Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XV, 1951

О РАСПРОСТРАНЕНИИ МЕТОДА СМЯГЧЕНИЯ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ЗА ПРЕДЕЛОМ УПРУГОСТИ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИНОК

С. М. Попов

(Москва)

В работе дается распространение метода смягчения граничных условий теории упругости на задачи устойчивости пластинок за пределом упругости.

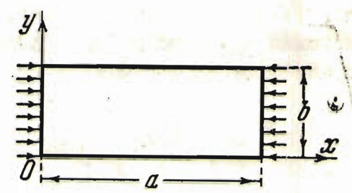
Исследование задач устойчивости проводится в приближенной постановке А. А. Ильюшина [1]; из его же работы заимствованы обозначения.

Пусть пластинка длиной a, шириной b и толщиной h равномерно сжата вдоль оси x нагрузкой, создающей напряжение X_x, а вдоль оси y нагрузкой, вызывающей напряжение, пропорциональное X_x (фиг. 1).

Перед потерей устойчивости напряженное состояние пластинки определяется величинами

$$X_x^* = -\frac{X_x}{\sigma_i} \quad Y_y^* = -\frac{X_x^*}{\alpha}, \qquad X_y^* = 0$$

$$\sigma_i = X_x\sqrt{1-\alpha+\alpha^2} \tag{1}$$



Фиг. 1

Введем обозначения

$$p = \frac{3}{4}\,\frac{1-\psi-k}{1-\psi}, \qquad \gamma = 1-\alpha+\alpha^2$$

$$\lambda^2 = i^2\,\frac{\sigma_i\sqrt{2}}{El^2(1-\psi)} \tag{2}$$

В этих обозначениях дифференциальное уравнение устойчивости пластинок (см. работу [1], гл. V, § 37) принимает вид:

$$(\gamma-p)\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(\gamma-\alpha p)\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2} + (\gamma-p\alpha^2)\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \lambda^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \alpha\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 0 \tag{3}$$

Граничные условия для случая защемления всего контура пластинки будут

$$\begin{aligned} w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = 0, \quad x = a \\ w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad y = b \end{aligned} \tag{4}$$

Известно [2], что задаче решения уравнения (3) при определенных граничных условиях и, в частности, при условиях (4) соответствует следующая вариационная задача: из всех функций $w(x, y)$, удовлетворяющих данным граничным условиям, найти те, которые дают наименьшие значения интеграла:

$$M(w) = \iint\left\{(\gamma-p)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + 2(\gamma-p\alpha)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (\gamma-p\alpha^2)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2\right\}dx\,dy \tag{5}$$

при условии, что

$$I(w)=\iint\left\{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\alpha\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right\}dx\ dy=1 \tag{6}$$

Здесь двойные интегралы берутся по поверхности пластинки.

Легко показать, что решение сформулированной вариационной задачи является решением дифференциального уравнения (3), удовлетворяющим определенным граничным условиям [для данной задачи условиям (4)]. Действительно, если приравнять нулю первую вариацию функции

$$L=M-\lambda^2 I \tag{7}$$

и учесть, что вариация δw произвольна, то можно получить как дифференциальное уравнение (3), так и уравнения естественных граничных условий, в частном случае (4).

Если вместо произвольной вариации δw взять некоторое частное значение $\varepsilon w=\delta w$, то

$$\delta L=2\varepsilon L$$

Так как

$$\delta L=0,\ I\ (w)=1$$

то наименьшее значение параметра λ^2 равно минимальному значению интеграла M. Заметим, что наименьшее значение λ^2 согласно (2) определяет критическую гибкость или силу.

В такой постановке решение вариационной задачи для защемленных пластинок представляет большие трудности. Поэтому, следуя работам [2, 3], поставим смягченную вариационную задачу, которая отличается от изложенной выше тем, что искомая функция $v(x, y)$ должна удовлетворять вместо условий (4) смягченным граничным условиям вида

$$\begin{aligned} &v=0, \quad \int_0^b \frac{\partial v}{\partial x}\sin\frac{\eta\pi y}{b}\,dy=0 \quad \text{при } x=0,\ x=a \\ &v=0, \quad \int_0^a \frac{\partial v}{\partial y}\sin\frac{\eta\pi x}{a}\,dx=0 \quad \text{при } y=0,\ y=b \end{aligned} \tag{8}$$

здесь η — определенное целое число.

Если $v(x, y)$ есть точное решение смягченной вариационной задачи, а $w(x, y)$ — решение первоначальной задачи, причем $M(v)$ и $M(w)$ — соответственно искомые минимальные значения интегралов (5), то выполняется следующее условие:

$$M(v)\leqslant M(w) \tag{9}$$

и, следовательно, согласно [1] (6) и (7)

$$\lambda^2(v)\leqslant\lambda^2(w) \tag{10}$$

Таким образом, точное решение смягченной задачи дает несколько заниженное значение параметра λ, в то время как методы Б. Г. Галеркина [4], С. П. Тимошенко [5] и других дают несколько завышенные значения.

Аналогичным в теории упругости путем будем искать решение смягченной вариационной задачи в виде

$$v(x,\ y)=\sum\sum A_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \tag{11}$$

---

[1] См. работы [2, 3]. Мы считаем, что это утверждение справедливо во всяком случае для первого приближения смягченных граничных условий, т. е. при $\eta=1$.

Полагая в первом приближении $\eta = 1$ в формулах (8), после преобразований получим четыре уравнения:

$$x_2\left(\operatorname{ctg}\pi x_2 + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\pi x_2\right) - x_1\left(\operatorname{ctg}\pi x_1 + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\pi x_1\right) = 0 \tag{12}$$

$$x_4\left(\operatorname{ctg}\pi x_4 + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\pi x_4\right) - x_3\left(\operatorname{ctg}\pi x_3 + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\pi x_3\right) = 0 \tag{13}$$

$$\frac{\pi^2}{16\,AC\,(x_1^2 - x_2^2)(x_3^2 - x_4^2)}\left(x_1\operatorname{tg}\frac{1}{2}\pi x_1 - x_2\operatorname{tg}\frac{1}{2}\pi x_2\right)\times$$

$$\times\left(x_3\operatorname{tg}\frac{1}{2}\pi x_3 - x_4\operatorname{tg}\frac{1}{2}\pi x_4\right) = \left[A^* + 2B + C^* - \lambda^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{\alpha}{b^2}\right)\right]^2 \tag{14}$$

$$\lambda^2 = \frac{Am^4 + 2Bm^2n^2 + Cn^4}{m^2b^2 + \alpha n^2a^2}\,a^2b^2 \tag{15}$$

Здесь

$$x_1^2 = -\frac{1}{2C^*}\left(2B^* - \lambda^2\frac{a}{b^2}\right) + \sqrt{\left[\frac{1}{2C^*}\left(2B^* + \lambda^2\frac{\alpha}{b^2}\right)\right]^2 - \frac{1}{C^*}\left(A^* - \frac{\lambda^2}{a^2}\right)}$$

$$x_2^2 = -\frac{1}{2C^*}\left(2B^* - \lambda^2\frac{\alpha}{b^2}\right) - \sqrt{\left[\frac{1}{2C^*}\left(2B^* + \lambda^2\frac{\alpha}{b^2}\right)\right] - \frac{1}{C^*}\left(A^* - \frac{\lambda^2}{a^2}\right)}$$

$$x_3^2 = -\frac{1}{2A^*}\left(2B^* - \frac{\lambda^2}{a^2}\right) + \sqrt{\left[\frac{1}{2A^*}\left(2B^* - \frac{\lambda^2}{a^2}\right)\right]^2 - \frac{1}{A^*}\left(C^* - \lambda^2\frac{\alpha}{b^2}\right)}$$

$$x_4^2 = -\frac{1}{2A^*}\left(2B^* - \frac{\lambda^2}{a^2}\right) - \sqrt{\left[\frac{1}{2A^*}\left(2B^* - \frac{\lambda^2}{a^2}\right)\right]^2 - \frac{1}{A^*}\left(C - \lambda^2\frac{\alpha}{b^2}\right)} \tag{16}$$

$$A = \gamma - p, \quad B = \gamma - \alpha p, \quad C = \gamma - \alpha^2 p$$

$$A^* = \frac{A}{a^4}, \quad B^* = \frac{B}{a^2b^2}, \quad C^* = \frac{C}{b^4}$$

Для определения критической гибкости из уравнений (12) — (15) нужно выбрать то, которое дает наименьшее численное значение параметра λ^2.

Для квадратной, защемленной, равномерно сжатой по контуру пластинки имеем согласно (1), (2) и (16)

$$\alpha = 1, \quad \gamma = 1, \quad A = B = C = (1 - p)$$

$$A^* = B^* = C^* = \frac{1-p}{a^4}, \quad x_1^2 = x_2^2, \quad x_3^2 = x_4^2 \tag{17}$$

Уравнение (12) тождественно равно уравнению (13), наименьшим корнем этих уравнений будет величина

$$\lambda^2 \approx \frac{6.1}{\pi^2(1-p)}$$

Уравнение (14) разделяется на два:

$$\frac{\pi}{4A\,(x_1^2 - x_2^2)}\left(x_1\operatorname{tg}\frac{1}{2}\pi x_1 - x_2\operatorname{tg}\frac{1}{2}\pi x_2\right) \pm \frac{1}{(4A - 2\lambda^2/a^2)^2} = 0 \tag{19}$$

Наименьшими корнями этих уравнений соответственно будут значения

$$\lambda^2 \approx \frac{6.75}{\pi^2(1-p)}, \qquad \lambda^2 = \frac{5.16}{\pi^2(1-p)} \tag{20}$$

Легко видеть, что наименьший корень уравнения (15) при $m \geqslant 1$, $n \geqslant 1$ будет

$$\lambda^2 \geqslant \frac{8}{\pi^2(1-p)} \tag{21}$$

Из (18) — (21) следует, что наименьшее значение параметра λ^2 дает второе из уравнений (19). Таким образом, критическая гибкость согласно (2) определяется формулой

$$i = 2.27\,\pi \sqrt{\frac{E\,(1-\psi)}{\sigma_i}(1-p)} \qquad (22)$$

Решение этой задачи методом С. П. Тимошенко дает величину критической гибкости

$$i = 2.31\,\pi \sqrt{\frac{E\,(1-\psi)}{\sigma_i}(1-p)} \qquad (23)$$

Аналогичным путем определяются величины критических гибкостей для пластинок произвольных размеров при произвольном отношении сжимающих или растягивающих сил, действующих на края пластинки.

Интересно отметить, что в других задачах устойчивости за пределом упругости пластинок, защемленных по части контура, метод смягчения граничных условий практически имеет преимущества по сравнению с другими методами, в том числе и точным.

Если граничные условия типа (4) смягчены в первом приближении $\eta = 1$, то он дает более простые уравнения для определения критических значений сил или гибкостей, при этом погрешность с точным решением пренебрежимо мала.

Например, для пластинок, равномерно сжатых в направлении оси x, свободно опертых по сторонам $x = 0$ и $x = a$ и защемленных по двум другим сторонам, точное решение, удовлетворяющее уравнению (3) и поставленным граничным условиям, дает для определения критического значения параметра λ трансцендентное уравнение

$$\sqrt{\lambda_1 + 1}\,(1 - \cos 2\alpha \operatorname{ch} 2\beta) + \sin 2\alpha \operatorname{ch} 2\beta = 0 \qquad (24)$$

Здесь

$$\alpha = \frac{\pi}{2}\frac{b}{a}\sqrt{\lambda_1 - 1}, \qquad \beta = \frac{\pi}{2}\frac{b}{a}\sqrt{\lambda_1 + 1}, \qquad \lambda_1 = \sqrt{p + \frac{\lambda^2 a^2}{b^2}} \qquad (25)$$

Решение смягченной вариационной задачи дает трансцендентное уравнение

$$\alpha \operatorname{tg} \alpha + \beta \operatorname{th} \beta = 0 \qquad (26)$$

Нахождение корней уравнения (26) проще, чем корней уравнения (24). К тому же имеются таблицы и графики [6] функции $\alpha \operatorname{tg} \alpha$.

Вычисления, проведенные М. Ф. Балуковой для стальных пластинок различных размеров и при различной степени пластической деформации, показывают, что величины критических гибкостей по уравнению (26) отличаются менее чем на 0.5% от значений, найденных из точного уравнения (24).

Поступила 30 X 1950

Институт механики
Академии Наук СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильюшин А. А. Пластичность. ОГИЗ. 1948.
2. Treffz E. ZAMM. 1935. Bd. 15. H. 6.
3. Лейбензон А. С. Вариационные методы решения задач теории упругости. ОГИЗ. 1943.
4. Галеркин Б. Г. Упругие тонкие плиты. Стройиздат. 1933.
5. Тимошенко С. П. Устойчивость упругих систем. ОГИЗ. 1946.
6. Янке Е., Эмде Ф. Таблица функций с формулами и кривыми. ОГИЗ. 1948.