Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XV, 1951

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ИЗГИБА И УСТОЙЧИВОСТИ ТРЕХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН С ЛЕГКИМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ

А. П. Прусаков

(Новосибирск)

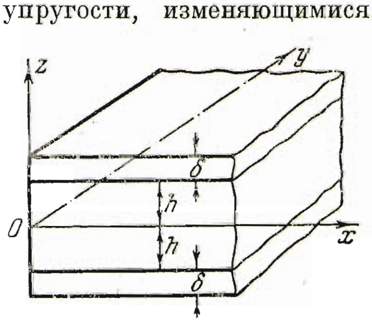
В работе рассматривается пластина, состоящая из трех слоев, причем два внешних слоя небольшой толщины из сравнительно тяжелого и прочного материала заключают внутренний слой из более легкого и менее прочного «заполнителя»; такие пластины при сравнительно небольшом весе обладают большой жесткостью.

В работах, посвященных вопросам изгиба и устойчивости пластин с легким заполнителем, рассматривались либо бесконечно широкие пластины [1], либо пластины в предположении недеформируемости внутреннего слоя в поперечном направлении (ограничиваясь при этом рассмотрением случая $G_{13} = G_{23} = G_0$) и допущении о равномерном распределении напряжений по высоте внешних слоев [2].

В настоящей статье даются общие уравнения изгиба и устойчивости таких пластин, свободные от указанных допущений. В качестве примера рассмотрена устойчивость свободно опертой пластины при одностороннем сжатии.

За ряд замечаний по работе автор благодарен Л. И. Балабуху.

§ 1. Основные дифференциальные уравнения. Изгиб трехслойной пластины (фиг. 1) рассматриваем как задачу теории упругости для ортогонально анизотропного тела с модулями упругости, изменяющимися ступенчато по высоте. Приведем основные уравнения теории упругости.



Фиг. 1

Уравнения равновесия

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}=0$$

$$\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}=0 \qquad (1.1)$$

$$\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}=0$$

Закон Гука [3]

$$\varepsilon_x=\frac{\sigma_x}{E_1}-\frac{\mu_{21}}{E_2}\sigma_y-\frac{\mu_{31}}{E_3}\sigma_z, \qquad \gamma_{xy}=\frac{\tau_{xy}}{G_{12}}$$

$$\varepsilon_z=\frac{\sigma_z}{E_3}-\frac{\mu_{13}}{E_1}\sigma_x-\frac{\mu_{23}}{E_2}\sigma_y, \qquad \gamma_{yz}=\frac{\tau_{yz}}{G_{23}} \qquad (1.2)$$

$$\varepsilon_y=\frac{\sigma_y}{E_2}-\frac{\mu_{12}}{E_1}\sigma_x-\frac{\mu_{32}}{E_3}\sigma_z, \qquad \gamma_{xz}=\frac{\tau_{xz}}{G_{13}}$$

причем

$$\frac{\mu_{12}}{E_1}=\frac{\mu_{21}}{E_2}, \qquad \frac{\mu_{23}}{E_2}=\frac{\mu_{32}}{E_3}, \qquad \frac{\mu_{13}}{E_1}=\frac{\mu_{31}}{E_3} \qquad (1.3)$$

Зависимости между деформациями и перемещениями

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$
$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \qquad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \tag{1.4}$$

Метод решения задачи состоит в том, чтобы при помощи некоторых предположений о модулях упругости материалов, составляющих пластину, получить решения уравнений упругости.

Легкие заполнители имеют сравнительно небольшие величины модулей упругости (порядка 200—3000 кг / см²), поэтому, рассматривая внутренний слой в сочетании с внешними, выполненными из такого, например, материала, как дюраль ($E = 7.2 \times 10^5$ кг / см²), для $-h \leqslant z \leqslant h$ можно принять $E_1 = E_2 = G_{12} = 0$. Так как ε_x, ε_y, μ_{32}, μ_{31} конечны по величине, то, используя (1.2), (1.3), найдем

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = \mu_{13} = \mu_{23} = 0$$
$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E_3}, \qquad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G_{13}}, \qquad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G_{23}} \tag{1.5}$$

Рассматривая внешние слои как пластины (вследствие их малой толщины и большой жесткости), примем

$$E_3 = G_{13} = G_{23} = \infty, \qquad G_{12} = G \qquad (\mu_{12} = \mu_{21} = \mu), \qquad E_1 = E_2 = E$$

(условия $E_3 = G_{13} = G_{23} = \infty$ эквивалентны, как мы увидим, гипотезе Кирхгофа для пластин).

Тогда из (1.2), (1,3) получим

$$\mu_{13} = \mu_{23} = \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = \varepsilon_z = 0$$
$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y), \qquad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x), \qquad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy} \tag{1.6}$$

При помощи (1.5), (1.6), относящихся соответственно к внутреннему и внешним слоям, можно получить решения уравнений теории упругости (1.1) — (1.4).

Для внутреннего слоя $(-h \leqslant z \leqslant h)$ это решение будет иметь вид:

$$\tau_{xz} = \varphi_1, \qquad \tau_{yz} = \varphi_2, \qquad \sigma_z = \varphi_3 - z\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right)$$
$$w = \varphi_4 + \frac{z}{E_3}\left[\varphi_3 - \frac{z}{2}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right)\right]$$
$$u = \varphi_5 + z\left(\frac{\varphi_1}{G_{13}} - \frac{\partial \varphi_4}{\partial x}\right) - \frac{z^2}{2E_3}\left[\frac{\partial \varphi_3}{\partial x} - \frac{z}{3}\left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x\,\partial y}\right)\right] \tag{1.7}$$
$$v = \varphi_6 + z\left(\frac{\varphi_2}{G_{23}} - \frac{\partial \varphi_4}{\partial y}\right) - \frac{z^2}{2E_3}\left[\frac{\partial \varphi_3}{\partial y} - \frac{z}{3}\left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2}\right)\right]$$

Для верхнего слоя ($h \leqslant z \leqslant h+\delta$)

$$w = \Phi_1, \qquad u = \Phi_2 - z\,\frac{\partial \Phi_1}{\partial x}, \qquad v = \Phi_3 - z\,\frac{\partial \Phi_1}{\partial y}$$

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2}\left[\frac{\partial \Phi_2}{\partial x} + \mu\,\frac{\partial \Phi_3}{\partial y} - z\left(\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} + \mu\,\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2}\right)\right]$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2}\left[\frac{\partial \Phi_3}{\partial y} + \mu\,\frac{\partial \Phi_2}{\partial x} - z\left(\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2} + \mu\,\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2}\right)\right]$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)}\left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial x} - 2z\,\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x\,\partial y}\right) \tag{1.8}$$

$$\tau_{xz} = \Phi_4 - \frac{zE}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2}\,\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2}\,\frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial x\,\partial y} - \frac{z}{2}\,\nabla^2\,\frac{\partial \Phi_1}{\partial x}\right)$$

$$\tau_{yz} = \Phi_5 - \frac{zE}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial y^2} + \frac{1-\mu}{2}\,\frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial x^2} + \frac{1+\mu}{2}\,\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x\,\partial y} - \frac{z}{2}\,\nabla^2\,\frac{\partial \Phi_1}{\partial y}\right)$$

$$\sigma_z = \Phi_6 - z\left(\frac{\partial \Phi_4}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_5}{\partial y}\right) + \frac{z^2 E}{2(1-\mu^2)}\,\nabla^2\left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial y} - \frac{z}{3}\,\nabla^2\,\Phi_1\right)$$

В уравнениях (1.7), (1.8) через $\varphi_1(x, y)$, $\varphi_2(y, y)$, . . . , $\varphi_6(x, y)$ и $\Phi_1(x, y)$, . . . , $\Phi_6(x, y)$ обозначены произвольные функции интегрирования. Первые три уравнения (1.8), как легко видеть, выражают гипотезу Кирхгофа о прямых нормалях.

Решение для нижнего слоя ($-h-\delta \leqslant z \leqslant -h$) будет иметь вид, аналогичный (1.8).

Таким образом, решение задачи свелось к определению произвольных функций интегрирования $\varphi_1, \ldots, \varphi_6, \Phi_1, \ldots, \Phi_6, \psi_1, \ldots, \psi_6$ (функции $\psi_1, \ldots, \psi_6$ относятся к нижнему слою). Эти функции будут полностью определены, если рассмотрим условия сопряжения слоев при $z = h$, $z = -h$, граничные условия на поверхностях $z = h + \delta$, $z = -h - \delta$ и граничные условия по кромкам пластины (граничные условия по кромкам пластины будут рассмотрены в § 2).

Граничные условия на поверхности $z = h + \delta$ будут

$$\tau_{xz} = 0, \qquad \tau_{yz} = 0, \qquad \sigma_z = q_1(x, y) \tag{1.9}$$

Условия сопряжения при $z = h$

$$\begin{aligned}
(\tau_{xz})_{z=h-0} &= (\tau_{xz})_{z=h+0}, & (\tau_{yz})_{z=h-0} &= (\tau_{yz})_{z=h+0} \\
(\sigma_z)_{z=h-0} &= (\sigma_z)_{z=h+0}, & (u)_{z=h-0} &= (u)_{z=h+0} \\
(v)_{z=h-0} &= (v)_{z=h+0}, & (w)_{z=h-0} &= (w)_{z=h+0}
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Для нижнего слоя граничные условия на поверхности и условия сопряжения запишутся аналогично.

В развернутом виде условия (1.9), (1.10), с учетом (1.7), (1.8) будут

$$\left.\begin{aligned}
&\Phi_4-\frac{(h+\delta)E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial x^2}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial y^2}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2\Phi_3}{\partial x\,\partial y}-\frac{h+\delta}{2}\nabla^2\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}\right)=0\\
&\Phi_5-\frac{(h+\delta)E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2\Phi_3}{\partial y^2}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2\Phi_3}{\partial x^2}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial x\,\partial y}-\frac{h+\delta}{2}\nabla^2\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\right)=0
\end{aligned}\right\} \tag{1.11}$$

$$\Phi_6-(h+\delta)\left(\frac{\partial\Phi_4}{\partial x}+\frac{\partial\Phi_5}{\partial y}\right)+\frac{(h+\delta)^2E}{2(1-\mu^2)}\nabla^2\left(\frac{\partial\Phi_2}{\partial x}+\frac{\partial\Phi_3}{\partial y}-\frac{h+\delta}{3}\nabla^2\Phi_1\right)=q_1 \tag{1.12}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\varphi_1=\Phi_4-\frac{hE}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial x^2}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial y^2}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2\Phi_3}{\partial x\,\partial y}-\frac{h}{2}\nabla^2\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}\right)\\
&\varphi_2=\Phi_5-\frac{hE}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2\Phi_3}{\partial y^2}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2\Phi_3}{\partial x^2}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial x\,\partial y}-\frac{h}{2}\nabla^2\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{1.13}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_3-h\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right)=\Phi_6-h\left(\frac{\partial\Phi_4}{\partial x}+\frac{\partial\Phi_5}{\partial y}\right)+&\\
+\frac{h^2E}{2(1-\mu^2)}\nabla^2\left(\frac{\partial\Phi_2}{\partial x}+\frac{\partial\Phi_3}{\partial y}-\frac{h}{3}\nabla^2\Phi_1\right)&
\end{aligned} \tag{1.14}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\varphi_5+h\left(\frac{\varphi_1}{G_{13}}-\frac{\partial\varphi_4}{\partial x}\right)-\frac{h^2}{2E_3}\left[\frac{\partial\varphi_3}{\partial x}-\frac{h}{3}\left(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x\,\partial y}\right)\right]=\Phi_2-h\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}\\
&\varphi_6+h\left(\frac{\varphi_2}{G_{23}}-\frac{\partial\varphi_4}{\partial y}\right)-\frac{h^2}{2E_3}\left[\frac{\partial\varphi_3}{\partial y}-\frac{h}{3}\left(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial y^2}\right)\right]=\Phi_3-h\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}
\end{aligned}\right\} \tag{1.15}$$

$$\varphi_4+\frac{h}{E_3}\left[\varphi_3-\frac{h}{2}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right)\right]=\Phi_1 \tag{1.16}$$

Для нижнего слоя будем иметь

$$\left.\begin{aligned}
&\psi_4+\frac{(h+\delta)E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2\psi_2}{\partial y^2}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2\psi_3}{\partial x\,\partial y}+\frac{h+\delta}{2}\nabla^2\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\right)=0\\
&\psi_5+\frac{(h+\delta)E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2\psi_3}{\partial y^2}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2\psi_3}{\partial x^2}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x\,\partial y}+\frac{h+\delta}{2}\nabla^2\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\right)=0
\end{aligned}\right\} \tag{1.17}$$

$$\psi_6+(h+\delta)\left(\frac{\partial\psi_4}{\partial x}+\frac{\partial\psi_5}{\partial y}\right)+\frac{(h+\delta)^2E}{2(1-\mu^2)}\nabla^2\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial x}+\frac{\partial\psi_3}{\partial y}+\frac{h+\delta}{3}\nabla^2\psi_1\right)=q_2(x,\ y) \tag{1.18}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\varphi_1=\psi_4+\frac{hE}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2\psi_2}{\partial y^2}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2\psi_3}{\partial x\,\partial y}+\frac{h}{2}\nabla^2\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\right)\\
&\varphi_2=\psi_5+\frac{hE}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2\psi_3}{\partial y^2}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2\psi_3}{\partial x^2}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x\,\partial y}+\frac{h}{2}\nabla^2\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{1.19}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_3+h\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right)=\psi_6+h\left(\frac{\partial\psi_4}{\partial x}+\frac{\partial\psi_5}{\partial y}\right)+&\\
+\frac{h^2E}{2(1-\mu^2)}\nabla^2\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial x}+\frac{\partial\psi_3}{\partial y}+\frac{h}{3}\nabla^2\psi_1\right)&
\end{aligned} \tag{1.20}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\varphi_5-h\left(\frac{\varphi_1}{G_{13}}-\frac{\partial\varphi_4}{\partial x}\right)-\frac{h^2}{2E_3}\left[\frac{\partial\varphi_3}{\partial x}+\frac{h}{3}\left(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x\,\partial y}\right)\right]=\psi_2+h\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\\
&\varphi_6-h\left(\frac{\varphi_2}{G_{23}}-\frac{\partial\varphi_4}{\partial y}\right)-\frac{h^2}{2E_3}\left[\frac{\partial\varphi_3}{\partial y}+\frac{h}{3}\left(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial y^2}\right)\right]=\psi_3+h\frac{\partial\psi_1}{\partial y}
\end{aligned}\right\} \tag{1.21}$$

$$\varphi_4-\frac{h}{E_3}\left[\varphi_3+\frac{h}{2}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right)\right]=\psi_1 \tag{1.22}$$

При помощи полученных уравнений легко показать, что $\varphi_1, \ldots, \varphi_6$, Φ_4, Φ_5, Φ_6, ψ_4, ψ_5, ψ_6 могут быть выражены через Φ_1, Φ_2, Φ_3, ψ_1, ψ_2, ψ_3

и их производные, поэтому общее решение задачи будет определяться функциями Φ_1, Φ_2, Φ_3, ψ_1, ψ_2, ψ_3.

Получим уравнения для определения функций Φ_1, Φ_2, Φ_3, ψ_1 ψ_2, ψ_3. Из (1.11), (1.13), (1.17), (1.19) найдем

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\Phi_2+\psi_2)+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\Phi_2+\psi_2)+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}(\Phi_3+\psi_3)-\\
-\frac{2h+\delta}{2}\nabla^2\frac{\partial}{\partial x}(\Phi_1-\psi_1)=0\\
\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\Phi_3+\psi_3)+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\Phi_3+\psi_3)+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}(\Phi_2+\psi_2)-\\
-\frac{2h+\delta}{2}\nabla^2\frac{\partial}{\partial y}(\Phi_1-\psi_1)=0
\end{gathered} \tag{1.23}$$

$$\begin{gathered}
\varphi_1=\frac{E\delta}{2(1-\mu^2)}\Big[\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\Phi_2-\psi_2)+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\Phi_2-\psi_2)+\\
+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}(\Phi_3-\psi_3)-\frac{2h+\delta}{2}\nabla^2\frac{\partial}{\partial x}(\Phi_1+\psi_1)\Big]\\
\varphi_2=\frac{E\delta}{2(1-\mu^2)}\Big[\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\Phi_3-\psi_3)+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\Phi_3-\psi_3)+\\
+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}(\Phi_2-\psi_2)-\frac{2h+\delta}{2}\nabla^2\frac{\partial}{\partial y}(\Phi_1+\psi_1)\Big]
\end{gathered} \tag{1.24}$$

Используя (1.11), (1.12), (1.14) и (1.17), (1.18), (1.20), получим

$$\begin{gathered}
\varphi_3-h\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right)+\frac{E\delta^2}{2(1-\mu^2)}\nabla^2\left[\frac{3h+2\delta}{3}\nabla^2\Phi_1-\frac{\partial\Phi_2}{\partial x}-\frac{\partial\Phi_3}{\partial y}\right]=q_1\\
\varphi_3+h\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right)-\frac{E\delta^2}{2(1-\mu^2)}\nabla^2\left[\frac{3h+2\delta}{3}\nabla^2\psi_1+\frac{\partial\psi_2}{\partial x}+\frac{\partial\psi_3}{\partial y}\right]=q_2
\end{gathered} \tag{1.25}$$

Поэтому, вычитая из первого уравнения второе, приняв при этом во внимание (1.24), найдем

$$\begin{gathered}
\frac{E[(h+\delta)^3-h^3]}{3(1-\mu^2)}\nabla^2\nabla^2(\Phi_1+\psi_1)-\\
-\frac{E\delta(2h+\delta)}{2(1-\mu^2)}\nabla^2\left[\frac{\partial}{\partial x}(\Phi_2-\psi_2)+\frac{\partial}{\partial y}(\Phi_3-\psi_3)\right]=q_1-q_2
\end{gathered} \tag{1.26}$$

Складывая уравнения (1.25) и учтя при этом соотношения, вытекающие из (1.16), (1.22) и (1.23):

$$\begin{gathered}
\varphi_3=\frac{E_3}{2h}(\Phi_1-\psi_1)\\
\nabla^2\left[\frac{\partial}{\partial x}(\Phi_2+\psi_2)+\frac{\partial}{\partial y}(\Phi_3+\psi_3)\right]=\frac{2h+\delta}{2}\nabla^2\nabla^2(\Phi_1-\psi_1)
\end{gathered} \tag{1.27}$$

получим

$$\frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)}\nabla^2\nabla^2(\Phi_1-\psi_1)+\frac{E_3}{h}(\Phi_1-\psi_1)=q_1+q_2 \tag{1.28}$$

Согласно (1.16), (1.22)

$$\varphi_4=\frac{1}{2}(\Phi_1+\psi_1)+\frac{h^2}{2E_3}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right) \tag{1.29}$$

Поэтому из (1.15), (1.21), учтя (1.24), (1.26), (1.29), найдем:

$$\Phi_2 - \psi_2 = \frac{Eh\delta}{G_{13}(1-\mu^2)}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\Phi_2 - \psi_2) + \frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\Phi_2 - \psi_2) + \right.$$
$$\left. + \frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}(\Phi_3 - \psi_3) - \frac{2h+\delta}{2}\nabla^2\frac{\partial}{\partial x}(\Phi_1 + \psi_1)\right] -$$
$$- \frac{2h^3}{3E_3(2h+\delta)}\left[\frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)}\nabla^2\nabla^2\frac{\partial}{\partial x}(\Phi_1 + \psi_1) - \frac{\partial}{\partial x}(q_1 - q_2)\right] \qquad (1.30)$$

$$\Phi_3 - \psi_3 = \frac{Eh\delta}{G_{23}(1-\mu^2)}\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\Phi_3 - \psi_3) + \frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\Phi_3 - \psi_3) + \right.$$
$$\left. + \frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}(\Phi_2 - \psi_2) - \frac{2h+\delta}{2}\nabla^2\frac{\partial}{\partial y}(\Phi_1 + \psi_1)\right] -$$
$$- \frac{2h^3}{3E_3(2h+\delta)}\left[\frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)}\nabla^2\nabla^2\frac{\partial}{\partial y}(\Phi_1 + \psi_1) - \frac{\partial}{\partial y}(q_1 - q_2)\right] \qquad (1.31)$$

Система уравнений, состоящая из (1.23), (1.26), (1.28), (1.30), (1.31), будет определять общее решение задачи об изгибе трехслойной пластины. Для решения этой системы введем новые функции:

$$\begin{aligned}
\eta_1 &= \frac{1}{2}\left[\Phi_2 + \psi_2 - \left(h + \frac{\delta}{2}\right)\frac{\partial}{\partial x}(\Phi_1 - \psi_1)\right] \\
\eta_2 &= \frac{1}{2}\left[\Phi_2 - \psi_2 - \left(h + \frac{\delta}{2}\right)\frac{\partial}{\partial x}(\Phi_1 + \psi_1)\right] \\
\zeta_1 &= \frac{1}{2}\left[\Phi_3 + \psi_3 - \left(h + \frac{\delta}{2}\right)\frac{\partial}{\partial y}(\Phi_1 - \psi_1)\right] \\
\zeta_2 &= \frac{1}{2}\left[\Phi_3 - \psi_3 - \left(h + \frac{\delta}{2}\right)\frac{\partial}{\partial y}(\Phi_1 + \psi_1)\right]
\end{aligned} \qquad (1.32)$$

$$p_1 + p_2 = q_1, \quad p_1 - p_2 = q_2, \quad w_1 + w_2 = \Phi_1, \quad w_2 - w_1 = \psi_1 \qquad (1.33)$$

В этом случае будем иметь

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\eta_1}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2\eta_1}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2\zeta_1}{\partial x\,\partial y} = 0 \\
&\frac{\partial^2\zeta_1}{\partial y^2} + \frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2\zeta_1}{\partial x^2} + \frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2\eta_1}{\partial x\,\partial y} = 0 \\
&\frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)}\nabla^2\nabla^2 w_1 + \frac{E_3}{h}w_1 = p_1
\end{aligned} \qquad (1.34)$$

$$\eta_2 + \left(h + \frac{\delta}{2}\right)\frac{\partial w_2}{\partial x} = \frac{Eh\delta}{G_{13}(1-\mu^2)}\left[\frac{\partial^2\eta_2}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2\eta_2}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2\zeta_2}{\partial x\,\partial y}\right] -$$
$$- \frac{2h^3}{3E_3(2h+\delta)}\left[\frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)}\nabla^2\nabla^2\frac{\partial w_2}{\partial x} - \frac{\partial p_2}{\partial x}\right]$$
$$\zeta_2 + \left(h + \frac{\delta}{2}\right)\frac{\partial w_2}{\partial y} = \frac{Eh\delta}{G_{23}(1-\mu^2)}\left[\frac{\partial^2\zeta_2}{\partial y^2} + \frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2\zeta_2}{\partial x^2} + \frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2\eta_2}{\partial x\,\partial y}\right] - \qquad (1.35)$$
$$- \frac{2h^3}{3E_3(2h+\delta)}\left[\frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)}\nabla^2\nabla^2\frac{\partial w_2}{\partial y} - \frac{\partial p_2}{\partial y}\right]$$
$$\frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)}\nabla^2\nabla^2 w_2 - \frac{E\delta(2h+\delta)}{2(1-\mu^2)}\nabla^2\left(\frac{\partial\eta_2}{\partial x} + \frac{\partial\zeta_2}{\partial y}\right) = p_2$$

Итак, благодаря введению новых функций система уравнений (1.23) (1.26), (1.28), (1.30), (1.31) распалась на две более простых системы — (1.34) и (1.35). В случае $G_{13} = G_{23} = G_0$ решение системы (1.35) может быть облегчено при помощи соотношения, которое получим из (1.35). В самом деле, если совершить операции

$$\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\nabla^2$$

соответственно над первым и вторым уравнениями (1.35) и сложить результаты, то, приняв во внимание третье уравнение, получим

$$\left\{\frac{E\left[(h+\delta)^3-h^3\right]}{3\,(1-\mu^2)} - \frac{E^2h\delta^4}{12G_0\,(1-\mu^2)^2}\nabla^2 + \frac{E^2h^3\delta^4}{36E_3\,(1-\mu^2)^2}\nabla^2\nabla^2\right\}\nabla^2\nabla^2 w_2 =$$

$$= \left[1 - \frac{Eh\delta}{G_0\,(1-\mu^2)}\nabla^2 + \frac{Eh^3\delta}{3E_3\,(1-\mu^2)}\nabla^2\nabla^2\right] p_2 \qquad (1.36)$$

Выясним теперь смысл введенных нами функций и полученных систем уравнений (1.34), (1.35). Если через u_1, v_1, u_2, v_2 обозначить перемещения срединных плоскостей верхнего и нижнего слоев, то при помощи (1.8), (1.32) получим зависимости

$$u_1 = \eta_1 + \eta_2, \qquad v_1 = \zeta_1 + \zeta_2, \qquad u_2 = \eta_1 - \eta_2, \qquad v_2 = \zeta_1 - \zeta_2 \qquad (1.37)$$

Рассматривая соотношения (1.33) и (1.37), можно видеть, что w_1, η_1, ζ_1 соответствуют симметричной (относительно плоскости x, y) деформации пластины, w_2, η_2, ζ_2 — кососимметричной. Из (1.33) можно также усмотреть, что p_1 соответствует симметричному нагружению, p_2 — кососимметричному. Выяснив смысл введенных функций, нетрудно теперь заметить, что система (1.34) определяет симметричную деформацию пластины, (1.35) — кососимметричную.

Любую нагрузку, действующую на пластину (q_1, q_2), при помощи (1.33) всегда можно разложить на симметричную (p_1) и кососимметричную (p_2), поэтому решение задачи будет состоять в нахождении решений (1.34), (1.35) и последующего их наложения.

Наиболее естественным видом закрепления внешних слоев на кромке, в то же время представляющим наибольший интерес для практики, является случай, когда оба слоя закреплены идентично (свободно оперты, защемлены и т. д.). В этом случае граничные условия на кромке пластины можно разбить на условия для (1.34) и (1.35) (см. § 2), в связи с чем решения систем будут полностью независимы. В дальнейшем предполагается одинаковый характер закрепления внешних слоев.

До сих пор мы рассматривали лишь поперечный изгиб трехслойных пластин. Если в плоскости пластины действуют усилия $2T_1$, $2T_2$, $2S$, то, положив

$$p_1 = T_1\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + T_2\frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} + 2S\frac{\partial^2 w_1}{\partial x\,\partial y}, \qquad p_2 = T_1\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + T_2\frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} + 2S\frac{\partial^2 w_2}{\partial x\,\partial y} \qquad (1.38)$$

получим уравнения устойчивости. В заключение отметим, что полученные уравнения справедливы лишь для малых прогибов пластины.

§ 2. Граничные условия. Кромка трехслойной пластины может быть закреплена (в зависимости от того, как связаны между собой слои пластины на кромке) различными способами. Рассмотрим некоторые случаи.

а) Кромка пластины свободно оперта. Если предположить, что слои пластины на опорной кромке связаны между собой пленкой, абсолютно гибкой из своей плоскости и абсолютно жесткой на сдвиг и растяжение (в направлении оси z) в своей плоскости, то для внешних слоев кромки, например $x = 0$, будем иметь

$$(\Phi_1)_{x=0} = 0, \quad (\psi_1)_{x=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2}\right)_{x=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2}\right)_{x=0} = 0$$

$$\frac{E\delta}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \mu \frac{\partial v_1}{\partial y}\right)_{x=0} = T_1, \quad \frac{E\delta}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \mu \frac{\partial v_2}{\partial y}\right)_{x=0} = T_1 \tag{2.1}$$

$$(v_1 - v_2)_{x=0} = 0, \quad \frac{E\delta}{2(1+\mu)}\left[\frac{\partial}{\partial y}(u_1 + u_2) + \frac{\partial}{\partial x}(v_1 + v_2)\right]_{x=0} = 2S$$

Для внутреннего слоя, используя (1.7), (1.27), (1.29), получим

$$(w)_{x=0} = \left[\frac{1}{2}(\Phi_1 + \psi_1) + \frac{z}{2h}(\Phi_1 - \psi_1) + \frac{h^2 - z^2}{2E_3}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right)\right]_{x=0} = 0 \tag{2.2}$$

Складывая и вычитая (2.1), учтя при этом (1.32), (1.37), найдем

$$(w_1)_{x=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}\right)_{x=0} = 0$$

$$\frac{E\delta}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial \eta_1}{\partial x} + \mu \frac{\partial \zeta_1}{\partial y}\right)_{x=0} = T_1, \quad \frac{E\delta}{2(1+\mu)}\left(\frac{\partial \eta_1}{\partial y} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial x}\right)_{x=0} = S \tag{2.3}$$

$$(w_2)_{x=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}\right)_{x=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial \eta_2}{\partial x} + \mu \frac{\partial \zeta_2}{\partial y}\right)_{x=0} = 0, \quad (\zeta_2)_{x=0} = 0 \tag{2.4}$$

Условие (2.2), имея в виду (1.24), (1.37), (1.32), (2.1), примет вид:

$$\nabla^2 \left(\frac{\partial \eta_2}{\partial x} + \frac{\partial \zeta_2}{\partial y}\right)_{x=0} = 0 \tag{2.5}$$

Условия (2.3) будут, очевидно, относиться к симметричной деформации, (2.4), (2.5) — к кососимметричной.

б) Кромка пластины полностью заделана. Для внешних слоев кромки $x = 0$ получим

$$(\Phi_1)_{x=0} = 0, \quad (\psi_1)_{x=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x}\right)_{x=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x}\right)_{x=0} = 0$$

$$(u_1)_{x=0} = 0, \quad (u_2)_{x=0} = 0, \quad (v_1)_{x=0} = 0, \quad (v_2)_{x=0} = 0$$

Для внутреннего слоя граничным условием будет (2.2).

Поступая, как и в случае свободно опертой кромки, будем иметь:

для симметричной деформации

$$(w_1)_{x=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)_{x=0} = 0, \quad (\eta_1)_{x=0} = 0, \quad (\zeta_1)_{x=0} = 0$$

для кососимметричной деформации

$$(w_2)_{x=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial w_2}{\partial x}\right)_{x=0} = 0, \quad (\eta_2)_{x=0} = 0, \quad (\zeta_2)_{x=0} = 0$$

$$\nabla^2 \left(\frac{\partial \eta_2}{\partial x} + \frac{\partial \zeta_2}{\partial y}\right)_{x=0} = 0$$

в) Кромка пластины полностью свободна. В этом случае граничные условия будут:

для внутреннего слоя

$$(\varphi_1)_{x=0} = 0$$

для внешних слоев

$$\left(\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2}\right)_{x=0} = 0, \qquad \left(\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2}\right)_{x=0} = 0$$

$$\frac{E\delta}{1+\mu^2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \mu \frac{\partial v_1}{\partial y}\right)_{x=0} = T_1, \qquad \frac{E\delta}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \mu \frac{\partial v_2}{\partial y}\right)_{x=0} = T_1$$

$$\frac{E\delta}{2(1-\mu)}\left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x}\right)_{x=0} = S, \qquad \frac{E\delta}{2(1+\mu)}\left(\frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x}\right)_{x=0} = S$$

$$\frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)}\left[\frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial x^3} + (2-\mu)\frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial x\,\partial y^2}\right]_{x=0} = T_1\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x}\right)_{x=0} + S\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial y}\right)_{x=0}$$

$$\frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)}\left[\frac{\partial^3 \psi_1}{\partial x^3} + (2-\mu)\frac{\partial^3 \psi_1}{\partial x\,\partial y^2}\right]_{x=0} = T_1\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x}\right)_{x=0} + S\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y}\right)_{x=0}$$

Будем иметь:

для симметричной деформации

$$\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2}\right)_{x=0} = 0, \qquad \frac{E\delta}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial \eta_1}{\partial x} + \mu \frac{\partial \zeta_1}{\partial y}\right)_{x=0} = T_1$$

$$\frac{E\delta}{2(1+\mu)}\left(\frac{\partial \eta_1}{\partial y} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial x}\right)_{x=0} = S$$

$$\frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)}\left[\frac{\partial^3 w_1}{\partial x^3} + (2-\mu)\frac{\partial^3 w_1}{\partial x\,\partial y^2}\right]_{x=0} = T_1\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)_{x=0} + S\left(\frac{\partial w_1}{\partial y}\right)_{x=0}$$

для кососимметричной

$$\left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2}\right)_{x=0} = 0, \qquad \left(\frac{\partial \eta_2}{\partial x} + \mu \frac{\partial \zeta_2}{\partial y}\right)_{x=0} = 0$$

$$\left(\frac{\partial \eta_2}{\partial y} + \frac{\partial \zeta_2}{\partial x}\right)_{x=0} = 0, \qquad \left(\frac{\partial^2 \eta_2}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2 \eta_2}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2 \zeta_2}{\partial x\,\partial y}\right)_{x=0} = 0$$

$$\frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)}\left[\frac{\partial^3 w_2}{\partial x^3} + (2-\mu)\frac{\partial^3 w_2}{\partial x\,\partial y^2}\right]_{x=0} = T_1\left(\frac{\partial w_2}{\partial x}\right)_{x=0} + S\left(\frac{\partial w_2}{\partial y}\right)_{x=0}$$

Если вершина угла прямоугольной пластины свободна от закрепления, то в этом угле должны выполняться условия [4]

$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x\,\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x\,\partial y} = 0, \qquad \text{или} \qquad \frac{\partial^2 w_1}{\partial x\,\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial^2 w_2}{\partial x\,\partial y} = 0$$

§ 3. Устойчивость свободно опертой трехслойной пластины при одностороннем сжатии. Решения для симметричной и кососимметричной деформаций трехслойной пластины находятся независимо друг от друга, поэтому для критических усилий сжатия получим две системы значений: одна из них будет соответствовать симметричной, другая кососимметричной форме потери устойчивости. Действительная потеря устойчивости будет, очевидно, соответствовать тому из этих усилий, которое будет меньшим. Для трехслойной пластины более всего вероятна кососимметричная форма потери устойчивости [1], поэтому ее мы и рассмотрим.

Граничные условия вида (2.4), (2.5) будут выполнены по кромкам пластины, если примем

$$w_2 = A_1 \sin \alpha x \sin \beta y, \quad \eta_2 = A_2 \cos \alpha x \sin \beta y, \quad \zeta_2 = A_3 \sin \alpha x \cos \beta y \tag{3.1}$$

где

$$\alpha = \frac{m\pi}{a}, \qquad \beta = \frac{n\pi}{b} \qquad (m, n = 1, 2, 3, \ldots)$$

При помощи (3.1) и первых двух уравнений (1.35), имея при этом в виду (1.38), можно найти A_2, A_3 через A_1.

Выражение для критического усилия ($2T_1$) получим из третьего уравнения (1.35):

$$2T_1 = \frac{2(\alpha^2 + \beta^2)^2}{\alpha^2} \frac{E\delta^3}{12 \cdot (1 - \mu^2)} \left[1 + \frac{12 \frac{h}{\delta}\left(\frac{h}{\delta} + 1\right) + 3}{1 + \frac{Eh^3\delta}{3E_3(1-\mu^2)}(\alpha^2 + \beta^2)^2 + \frac{Eh\delta}{1-\mu^2} K} \right] \tag{3.2}$$

где

$$K = \left[\frac{\alpha^2}{G_{13}} + \frac{\beta^2}{G_{23}} + \frac{Eh\delta}{2(1+\mu)} \frac{(\alpha^2 + \beta^2)^2}{G_{13} G_{23}} \right] : \left[1 + \frac{Eh\delta}{2(1+\mu)} \left(\frac{\alpha^2}{G_{23}} + \frac{\beta^2}{G_{13}} \right) \right]$$

Из выражения (3.2) можно усмотреть, что при некоторых соотношениях параметров трехслойной пластины возможна (в отличие от однослойной) потеря устойчивости с образованием нескольких полуволн в направлении оси y, причем величина критического усилия будет зависеть от того, как ориентирован заполнитель. Если, например, потеря устойчивости происходит при $\alpha > \beta$, то при одном и том же весе пластины получим большую величину критического усилия, если ориентируем заполнитель так, чтобы $G_{13} > G_{23}$.

Если $G_{13} = G_{23} = G_0$, то

$$2T_1 = \frac{2(\alpha^2 + \beta^2)^2}{\alpha^2} \frac{E\delta^3}{12(1 - \mu^2)} \left[1 + \frac{12 \frac{h}{\delta}\left(\frac{h}{\delta} + 1\right) + 3}{1 + \frac{Eh^3\delta}{3E_3(1-\mu^2)}(\alpha^2+\beta^2)^2 + \frac{Eh\delta}{G_0(1-\mu^2)}(\alpha^2+\beta^2)} \right] \tag{3.3}$$

В этом случае потеря устойчивости в направлении оси y будет происходить при $n = 1$.

Полагая в (3.3) $E_3 \to 0$ или $G_0 \to 0$, получим выражение для критического усилия одного внешнего слоя (T_1). Если же принять $E_3 \to \infty$, $G_0 \to \infty$, то получим выражение для критического усилия пластины, работающей как одно целое, с внутренним слоем, не воспринимающим нормальных напряжений. Выражение (3.3) можно также получить из (1.36), если принять $w = A_1 \sin \alpha x \sin \beta y$.

Поступила 11 IV 1950

ЛИТЕРАТУРА

1. **Рабинович А. Л.** Устойчивость обшивки с заполнителем при сжатии. Труды ЦАГИ. 1946. № 595.
2. **Kessner.** Finite deflection of sandwich plates. Journal of the Aeronautical Sciences. 1948. Vol. 15. No. 7.
3. **Лехницкий С. Г.** Анизотропные пластинки. Гостехиздат. 1947.
4. **Броуде Б. М.** Устойчивость пластинок в элементах стальных конструкций. Машстройиздат. Л. 1949.