Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XV, 1951

# ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ О ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ФОРМЕ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛАСТИНОК ЗА ПРЕДЕЛОМ УПРУГОСТИ

Ю. Р. Лепик (Тарту)

Задача о цилиндрической форме потери устойчивости прямоугольной пластинки, достаточно длинной в одном направлении и равномерно сжатой в другом направлении, решена А. А. Ильюшиным [1]. В своей работе [2] С. М. Попов дал этому решению другую, для практических вычислений более удобную форму. В работах оба автора исходят из предположения, что пластические деформации перед потерей устойчивости малы сравнительно с упругими, т. е. величина $\omega$ мала по сравнению с единицей. Можно показать, что это предположение является излишним.

1. Будем исходить из уравнения вариаций усилий и моментов, данных А. А. Ильюшиным в работе [1] (стр. 288—289). Для рассматриваемого случая, когда $X_x^* = -1$, $Y_y^* = X_y^* = 0$, $\varkappa_2 = \varkappa_3 = 0$, из этих уравнений следует

$$\frac{1}{Eh}\delta T_1 = \frac{2}{3}(1-\omega\zeta)(2\varepsilon_1+\varepsilon_2) + \frac{4}{3}\omega\zeta(1-\zeta)\varkappa_1^* + (\lambda-\omega)\zeta^2\varkappa_1^* = 0$$

$$\frac{1}{Eh}\delta T_2 = \frac{2}{3}(1-\omega\zeta)(\varepsilon_1+2\varepsilon_2) + \frac{2}{3}\omega\zeta(1-\zeta)\varkappa_1^* \tag{1.1}$$

$$\frac{1}{D}\delta M_1 = -\frac{3\omega}{h}\zeta(1-\zeta)(2\varepsilon_1+\varepsilon_2) - $$
$$-[1-\omega\zeta(3-6\zeta+4\zeta^2)]\varkappa_1 + \frac{3}{4}(\lambda-\omega)\zeta^2(3-2\zeta)\varkappa_1$$

Исключая из первого уравнения $\varepsilon_1$, $2\varepsilon_1+\varepsilon_2$ и подставляя их в остальные два уравнения, находим

$$\frac{1}{Eh}\delta T_2 = (1-\omega\zeta)\varepsilon_2 - \frac{1}{2}(\lambda-\omega)\zeta^2\varkappa_1^* \tag{1.2}$$

$$\delta M_1 = -\frac{D}{1-\omega\zeta}\Big[1-\omega\zeta(4-6\zeta+4\zeta^2)+\omega^2\zeta^4 - $$
$$-\frac{3}{4}(\lambda-\omega)\zeta^2(3-2\zeta-\omega\zeta^2)\Big]\varkappa_1 \tag{1.3}$$

Кроме того, относительная толщина пластического слоя должна удовлетворять соотношению [ср. [1] формула (5.25)]

$$1-2\zeta+\lambda\zeta^2 = -\frac{\delta T_2}{Eh^2\varkappa_1} \tag{1.4}$$

Перепишем формулы (1.2) и (1.4) в обозначениях, введенных С. М. Поповым в работе [2] формулами (3.1) и (3.4):

$$\frac{d^2\varphi^e}{d\eta^2} = (1-\omega\zeta)\varepsilon_2^* - \frac{1}{4}(\lambda-\omega)\zeta^2\frac{d^2v^e}{d\eta^2}$$
$$\frac{d^2\varphi^e}{d\eta^2} = -(1-2\zeta+\lambda\zeta^2)\frac{d^2v^e}{d\eta^2} \tag{1.5}$$

Исключая из уравнений (1.5) величину $d^2v^e / d\eta^2$, получим

$$\frac{d^2\varphi^e}{d\eta^2} = \frac{4(1-\omega\zeta)(1-2\zeta+\lambda\zeta^2)}{4-8\zeta+(3\lambda+\omega)\zeta^2}\varepsilon_2^* \tag{1.6}$$

Для того чтобы ни в одной точке пластинки $d^2\varphi^e / d\eta^2$ не обращалось в $\infty$, необходимо, чтобы

$$4-8\zeta+(3\lambda+\omega)\zeta^2 \neq 0, \qquad \text{или} \qquad \zeta \neq \frac{4}{3\lambda+\omega}\left(1-\sqrt{1-\frac{3\lambda+\omega}{4}}\right)$$

Вполне аналогично с рассуждениями, проведенными в работе [2], можно показать, что на некотором участке $\zeta_0 \leqslant \zeta \leqslant 1$ всегда выполняются неравенства

$$\zeta_1 = \frac{1}{\lambda}\left(1-\sqrt{1-\lambda}\right) > \zeta_0 > \frac{4}{3\lambda+\omega}\left(1-\sqrt{1-\frac{3\lambda+\omega}{4}}\right) = \zeta_2 \tag{1.7}$$

Из (1.7) следует, что с возрастанием величины $\omega$ промежуток $(\zeta_1, \zeta_2)$ уменьшается и в предельном случае, где $\omega \to \lambda$, $\zeta_2 \to \zeta_1$. Уравнение устойчивости

$$\frac{d^2\delta M_1}{dx^2} - h\sigma_i \frac{d^2w}{dx^2} = 0$$

если учитывать (1.3) и ввести безразмерные величины $v$, $\eta$, $\varphi$, будет иметь вид:

$$\frac{d^2}{d\eta^2}\left[\frac{4-16\omega\zeta+(-9\lambda+33\omega)\zeta^2+(6\lambda-22\omega)\zeta^3+\omega(3\lambda+\omega)\zeta^4}{1-\omega\zeta}\frac{d^2v^e}{d\eta^2}\right] + \alpha^2\frac{d^2v^e}{d\eta^2} = 0 \tag{1.8}$$

где

$$\alpha^2 = \frac{l^2 h\sigma_i}{D} \tag{1.9}$$

В области чисто пластических деформаций $\zeta = 1$, $\varkappa_1^* = -\varepsilon_1$ и полученные соотношения упрощаются. Таким образом, из уравнений (1.6) и (1.8) получим

$$\frac{d^2\varphi^p}{d\eta^2} = \frac{4(1-\omega)(1-\lambda)}{4-3\lambda-\omega}\varepsilon_2^* \tag{1.10}$$

и

$$\frac{d^4v^p}{d\eta^4} + \beta^2\frac{d^2v^p}{d\eta^2} = 0 \qquad \left(\beta^2 = \frac{\alpha^2}{4-3\lambda-\omega}\right) \tag{1.11}$$

Элементарные вычисления показывают, что формулы (4.9) — (4.13) в работе [2] остаются действительными, если ввести функции $f(\zeta)$ и $\vartheta(\zeta)$ следующим образом:

$$f(\zeta) = \frac{4-16\omega\zeta+(-9\lambda+33\omega)\zeta^2+(6\lambda-22\omega)\zeta^3+\omega(3\lambda+\omega)\zeta^4}{4-8\zeta+(3\lambda+\omega)\zeta^2} \tag{1.12}$$

$$\vartheta(\zeta) = \frac{1-\omega\zeta}{4-8\zeta+(3\lambda+\omega)\zeta^2} \tag{1.13}$$

Пользуясь выражениями (1.12) и (1.13) и вводя для удобства обозначения

$$\psi(\zeta) = \frac{df}{d\zeta}, \quad \omega(\zeta) = \frac{d\psi}{d\zeta}, \quad \Phi(\zeta) = 2\int \vartheta(\zeta)\psi(\zeta)\,d\zeta$$

можно показать, что формулы (5.1), (5.3) — (5.6), (5.8) — (5.12) в работе [2] остаются также в силе. При этом $\Phi(\zeta)$ определяется по формуле

$$\Phi(\zeta) = \frac{A_0+A_1\zeta+A_2\zeta^2+A_3\zeta^3+A_4\zeta^4+A_5\zeta^5}{[4-8\zeta+(3\lambda+\omega)\zeta^2]^2} \tag{1.14}$$

где

$$A_0 = 16 \qquad A_3 = -4(3\lambda+25\omega+12\omega^2)$$
$$A_1 = -16(3+2\omega), \qquad A_4 = 8\omega(3\lambda+7\omega)$$
$$A_2 = 16(3+6\omega+\omega^2), \qquad A_5 = -4\omega^2(3\lambda+\omega).$$

Вместо формул (5.13) и (6.1), указанных в работе [2], которые связывают величины $\alpha$ и $\eta_0$ с $\zeta_0$, получим новые формулы в виде

$$\alpha\eta_0 = \frac{4-3\lambda-\omega}{1-\omega} A(\zeta_0) - I_1(\zeta_0)$$
$$\alpha = \frac{2(4-3\lambda-\omega)}{(1-\omega)(1-\lambda)} I_2(\zeta_0) - I_1(\zeta_0) \tag{1.15}$$

где

$$A(\zeta_0) = \sqrt{\Phi(\zeta_0) - \Phi(1)}$$

$$I_1(\zeta_0) = \int\limits_{\zeta_0}^{1} \frac{8-4\omega-2(3\lambda+\omega)\zeta+\omega(3\lambda+\omega)\zeta^2}{(1-\omega\zeta)^2} \sqrt{\Phi(\zeta_0)-\Phi(\zeta)}\, d\zeta$$

$$I_2(\zeta_0) = \int\limits_{\zeta_0}^{1} (1-\lambda\zeta)\sqrt{\Phi(\zeta_0)-\Phi(\zeta)}\, d\zeta$$

2. В работах [1,2] поставленная задача решена для несжимаемого материала $\nu = 0.5$. Но можно показать, что метод решения, данный в этих работах, применим и для материалов с реальным значением $\nu$ $(0 < \nu < 0.5)$. Для того чтобы упростить дальнейшие вычисления, предполагаем, что $\omega = 0$ (случай мало развитых пластических деформаций). Так как нахождение решения рассматриваемой задачи состоит в полном соответствии с решениями, данными для несжимаемого материала [2] и в первой части настоящего замечания, то в дальнейшем не будем пускаться в детали и дадим только результаты вычислений.

Вариации усилий и моментов для сжимаемого материала даны автором в работе [3] формулами (3.1), (3.3) и (1.9).

Так как в рассматриваемом случае

$$\omega = 0, \qquad \alpha' = \alpha, \qquad \beta' = \beta, \qquad g' = g = \frac{1-2\nu}{2(1+\nu)} \tag{2.1}$$

$$X_x^* = -1, \quad Y_y^* = X_y^* = 0, \quad \varkappa_2 = \varkappa_3 = 0 \tag{2.2}$$

то из этих формул после простых преобразований получим

$$\frac{1}{h}\delta T_1 = \frac{2G}{1-\nu}(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2 + \Lambda\zeta^2\varkappa_1^*) = 0$$
$$\frac{1}{h}\delta T_2 = \frac{2G}{1-\nu}\left(\nu\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \frac{1-2\nu}{2-\nu}\Lambda\zeta^2\varkappa_1^*\right)$$
$$(1-2\zeta)\varkappa_1^* = \varepsilon_1 - \frac{1-2\nu}{2-\nu}\varepsilon_2 \tag{2.3}$$
$$\delta M_1 = -D[1-\Lambda\zeta^2(3-2\zeta)]\varkappa_1$$

Здесь обозначено

$$\Lambda = \frac{(2-\nu)^2\lambda}{6(1-\nu)-\lambda(1-2\nu)} \tag{2.4}$$

Функции $f(\zeta)$, $\vartheta(\zeta)$ и $\Phi(\zeta)$ вводятся теперь в виде

$$f(\zeta) = \frac{2(1-\nu^2)[1-\Lambda\zeta^2(3-2\zeta)]}{(2-\nu)(1-2\zeta+\Lambda\zeta^2)}$$

$$\vartheta(\zeta) = \frac{1-\nu^2}{2(2-\nu)(1-2\zeta+\Lambda\zeta^2)}$$

$$\Phi(\zeta) = \frac{4(1-\nu^2)^2(1-3\zeta+3\zeta^2-\Lambda\zeta^3)}{(2-\nu)^2(1-2\zeta+\Lambda\zeta^2)^2}$$

Для определения величин $\zeta_0$, $\eta_0$, $\alpha$ получим, кроме уравнения (4.13) работы [2], еще два:

$$\alpha\eta_0 = \frac{2(2-\nu)}{1-\nu^2}\left[(1-\Lambda)\sqrt{\Phi(\zeta_0)-\Phi(1)} - 2\int_{\zeta_0}^{1}(1-\Lambda\zeta)\sqrt{\Phi(\zeta_0)-\Phi(\zeta)}\,d\zeta\right]$$

$$\alpha = \frac{2(2-\nu)\lambda}{3(1-\nu)(1-\lambda)}\int_{\zeta_0}^{1}(1-\zeta)\sqrt{\Phi(\zeta_0)-\Phi(\zeta)}\,d\zeta \qquad (2.6)$$

Можно показать, что границы величины $\zeta_0$ определяются неравенствами

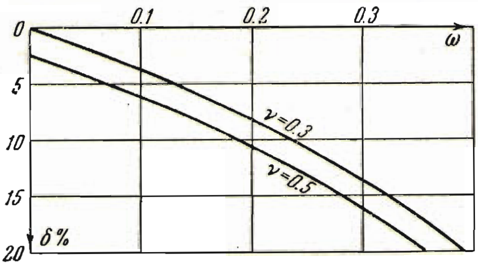
$$\zeta_1 = \frac{1-\sqrt{1-\Lambda_1}}{\Lambda_1} > \zeta_0 > \frac{1-\sqrt{1-\Lambda}}{\Lambda} = \zeta_2$$

$$\left(\Lambda_1 = \frac{(5-4\nu)\lambda}{6(1-\nu)-\lambda(1-2\nu)}\right) \qquad (2.7)$$

**3.** Рассмотрим случай, где $\lambda = 1$ (материал имеет площадку текучести). В этом случае задача не может быть решена посредством формул (1.15) или (2.6). В самом деле, при $\lambda = 1$ из этих формул следует, что $\zeta_0 = 1$, $\eta_0 = 0$ (это значит, что вся пластинка находится в чисто пластическом состоянии) и $\alpha$ остается неопределенным. Но проведенные вычисления показывают, что в случае $\lambda = 1$ решение задачи можно найти непосредственно (даже для общего случая $\omega \neq 0$, $\nu \neq 0.5$). Полученное решение можно представить в замкнутом виде:

$$\alpha = \pi\sqrt{\frac{(1-\nu^2)(1-\omega)}{5-4\nu-3(1-2\nu)\omega}} \qquad (3.1)$$

Согласно этой формуле можно оценить погрешности, которые делаем при $\lambda = 1$, считая материал несжимаемым или не учитывая величины $\omega$.



Фиг. 1

На фиг. 1 представлены погрешности приближенных решений как функции $\omega$ для случая $\omega = 0$ (диаграмма составлена для материала с модулем Пуассона $\nu = 0.3$). Из сравнения этих кривых следует, что:

1) пренебрежение сжимаемостью материала мало влияет на величину $\alpha$, характеризующую критическую гибкость;

2) считая $\omega = 0$, делаем уже при сравнительно малых значениях $\omega$ ошибку, превосходящую 10—20% (например, 14% при $\omega = 0.3$).

Поступила 9 XI 1950

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильюшин А. А. Пластичность. ОГИЗ. 1948.
2. Попов С. М. О цилиндрической форме потери устойчивости пластинок за пределом упругости. ПММ. 1950. Т. XIV. Вып. 5.
3. Лепик Ю. Р. Два замечания к теории устойчивости пластинок за пределом упругости с учетом сжимаемости материала. ПММ. 1950. Т. XIV. Вып. 5.