

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТЕЙ ФИЛЬТРАЦИИ В НАКЛОННЫХ ПЛАСТАХ ПРИ НАПОРНОМ РЕЖИМЕ ТЕЧЕНИЯ

И. О. Власов (Москва)

При изучении движения границы раздела двух жидкостей в наклонных пластах обычно принимают вместо реальной границы раздела двух жидкостей на плоскости z (фиг. 1) фиктивную перпендикулярную оси пласта на плоскости ζ (фиг. 1), что упрощает решение, но что делает его менее точным. В данной работе получена формула, которая дает возможность определить поле скоростей фильтрации при установившемся движении однородной несжимаемой жидкости в наклонном трапециoidalном однородном пласте при напорном режиме в данный момент времени для линейного закона фильтрации. По этой формуле были подсчитаны скорости фильтрации вдоль кровли и подошвы пласта. Расчет показал, что на расстоянии, равном удвоенной мощности пласта, умноженной на котангенс угла наклона пласта к горизонту, происходит выравнивание скоростей в сечении, перпендикулярном к оси пласта, а затем нарушается вблизи скважины. На основании этой формулы можно дать оценку приближенным методом вычисления перемещения границы раздела двух сред.

1. Пусть пласт наклонен к линии горизонта под углом $\alpha\pi$ и пусть его мощность постоянна и равна $2l$. На расстоянии H_1 от середины границы раздела двух жидкостей на оси пласта находится фиктивная скважина с дебитом q . Будем считать, что жидкость, находящаяся левее границы раздела, имеет вязкость, равную нулю, т. е. $\mu = 0$, а вытесняемая жидкость имеет вязкость, равную некоторой постоянной величине, т. е. $\mu = \text{const}$.

Будем рассматривать плоский установившийся поток однородной несжимаемой жидкости в условиях напорного режима. Движение жидкости в пористой среде подчиняется линейному закону фильтрации, т. е. закону Дарси:

$$v = - \frac{k}{\mu} \text{grad } p \tag{1.1}$$

где μ — динамическая вязкость жидкости, $p = p(x, y)$ — гидродинамическое давление, k — проницаемость и $v(u, v)$ — вектор скорости ламинарной фильтрации. Также должно выполняться уравнение неразрывности

$$\text{div } \rho v = 0 \tag{1.2}$$

где ρ — плотность.

Так как μ , k и ρ суть постоянные величины, то, вводя функцию

$$\varphi(x, y) = \frac{k}{\mu} p(x, y)$$

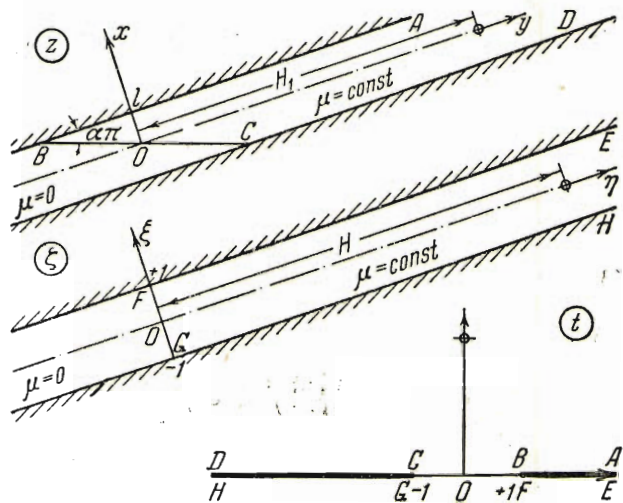
согласно (1.1) получим

$$u = - \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = - \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

Уравнение (1.2) примет вид:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

Потенциал φ должен удовлетворять следующим граничным условиям.



Фиг. 1

Подошва и кровля пласта непроницаемы для жидкости, т. е.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \quad (x = \pm l)$$

Граница раздела двух жидкостей должна быть эквипотенциальной, имеющей некоторое определенное значение потенциала $\varphi = \varphi_1$.

На расстоянии от скважины, равном мощности пласта, распределение скорости по сечению будет практически равномерным, т. е. за эквипотенциали можно приближенно принять прямые, перпендикулярные к оси пласта; при этом значение потенциала на одной из эквипотенциалей дает четвертое граничное условие.

Зная значения $\varphi = \varphi_2$ потенциала на границах, можно определить и дебит фиктивной скважины пласта.

2. Как известно [1], течение к скважине (ξ_1, H) в прямоугольной полуплоскости $EFOGH$ шириной 2, расположенной в комплексной плоскости $\zeta = \xi + i\eta$ (фиг. 1), определяется характеристической функцией

$$W = \frac{q}{2\pi} \ln \frac{e^{i\pi\zeta} - e^{\pi(i\xi_1 - H)}}{e^{\pi(i\zeta - H)} - e^{i\pi\xi_1}} + \text{const} \quad (2.1)$$

где ξ_1 и H — декартовы координаты скважины, q — дебит; у нас $\xi_1 = 0$.

Найдем течение к скважине (x_1, H_1) в трапецевидной полуплоскости $ABOCD$, расположенной в комплексной плоскости $z = x + iy$ (фиг. 1).

При помощи комплексной плоскости t установим соответствие между точками исходной полуплоскости ζ и полуплоскости z (фиг. 1). В параметрическом виде это соответствие плоскостей дается двумя уравнениями, получаемыми из формулы Кристоффеля-Шварца, т. е.

$$\zeta = \frac{2}{\pi} \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{2}{\pi} \arcsin t \quad (2.2)$$

$$z = \frac{2 \sin \alpha \pi (l - ih)}{\pi} \int_0^t \frac{dt}{(1+t)^\alpha (1-t)^{1-\alpha}} \quad (2.3)$$

Из (2.2) имеем

$$t = \sin \frac{1}{2} \pi \zeta = \sin \frac{1}{2} \pi \xi \operatorname{ch} \frac{1}{2} \pi \eta + i \cos \frac{1}{2} \pi \xi \operatorname{sh} \frac{1}{2} \pi \eta \quad (2.4)$$

Легко можно убедиться в том, что рассматриваемые полуплоскости в плоскостях z и ζ отображаются на верхнюю часть плоскости t .

Для скорости частиц жидкости в плоскости z имеем равенство

$$-u + i\mathcal{V} = \frac{dW}{dz} = \frac{dW}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dt} \frac{dt}{dz} \quad (2.5)$$

Поэтому согласно (2.1), (2.2) и (2.3) из формулы (2.5) имеем

$$\begin{aligned} -u + i\mathcal{V} = & \frac{q \operatorname{sh} \pi H \{ \sin \pi (\xi - \xi_1) \operatorname{sh} \pi \eta - i [\cos \pi (\xi - \xi_1) \operatorname{ch} \pi \eta - \operatorname{ch} \pi H] \}}{2l [\cos^2 \pi (\xi - \xi_1) - 2 \cos \pi (\xi - \xi_1) \operatorname{ch} \pi \eta \operatorname{ch} \pi H + \operatorname{ch}^2 \pi H + \operatorname{sh}^2 \pi \eta]} \times \\ & \times \left(\frac{\operatorname{ch} \frac{1}{2} \pi \eta - \sin \frac{1}{2} \pi \xi}{\operatorname{ch} \frac{1}{2} \pi \eta + \sin \frac{1}{2} \pi \xi} \right)^{\frac{1}{2} - \alpha} \exp \left[i \left(\frac{1}{2} - \alpha \right) \arctg \frac{2 \operatorname{sh} \frac{1}{2} \pi \eta \cos \frac{1}{2} \pi \xi}{\operatorname{sh}^2 \frac{1}{2} \pi \eta - \cos^2 \frac{1}{2} \pi \xi} \right] \quad (2.6) \end{aligned}$$

Отделяя в (2.6) действительную и мнимую части, получим

$$\begin{aligned} u = & \frac{q \operatorname{sh} \pi H \{ \sin \pi (\xi - \xi_1) \operatorname{sh} \pi \eta \cos \beta + [\cos \pi (\xi - \xi_1) \operatorname{ch} \pi \eta - \operatorname{ch} \pi H] \sin \beta \}}{2l [\cos^2 \pi (\xi - \xi_1) - 2 \cos \pi (\xi - \xi_1) \operatorname{ch} \pi \eta \operatorname{ch} \pi H + \operatorname{ch}^2 \pi H + \operatorname{sh}^2 \pi \eta]} \times \\ & \times \left(\frac{\operatorname{ch} \frac{1}{2} \pi \eta - \sin \frac{1}{2} \pi \xi}{\operatorname{ch} \frac{1}{2} \pi \eta + \sin \frac{1}{2} \pi \xi} \right)^{\frac{1}{2} - \alpha} \quad (2.7) \end{aligned}$$

$$v = \frac{q \operatorname{sh} \pi H \{ \sin \pi (\xi - \xi_1) \operatorname{sh} \pi \eta \sin \beta - [\cos \pi (\xi - \xi_1) \operatorname{ch} \pi \eta - \operatorname{ch} \pi H] \cos \beta \}}{2l [\cos^2 \pi (\xi - \xi_1) - 2 \cos \pi (\xi - \xi_1) \operatorname{ch} \pi \eta \operatorname{ch} \pi H + \operatorname{ch}^2 \pi H + \operatorname{sh}^2 \pi \eta]} \times \left(\frac{\operatorname{ch} \frac{1}{2} \pi \eta - \sin \frac{1}{2} \pi \xi}{\operatorname{ch} \frac{1}{2} \pi \eta + \sin \frac{1}{2} \pi \xi} \right)^{\frac{1}{2} - \alpha} \quad (2.8)$$

где

$$\beta = \left(\frac{1}{2} - \alpha \right) \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2 \operatorname{sh} \frac{1}{2} \pi \eta \cos \frac{1}{2} \pi \xi}{\operatorname{sh}^2 \frac{1}{2} \pi \eta - \cos^2 \frac{1}{2} \pi \xi}$$

Формулы (2.7), (2.8), (2.3) и (2.2) дают возможность определить поле скоростей фильтрации в наклонном пласте.

Как частный случай рассмотрим изменение скорости частиц жидкости, движущихся вдоль кровли *AB* и подошвы *CD*, когда скважина расположена на расстоянии H_1 от середины границы раздела жидкостей. Полагая $\xi_1 = 0$ и $\xi = 1$, что соответствует $x_1 = 0$ и $x = l$ в (2.7), (2.8) и (2.4), получим

$$t = \operatorname{ch} \frac{1}{2} \pi \eta, \quad u = 0, \quad v = \frac{q \operatorname{th} \pi H \operatorname{th}^{1-2\alpha} \frac{1}{2} \pi \eta}{2l (1 + \operatorname{ch} \pi \eta / \operatorname{ch} \pi H)} \quad (2.9)$$

При $\xi_1 = 0$ и $\xi = -1$, что соответствует $x_1 = 0$ и $x = -l$, будем иметь

$$-t = \operatorname{ch} \frac{1}{2} \pi \eta, \quad u = 0, \quad v = \frac{q \operatorname{th} \pi H \operatorname{cth}^{1-2\alpha} \frac{1}{2} \pi \eta}{2l (1 + \operatorname{ch} \pi \eta / \operatorname{ch} \pi H)} \quad (2.10)$$

Уравнение (2.3) при тех же предположениях приводится к виду

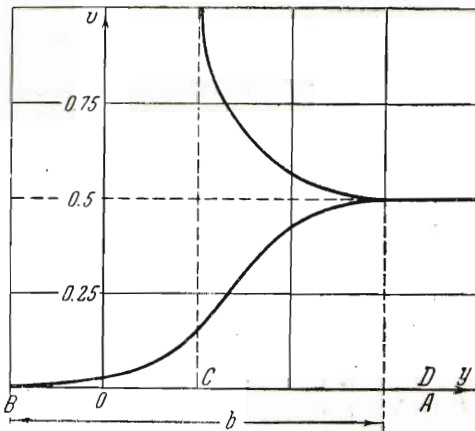
$$z = l \left\{ 1 + i \left[\frac{4}{\pi} \int_0^{\eta} \operatorname{cth}^{1-2\alpha} \frac{1}{4} \pi \eta d \left(\frac{1}{4} \pi \eta \right) - \operatorname{ctg} \alpha \pi \right] \right\} \quad (2.11)$$

и

$$z = l \left\{ -1 + i \left[\frac{4}{\pi} \int_0^{\eta} \operatorname{th}^{1-2\alpha} \frac{1}{4} \pi \eta d \left(\frac{1}{4} \pi \eta \right) + \operatorname{ctg} \alpha \pi \right] \right\} \quad (2.12)$$

Пользуясь формулами (2.9), (2.11) и (2.10), (2.12), определим скорости частиц жидкости, движущихся вдоль кровли *AB* и подошвы пласта *CD*, для следующих значений: $\alpha \pi = 5^\circ$, $\eta = a$, где $0 \leq a \leq 15.91$, $x/l = \bar{x}$, $y/l = \bar{y}$, $v l / q = \bar{v}$, $H = 15.91$. Результаты вычисления приведены на фиг. 2 (масштаб для мощности пласта на графике не соблюден), из которой видно, что выравнивание скоростей в сечении пласта происходит на расстоянии, примерно равном удвоенной мощности пласта, умноженной на котангенс угла наклона пласта к горизонту, т. е.

$$b = 4l \operatorname{ctg} \alpha \pi$$



Фиг. 2

где b — расстояние от границы раздела двух жидкостей по кровле до эквипотенциала, на которой эпюра скоростей поперек пласта выравнивается.

Поступила 13 X 1950

Институт механики
Академии Наук СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Чарный И. А. Подземная гидромеханика. ОГИЗ. Гостехиздат. 1948.