УПРУГОЕ РАВНОВЕСИЕ ПАРАБОЛОИДА ВРАЩЕНИЯ

Г. С. Шапиро (Москва)

Как известно [1], задача об осесимметричных деформациях конуса в случае нагрузки, меняющейся по боковым коническим поверхностям по закону полинома решается с помощью бигармонической функции φ Лява-Галеркина

$$\varphi = \sum_{n=3}^{\infty} R^n \left(A_{n-3} P_n + B_{n-3} P_{n-2} + C_{n-3} Q_n + D_{n-3} Q_{n-2} \right) \tag{1}$$

где $P_n = P(\cos\theta)$ и $Q_n = Q_n(\cos\theta)$ — полиномы Лежандра первого и второго рода, R, θ — сферические координаты.

Если осесимметричная нагрузка на боковой поверхности параболоида вращения также задана в виде полинома, то и в этом случае решение может быть получено посредством бигармонической функции (1).

Не останавливаясь на рассмотрении этой задачи в общем виде, ограничимся ее решением для частного случая параболоида вращения второго порядка, на поверхности которого нагрузка меняется линейно.

Поверхность параболоида задана уравнением

$$z = ar^2 \tag{2}$$

Нормальная нагрузка задается в виде

$$p = \gamma z \tag{3}$$

Касательная нагрузка предполагается равной нулю.

На поверхности параболоида должны удовлетворяться краевые условия

$$\gamma z = \sigma_z - 2ar\,\tau_{rz}, \qquad \gamma z = \sigma_r - \frac{1}{2ar}\,\tau_{rz} \tag{4}$$

Для функции φ принимаем выражение

$$\varphi = R^4 (A_1 P_1 + B_1 P_2) + R^3 (A_0 P_3 + B_0 P_1)$$

или в цилиндрических координатах

$$\varphi = A_1 \left(z^4 - 3z^2 r^2 + \frac{3}{8} r^4\right) + B_1 \left(z^4 + \frac{1}{2} z^2 r^2 - \frac{1}{2} r^4\right) + \\ + A_0 z \left(z^2 - \frac{3}{2} r^2\right) + B_0 z (z^2 + z^2) \tag{5}$$

Напряжения, отвечающие функции (5), имеют вид:

$$\begin{gathered} \sigma_\theta = \sigma_r = 3A_0 + 2(9\sigma - 1) B_0 + 2[6A_1 - (1 - 14\sigma) B_1] z \\ \sigma_z = -6A_0 + 6(5 - 3\sigma) B_0 + 4[-6A_1 + (8 - 7\sigma) B_1] z \\ \tau_{rz} = 2[6A_1 - (8 - 7\varepsilon) B_1] r \end{gathered} \tag{6}$$

Подстановка выражений (6) в краевые условия (4) приводит к следующей системе уравнений:

$$\gamma = 2[6A_1 - (1 - 14\sigma) B_1]$$

$$3A_0 + 2(1 + 9\sigma) B_0 = \frac{1}{a} [6A_1 - (8 - 7\sigma) B_1]$$

$$A_0 = (5 - 3\sigma) B_0$$

$$\gamma = 8[-6A_1 + (8 - 7\sigma) B_1]$$

Откуда находим

$$A_0 = -\frac{(5-3\sigma)\gamma}{8a(13+9\sigma)}, \qquad B_0 = -\frac{\gamma}{8a(13+9\sigma)}$$

$$A_1 = \frac{5(11-14\sigma)}{560(1+\sigma)}, \qquad B_1 = \frac{5\gamma}{56(1+\sigma)} \tag{7}$$

Формулы для напряжений (6) в окончательном виде будут

$$\sigma_\theta = \sigma_r = \gamma\left(z - \frac{1}{8a}\right), \qquad \sigma_z = \frac{\gamma z}{2}, \qquad \tau_{rz} = -\frac{\gamma r}{4} \tag{8}$$

Налагая на напряжения (8) всесторонне сжимающие напряжения $-\gamma z$ (где γ — объемный вес), находим напряжения в параболоиде от собственного веса:

$$\sigma_z = -\frac{\gamma z}{2}, \qquad \sigma_r = \sigma_\theta = -\frac{\gamma}{8a}, \qquad \tau_{rz} = -\frac{\gamma r}{4} \tag{9}$$

Формула для напряжений σ_z совпадает с элементарным решением сопротивления материалов.

Напомним для сравнения, что напряжения от собственного веса в конусе имеют вид[1]:

$$\sigma_z = -\frac{\gamma z}{3}, \qquad \sigma_r = \sigma_\theta = \sigma_z \operatorname{tg}^2\alpha, \qquad \tau_{rz} = -\frac{\gamma r}{3} \tag{10}$$

причем 2α — угол раствора конуса.

Решение плоской задачи для параболического профиля под действием собственного веса недавно было получено Хэнком и Скрайнером[2].

Поступила 31 V 1950

Институт механики
Академии Наук СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Шапиро Г. С. О равновесии конуса и конической оболочки. ПММ. 1944. Т. VIII
2. Hank R., Scrivner F. Stresses and Displacements in a Semi-Infinite Elastic Body with Parabolic Cross Section Acted on by Its Own Weight Only. Journal of Appl. Mech. 1949. Vol. 16. No 2. P. 211—212.