентного потока. Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз. 1941. № 4—5.
4. Townsend A. A. Experimental evidence for the theory of local isotropy. Proc. Camb. Phil. Soc. 1948. Vol. 44. No. 4.
5. Karman Th. Progress in the statistical theory of turbulence. Proc. Nat. Acad. Sci. 1948. Vol. 34. No. 11.
6. Richardson L. F. Atmospheric diffusion shown on a distance-neighbour graph. Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1926. Vol. 110. No. 756.
7. Обухов А. М. Локальная структура атмосферной турбулентности. ДАН СССР 1949. Т. 67. № 4.
8. Stommel H. Horizontal diffusion due to oceanic turbulence. Journ. Marine Res. 1949. Vol. 8. № 3.
9. Красильников В. А. О распространении звука в турбулентной атмосфере. ДАН СССР. 1945. Т. 47. № 7.
10. Юдин М. И. Вопросы теории турбулентности и структуры ветра с приложением к задаче о колебаниях самолета. Гидрометиздат. 1946.
11. Обухов А. М. Структура температурного поля в турбулентном потоке. Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз. 1949. Т. 13. № 1.
12. Яглом А. М. О локальной структуре поля температур в турбулентном потоке. ДАН СССР. 1949. Т. 69. № 6.
13. Красильников В. А. О влиянии пульсаций коэффициента преломления в атмосфере на распространение ультракоротких радиоволн. Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз. 1949. Т. 13. № 1.
14. Красильников В. А. О флуктуациях угла прихода в явлении мерцания звезд. ДАН СССР. 1949. Т. 65. № 3.
15. Ландау Л. Д. и Лившиц Е. М. Механика сплошных сред. Гостехиздат. 1944.
16. Обухов А. М. Пульсация давления в турбулентном потоке. ДАН СССР. 1949. Т. 66. № 1.
17. Яглом А. М. О поле ускорений в турбулентном потоке. ДАН СССР. 1949. Т. 67. № 5.
18. Karman Th. and Howarth L. On the statistical theory of isotropic turbulence. Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1938. Vol. 164. No. 917.
19. Лойцянский Л. Г. Некоторые основные закономерности изотропного турбулентного потока. Труды ЦАГИ. 1939. № 440.
20. Яглом А. М. Однородная и изотропная турбулентность в вязкой сжимаемой жидкости. Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз. 1948. Т. 12. № 6.
21. Heisenberg W. Zur statischen Theorie der Turbulenz. Zschr. f. Phys. 1948. Bd. 124. H. 7—12.
22. Kovasznay L. Spectrum of locally isotropic turbulence. Journ. of Aer. Sci. 1948. Vol. 15. No. 12.
23. Gödecke K. Messungen der atmosphärische Turbulenz. Ann. d. Hydrographie. 1936. H. 10.
24. Миллионщиков М. Д. К теории однородной изотропной турбулентности. Изв. АН СССР, серия геогр. и геофиз. 1941. № 4—5.
25. Обухов А. М. Теория корреляции векторов. Ученые записки МГУ. 1940. вып. 45 (математика).