К ВОПРОСУ О КРИТЕРИИ АПЕРИОДИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

А. М. Кац (Ленинград)

Линейная динамическая система называется апериодически устойчивой, если ее характеристическое уравнение

$$F(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \cdots + a_{n-1} p + a_n = 0 \tag{1}$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — вещественные числа, имеет только вещественные отрицательные корни. При этом коэффициенты $a_0, \ldots, a_n$ должны быть одного знака. Будем считать их положительными. Составим полином:

$$\Phi(z) = F(z^2) + zF'(z^2) = \tag{2}$$

$$= a_0 z^{2n} + n a_0 z^{2n-1} + a_1 z^{2n-2} + (n-1) a_1 z^{2n-3} + \cdots + a_{n-1} z^2 + a_{n-1} z + a_n$$

Положим в нем $z = i\omega$. Тогда

$$\Phi(i\omega) = P(\omega) + iQ(\omega), \qquad P(\omega) = F(-\omega^2), \qquad Q(\omega) = \omega F'(-\omega^2) \tag{3}$$

Если все корни $F(p)$ вещественны и отрицательны, то все корни производной $F'(p)$ вещественны, отрицательны и перемежаются с корнями $F(p)$. Следовательно, корни полиномов $P(\omega)$ и $Q(\omega)$ также все вещественны и перемежаются, откуда (как доказано Михайловым [1]), вытекает, что полином $\Phi(z)$ — гурвицев.

Наоборот, если полином $\Phi(z)$ — гурвицев, то все корни полиномов $P(\omega)$ и $Q(\omega)$ вещественны, следовательно, корни $F(p)$ вещественны и отрицательны.

Итак, условия Гурвица для полинома $\Phi(z)$

$$D_{2n-1} = \begin{vmatrix} n a_0 & (n-1) a_1 & (n-2) a_2 & (n-3) a_3 \ldots 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \ldots 0 \\ 0 & n a_0 & (n-1) a_1 & (n-2) a_2 \ldots 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots a_{n-1} \end{vmatrix} > 0, \qquad D_{2n-2} > 0, \; \ldots, \; D_2 > 0 \tag{4}$$

являются необходимыми и достаточными условиями апериодической устойчивости системы, имеющей характеристическое уравнение (1).

Неравенства (4) получены Мееровым [2] значительно более сложным путем.

Пользуясь тем, что некоторые из неравенств Гурвица, как известно, являются следствиями остальных (при условии положительности коэффициентов полинома), число неравенств (4), подлежащих проверке, можно сократить.

Кроме того, их можно упростить, умножая четные строки на n и вычитая из них нечетные, после чего лишь первый элемент левого столбца будет отличен от нуля. Вычеркнув этот столбец и верхнюю строку, представим неравенства (4) в следующем окончательном виде:

$$D_{2n-2} = \begin{vmatrix} a_1 & 2 a_2 & 3 a_3 & 4 a_4 \ldots 0 \\ n a_0 & (n-1) a_1 & (n-2) a_2 & (n-3) a_3 \ldots 0 \\ 0 & a_1 & 2 a_2 & 3 a_3 \ldots 0 \\ 0 & n a_0 & (n-1) a_1 & (n-2) a_2 \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots a_{n-1} \end{vmatrix} > 0, \qquad D_{2n-3} > 0, \; \ldots, \; D_2 > 0 \tag{5}$$

Поступила 19 VI 1950

Ленинградский политехнический институт

ЛИТЕРАТУРА

1. Михайлов А. В. Автоматика и телемеханика. 1938. № 3.
2. Мееров М. В. Изв. ОТН АН СССР. 1945. № 12.