Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XV, 1951

О НЕУСТАНОВИВШЕЙСЯ ФИЛЬТРАЦИИ ПРИ ПОСТОЯННОМ ДАВЛЕНИИ НА ГРАНИЦЕ

Л. А. Галин

(Москва)

В работе автора [1] рассмотрена задача об изменении формы области, занятой нефтью, в случае, когда в этой области имеется одиночная скважина. На контуре области в этом случае предполагается давление, равное постоянной величине. Постоянным является также давление в скважине.

Функция $z(\zeta, t)$, отображающая область, занятую нефтью, на единичный круг, зависит от некоторого параметра τ, связанного со временем t зависимостью:

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{k(p_2 - p_1)}{\mu m} \frac{1}{\lg \delta - \lg |\partial z / \partial \zeta|_{\zeta=0}} \tag{1}$$

Здесь k — проницаемость среды, μ — коэффициент вязкости, m — пористость среды, ρ — плотность жидкости, p_1 — давление на контуре области, p_2 — давление, имеющее место в скважине, δ — радиус скважины. Функция $z(\zeta, \tau)$ должна удовлетворять следующему нелинейному условию на контуре единичного куга:

$$\operatorname{Re}\left[\frac{\partial \bar{z}}{\partial \tau} \zeta \frac{\partial z}{\partial \zeta}\right] = 1 \qquad (\zeta = e^{i\vartheta}) \tag{2}$$

В начальный момент времени при $t = 0$ и $\tau = 0$

$$z(\zeta, 0) = z_0(\zeta) \tag{3}$$

Здесь $z_0(\zeta)$ — функция, отображающая на единичный круг область, занятую нефтью в начальный момент времени. Кроме того, $z(\zeta, \tau)$ должна быть такой, чтобы $z(0, \tau) = 0$.

Если определена функция $z(\zeta, \tau)$, то становится известной и функция

$$\left|\frac{\partial z}{\partial \zeta}\right|_{\zeta=0} = F(\tau) \tag{4}$$

На основании (4), подставляя его в (1), получаем для определения τ дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными.

Таким образом, находится окончательное решение задачи. В работе [1] был дан метод, посредством которого можно находить $z(\zeta, \tau)$ в случаях, когда $z_0(\zeta)$ функция, отображающая на круг область, занятую нефтью, в начальный момент времени является полиномом.

В настоящей заметке дается метод отыскания частных решений, удовлетворяющих условию (2) для некоторых полубесконечных начальных областей.

Будем искать функцию $z(\zeta, \tau)$ в следующем виде:

$$z(\zeta, \tau) = f_1(\zeta) + f_2(\zeta)\Phi(\tau) \tag{5}$$

Подставляя в условие (2), будем иметь на контуре единичного круга

$$\operatorname{Re}\left[\frac{\partial \bar{z}}{\partial \tau} \zeta \frac{\partial z}{\partial \zeta}\right] = \Phi'(\tau) \operatorname{Re}[\zeta \overline{f_2(\zeta)} f_1'(\zeta)] + \Phi'(\tau)\Phi(\tau) \operatorname{Re}[\zeta \overline{f_2(\zeta)} f_2'(\zeta)] = 1$$
$$(\zeta = e^{i\vartheta}) \tag{6}$$

Условие (2) будет удовлетворено, если выполнены следующие равенства:

$$\Phi(\tau)\,\Phi'(\tau) = 1 \tag{7}$$

$$\operatorname{Re}\,[\zeta\overline{f_2(\zeta)}\,f_2'(\zeta)] = 1 \qquad (\zeta = e^{i\vartheta}) \tag{8}$$

$$\operatorname{Re}\,[f_1'(\zeta)\,\zeta\overline{f_2(\zeta)}] = 0 \tag{9}$$

Таким образом, задача определения $z(\zeta, \tau)$ расщепляется на три отдельные задачи. Из (7) находится $\Phi(\tau)$, условие (8) позволяет определить $f_2(\zeta)$, а после определения $f_2(\zeta)$ из условия (9) становится возможным определить функцию $f_1(\zeta)$.

Решая уравнение (7), получаем для функции $\Phi(\tau)$ следующее выражение:

$$\Phi(\tau) = \sqrt{2\tau + C} \tag{10}$$

Будем определять функции $f_2(\zeta)$, удовлетворяющие условию (8).

Для этого перейдем к новой комплексной переменной $\xi = x + iy$, которая соответствует нижней полуплоскости. Имеем следующие соотношения:

$$\xi = i\,\frac{\zeta - 1}{\zeta + 1}, \qquad \zeta = \frac{1 - i\xi}{1 + i\xi} \tag{11}$$

На основании (2), переходя к новой переменной, получаем условие, имеющее место на действительной оси, которой соответствует контур единичного круга:

$$\operatorname{Re}\left[\frac{1 - i\xi}{1 + i\xi}\,\overline{f_2^*(\xi)}\,f_2^{*\prime}(\xi)\,\frac{(1 + i\xi)^2}{-2i}\right]_{y=0} = 1$$

Или после преобразований

$$\operatorname{Im}\,[\overline{f_2^*(\xi)}\,f_2^{*\prime}(\xi)]_{y=0} = -\frac{2}{1 + x^2} \tag{12}$$

Пусть

$$f_2^*(x) = a(x) + ib(x) \tag{13}$$

При этом $a(x)$ и $b(x)$ должны быть таковы, чтобы функция, полученная при аналитическом продолжении в нижнюю полуплоскость

$$f_2^*(\xi) = a(\xi) + ib(\xi)$$

была регулярна в нижней полуплоскости.

Подставляя (13) в (12), получим

$$\operatorname{Im}\{[a(x) - ib(x)]\,[a'(x) + ib'(x)]\}_{\xi=x} = a(x)\,b'(x) - a'(x)\,b(x) = -\frac{2}{1 + x^2}$$

Или, разделив на $[a(x)]^2$:

$$\frac{a(x)\,b'(x) - a'(x)\,b(x)}{[a(x)]^2} = \frac{d}{dx}\left[\frac{b(x)}{a(x)}\right] = -\frac{2}{(1 + x^2)\,[a(x)]^2} \tag{14}$$

Отсюда после интегрирования найдем

$$b(x) = -2a(x)\int\frac{dx}{(1 + x^2)\,[a(x)]^2} \tag{15}$$

Таким образом, функции $a(x)$ и $b(x)$ оказываются связанными некоторой зависимостью. Подставляя полученные результаты в (13), найдем

$$f_2^*(x) = a(x) - 2ia(x)\int\frac{dx}{(1 + x^2)\,[a(x)]^2} = a(x)\left[1 - 2i\int\frac{dx}{(1 + x^2)\,[a(x)]^2}\right] \tag{16}$$

Придавая различные значения $a(x)$, будем получать функции $f_2^*(\xi)$, удовлетворяющие условию (12). Однако $a(x)$ должна выбираться такой, чтобы при аналитическом продолжении $f_2^*(x)$ в нижнюю полуплоскость полученная функция была регулярна. Рассмотрим несколько случаев.

1. Будем полагать

$$a(x) = \frac{A}{1+x^2} \tag{17}$$

Здесь A — некоторый коэффициент, подлежащий определению.
Подставляя в (16), найдем

$$f_2^*(x) = \frac{A}{1+x^2}\left[1 - 2i\int \frac{(1+x^2)^2\,dx}{A^2(1+x^2)}\right] = \frac{A}{1+x^2}\left[1 - \frac{2i}{A^2}\left(x + \frac{x^3}{3}\right)\right]$$

Отсюда получим

$$f_2^*(\xi) = \frac{1}{1+\xi^2}\left(A - \frac{2}{A}i\xi - \frac{2}{3A}i\xi^3\right) \tag{18}$$

Коэффициент A может быть подобран так, чтобы в точке нижней полуплоскости $\xi = -i$, где знаменатель имеет полюс, выражение, находящееся в скобках, обратилось в нуль и полученная функция была регулярна. Полагая $\xi = -i$, найдем уравнение для определения A. Имеем

$$A - \frac{4}{3}\frac{1}{A} = 0, \qquad A = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

На основании (18) будем иметь

$$f_2^*(\xi) = \frac{1}{1+\xi^2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \sqrt{3}i\xi - \frac{1}{\sqrt{3}}i\xi^3\right). \tag{19}$$

2. Будем полагать

$$a(x) = \frac{Ax}{1+x^2}$$

Подставляя в (16), найдем

$$f_2^*(x) = \frac{Ax}{1+x^2}\left[1 - 2i\int \frac{(1+x^2)^2\,dx}{A^2x^2(1+x^2)}\right] = \frac{1}{1+x^2}\left[Ax + \frac{2i}{A} - \frac{2i}{A}x^2\right]$$

На основании этого

$$f_2^*(\xi) = \frac{1}{1+\xi^2}\left[A\xi + \frac{2i}{A} - \frac{2i}{A}\xi^2\right]$$

Уравнение для определения A составляется также таким образом, чтобы функция $f_2^*(\xi)$ была регулярна в точке $\xi = -i$. Оно будет таким

$$-Ai + \frac{4i}{A} = 0, \qquad A = 2$$

В результате находим

$$f_2^*(\xi) = \frac{2}{1+\xi^2}\left[\xi + \frac{i}{2} - \frac{i}{2}\xi^2\right] \tag{20}$$

3. Будем полагать

$$a(x) = \frac{A}{(1+x^2)(1-x^2)}$$

В таком случае

$$f_2^*(x) = \frac{1}{(1+x^2)(1-x^2)}\left[A - \frac{2i}{A}\int \frac{(1+x^2)^2(1-x^2)^2}{(1+x^2)}\right]dx =$$
$$= \frac{1}{(1+x^2)(1-x^2)}\left[A - \frac{2i}{A}\left(x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7\right)\right]$$

Отсюда

$$f_2^*(\xi) = \frac{1}{(1+\xi^2)(1-\xi^2)}\left[A - \frac{2i}{A}\left(\xi - \frac{1}{3}\xi^3 - \frac{1}{5}\xi^5 + \frac{1}{7}\xi^7\right)\right] \tag{21}$$

Уравнение для определения A:

$$A - \frac{1}{A}\frac{208}{105} = 0, \quad A = \frac{\sqrt{208}}{\sqrt{105}}$$

На основании этого

$$f_2^*(\xi) = \frac{\sqrt{105}}{\sqrt{208}} \left[\frac{208 - i(210\,\xi - 70\,\xi^2 - 42\,\xi^5 + 40\,\xi^7)}{105(1+\xi^2)(1-\xi^2)} \right] \tag{22}$$

Количество подобных примеров можно значительно увеличить. В дальнейшем для вычислений будут использованы наиболее простые выражения (18) и (20).

Перейдем в выражении (18) к комплексной переменной ζ, связанной с единичным кругом. Подставляя в (18)

$$\xi = i\,\frac{\zeta - 1}{\zeta + 1}$$

найдем

$$f_2(\zeta) = \frac{\zeta(\zeta+3)}{\sqrt{3}\,(\zeta+1)} \tag{23}$$

Подставляя ξ, выраженное через ζ, в (20), получим

$$f_2(\zeta) = i\zeta \tag{24}$$

Будем теперь определять функции $f_1(\zeta)$, удовлетворяющие условию

$$\operatorname{Re}\left[f_1'(\zeta)\,\zeta\overline{f_2(\zeta)}\right] = 0 \qquad (\zeta = e^{i\vartheta}) \tag{25}$$

используя в качестве $f_2(\zeta)$ выражения (23) и (24).

Функция $f_1'(\zeta)$ будет удовлетворять условию (25), т. е. будет мнимой на контуре единичного круга, в частности, тогда, когда

$$f_1'(\zeta) = \frac{f_2(\zeta)}{\zeta}\, f_3(\zeta) \tag{26}$$

где $f_3(\zeta)$ является мнимой при $\zeta = e^{i\vartheta}$ и, следовательно,

$$\operatorname{Re}\left[f_3(\zeta)\right] = 0 \qquad (\zeta = e^{i\vartheta}) \tag{27}$$

В самом деле, подставляя (26) в (25), получим

$$\operatorname{Re}\left[\frac{f_2(\zeta)}{\zeta}\,\zeta f_3(\zeta)\,\overline{f_2(\zeta)}\right] = |f_2(\zeta)|^2 \operatorname{Re}\left[f_3(\zeta)\right] = 0 \quad (\zeta = e^{i\vartheta})$$

При этом $f_3(\zeta)$ должна быть регулярна внутри единичного круга.

1. Будем исходить из функции

$$f_2(\zeta) = \frac{\zeta(\zeta+3)}{\sqrt{3}\,(\zeta+1)}$$

В качестве $f_3(\zeta)$ выберем следующую функцию, удовлетворяющую условию (27), т. е. мнимую на контуре единичного круга:

$$f_3(\zeta) = -\frac{1}{\sqrt{3}}\,\frac{\zeta-1}{\zeta+1}$$

Тогда согласно (26)

$$f_1'(\zeta) = -\frac{1}{3}\,\frac{(\zeta-1)\,\zeta(\zeta+3)}{(\zeta+1)\,\zeta(\zeta+1)} = -\frac{1}{3}\,\frac{(\zeta-1)(\zeta+3)}{(\zeta+1)^2}$$

Отсюда

$$f_1(\zeta) = \int f_1'(\zeta)\,d\zeta = -\frac{1}{3}\int \frac{(\zeta-1)(\zeta+3)}{(\zeta+1)^2}\,d\zeta = -\frac{\zeta}{3} - \frac{4}{3}\,\frac{1}{\zeta+1} + B \tag{28}$$

Постоянную B найдем так, чтобы $f_1(0) = 0$, так как следствием этого будет выполнение условия $z(0, \tau) = 0$.

Полагая (28) равным нулю при $\zeta = 0$, получим $B = \frac{4}{3}$. Отсюда

$$f_1(\zeta) = \frac{3\zeta - \zeta^2}{3(\zeta+1)} \tag{29}$$

В таком случае

$$z(\zeta, \tau) = f_1(\zeta) + f_2(\zeta)\sqrt{2\tau + C} = \frac{3\zeta - \zeta^2}{3(\zeta+1)} + \frac{\zeta}{\sqrt{3}}\,\frac{(\zeta+3)}{(\zeta+1)}\sqrt{2\tau + C} \tag{30}$$

При $\tau = 0$ будем иметь

$$z(\zeta, 0) = z_0(\zeta) = \left(-\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{C}}{\sqrt{3}}\right)\zeta + \left(\frac{4}{3} + \frac{\sqrt{C}}{\sqrt{3}}\right) + \left(-\frac{4}{3} - \frac{2\sqrt{C}}{\sqrt{3}}\right)\frac{1}{\zeta + 1}$$

Постоянную C выберем так, чтобы исчез член, содержащий ζ. Отсюда находим

$$-\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{C}}{\sqrt{3}} = 0, \quad C = \frac{1}{3}$$

В таком случае получаем окончательно

$$z(\zeta, \tau) = \frac{3\zeta - \zeta^2}{3(\zeta + 1)} + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\zeta(\zeta + 3)}{(\zeta + 1)} \sqrt{2\tau + \frac{1}{3}} \tag{31}$$

При $\tau = 0$ будем иметь

$$z(\zeta, 0) = z_0(\zeta) = \frac{2\zeta}{\zeta + 1} \tag{32}$$

Таким образом, начальной формой области является полуплоскость, причем скважина находится на расстоянии, равном единице, от границы полуплоскости.

2. Будем исходить из функции

$$f_2(\zeta) = i\zeta$$

Необходимо найти функцию $f_1(\zeta)$, удовлетворяющую условию

$$\operatorname{Re}[f_1'(\zeta)\,\zeta\,\overline{f_2(\zeta)}] = 0 \qquad (\zeta = e^{i\vartheta})$$

В данном случае должно иметь место

$$\operatorname{Re}[f_1'(\zeta)\,\zeta(-i\bar{\zeta})] = \operatorname{Re}[-if_1'(\zeta)] = 0, \quad \operatorname{Im}[f_1'(\zeta)] = 0 \quad (\zeta = e^{i\vartheta}) \tag{33}$$

Таким образом, в качестве функции $f_1'(\zeta)$ может быть взята функция, которая на контуре единичного круга принимает действительные значения и является регулярной внутри единичного круга. Примем $f_1'(\zeta)$ в следующем виде:

$$f_1'(\zeta) = iA\left[\frac{1-\zeta}{1+\zeta} + \frac{1+\zeta}{1-\zeta}\right] \tag{34}$$

В таком случае

$$f_1(\zeta) = iA\int\left(\frac{1-\zeta}{1+\zeta} + \frac{1+\zeta}{1-\zeta}\right)d\zeta = -2iA\zeta + 2iA\lg\frac{1+\zeta}{1-\zeta} \tag{35}$$

Отсюда

$$z(\zeta, \tau) = f_1(\zeta) + f_2(\zeta)\sqrt{2\tau + C} = 2iA\lg\frac{1+\zeta}{1-\zeta} - 2iA\zeta +$$

$$+ iC\sqrt{2\tau + C} = 2iA\lg\frac{1+\zeta}{1-\zeta} + i\zeta(-2A + \sqrt{2\tau + C}) \tag{36}$$

Подберем постоянную C таким образом, чтобы при $\tau = 0$ исчез член, содержащий ζ. Отсюда находим

$$-2A + \sqrt{C} = 0, \qquad C = 4A^2$$

На основании этого получим

$$z(\zeta, \tau) = 2iA\lg\frac{1+\zeta}{1-\zeta} + i\zeta(-2A + \sqrt{2\tau + 4A^2})$$

При $\tau = 0$ мы получим функцию, отображающую полосу на единичный круг. Для того чтобы эта полоса имела ширину, равную $2H$, следует принять $A = H / \pi$. В таком случае будем иметь окончательно

$$z(\zeta, \tau) = i\frac{2iH}{\pi}\lg\frac{1+\zeta}{1-\zeta} + i\zeta\left(-\frac{2iH}{\pi} + \sqrt{2\tau + \frac{4H^2}{\pi^2}}\right) \tag{37}$$

При этом, когда $\tau = 0$

$$z(\zeta, 0) = z_0(\zeta) = i\frac{2H}{\pi}\lg\frac{1+\zeta}{1-\zeta}$$

Таким образом, начальная форма области — полоса, ширина которой равна $2H$.

Формулы, аналогичные (31) и (37), другим методом получены П. П. Куфаревым и Ю. П. Виноградовым [2].

Дадим теперь выражение для некоторого класса функций, удовлетворяющих исходному условию. Функция $f_3(\zeta)$, принимающая чисто мнимые значения на контуре единичного круга, регулярная внутри этого круга и обладающая на контуре единичного круга только простыми полюсами, будет иметь следующий вид

$$f_3(\zeta) = i\prod_{n=1}^{m}\left(i\frac{\zeta-1}{\zeta+1} - \alpha_n\right) \tag{38}$$

Здесь α_n — действительные величины. Будем исходить из функции

$$f_2(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\zeta(\zeta+3)}{\zeta+1} \tag{39}$$

В таком случае согласно (26)

$$f_1'(\zeta) = \frac{f_2(\zeta)}{\zeta}f_3(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\zeta+3}{\zeta+1}\left[i\prod_{n=1}^{m}\left(i\frac{\zeta-1}{\zeta+1} - \alpha_n\right)\right]$$

Тогда

$$f_1(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{\zeta+3}{\zeta+1}\left[i\prod_{n=1}^{m}\left(i\frac{\zeta-1}{\zeta+1} - \alpha_n\right)\right]d\zeta$$

Отсюда

$$z(\zeta, \tau) = \frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{\zeta+3}{\zeta+1}\left[i\prod_{n=1}^{m}\left(i\frac{\zeta-1}{\zeta+1} - \alpha_n\right)\right]d\zeta + \frac{\zeta(\zeta+3)}{\sqrt{3}(\zeta+1)}\sqrt{2\tau + C} \tag{40}$$

Если положить $C = 0$, то при $\tau = 0$

$$z(\zeta, 0) = z_0(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{\zeta+3}{\zeta+1}\left[i\prod_{n=1}^{m}\left(i\frac{\zeta-1}{\zeta+1} - \alpha_n\right)\right]d\zeta$$

При этом, очевидно, функция

$$z_0'(\zeta) = \frac{\zeta+3}{\sqrt{3}(\zeta+1)}\left[i\prod_{n=1}^{m}\left(i\frac{\zeta-1}{\zeta+1} - \alpha_n\right)\right]$$

обладает нулями только на контуре единичного круга. Поэтому в начальный момент времени функция соответствует некоторой однолистной области.

Поступила 15 IX 1950

Институт механики
Академии Наук СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Галин Л. А. Неустановившаяся фильтрация со свободной поверхностью. ДАН СССР. 1945. Т. 47. № 4.
2. Куфарев П. П., Виноградов Ю. П. О некоторых частных решениях задач фильтрации. ДАН СССР. 1947. Т. 57. Стр. 335—338.