ОБ ОДНОМ ФУНКЦИОНАЛЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ УСТОЙЧИВОСТИ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК

Л. М. Бунич (Ленинград)

В своей работе Х. М. Муштари [1] рекомендовал для решения различных задач устойчивости тонких оболочек пользоваться функционалом, который применительно к изотропной тонкой цилиндрической оболочке имеет вид:

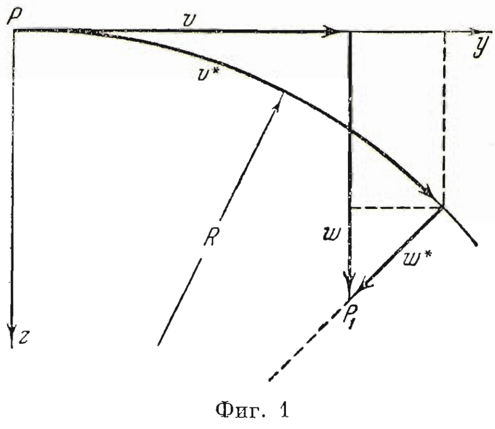
$$Q = \frac{1}{2}\iint\Big\{T_{1,0}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + T_{2,0}\,\varepsilon_2'' + K_{1,2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 + K\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\sigma\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial s} - \frac{w}{R}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial s} - \frac{w}{R}\right)^2\right] + D\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial s}\right)^2 + 2\sigma\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial s}\right) + 2(1-\sigma)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial s} + \frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right]\Big\}dx\,ds \tag{1}$$

где w, v, и u — соответствующие проекции перемещений, K — жесткость на растяжение, $K_{1,2}$ — жесткость сдвига, D — жесткость изгиба

$$K = \frac{E\delta}{1-\sigma^2}, \quad K_{1,2}\frac{K}{2}(1-\sigma), \quad D = \frac{E\delta^3}{12(1-\sigma^2)}, \quad \varepsilon_2'' = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial s} + \frac{v}{R}\right)^2.$$

Преимущество выражения (1), как отмечает Х. М. Муштари, по сравнению с другими критериями устойчивости заключается в том, что отпадает необходимость вычислять вариацию работы внешних сил.

Однако, так как выражение функционала было выведено, как это отмечает и автор, в предположении, что поверхностные силы даны независимо от деформации, то применение его к задачам устойчивости под действием сил, не удовлетворяющих этому условию, может привести к значительной погрешности. Например, если воспользоваться выражением (1), то критическая нагрузка для замкнутого кругового кольца, загруженного равномерным давлением, окажется равной



Фиг. 1

$$P = \frac{n^2 EI}{R^3}$$

вместо точного решения М. Леви

$$P = \frac{(n^2-1)EI}{R^3}$$

Рассмотрим решение этой задачи энергетическим методом. Введем в рассмотрение величины v^* и w^*, связанные согласно фиг. 1 с проекциями перемещения равенствами

$$v = v^* - \frac{w^* v^*}{R}, \qquad w = w^* + \frac{v^{*2}}{2R} \tag{2}$$

Подставляя (2) в выражения (15) и (16) работы [1], получим

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{R}\left(\frac{\partial v^*}{\partial \varphi} - w^*\right) + \frac{1}{2R^2}\left[\left(\frac{\partial w^*}{\partial \varphi}\right)^2 - 2w^*\frac{\partial v^*}{\partial \varphi}\right] \tag{3}$$

Из формулы (3) следует, что

$$\varepsilon_2'' = \frac{1}{2R^2}\left[\left(\frac{\partial w^*}{\partial \varphi}\right)^2 - 2w^*\frac{\partial v^*}{\partial \varphi}\right] \tag{4}$$

В работе В. Новожилова [2] дана вариационная формула упругой устойчивости:

$$\delta(Q) = \delta R_2^{(2)} \tag{5}$$

где $\delta R_2{}^{(2)}$ — приращение работы поверхностных сил, отвечающих второму положению равновесия.

В нашем случае работа поверхностной нагрузки после перемещений w^* и v^*

$$R_2{}^{(2)} = P\int_0^{2\pi}\left(R + \frac{\partial v^*}{\partial\varphi}\right)d\varphi\int_0^{w^*}\left(1-\frac{z}{R}\right)dz = P\int_0^{2\pi}\left(Rw + \frac{\partial v^*}{\partial\varphi}w^* - \frac{w^{*2}}{2}\right)d\varphi$$

Так как для рассматриваемой задачи

$$\int_0^{2\pi} Rw^* d\varphi = 0, \quad \text{то} \quad R_2{}^{(2)} = \frac{P}{2}\int_0^{2\pi}\left(-w^{*2} + 2w^*\frac{\partial v^*}{\partial\varphi}\right)d\varphi \tag{6}$$

Применительно к задаче об устойчивости кругового кольца

$$Q = T_{2,0}\,\varepsilon_2'' + \frac{1}{2}\frac{EI}{R^3}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial\varphi^2} + w^*\right)^2 d\varphi \tag{7}$$

Отсюда на основании уравнений (6) и (7) можно получить

$$Q - R_2{}^{(2)} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{EI}{R^3}\left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial\varphi^2} + w^*\right)^2 d\varphi - \frac{P}{2}\int_0^{2\pi}\left[\left(\frac{\partial w^*}{\partial\varphi}\right)^2 - w^{*2}\right]d\varphi \tag{8}$$

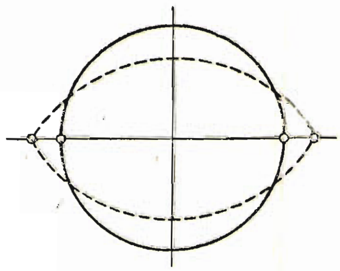
Подставляя (8) в (5) и принимая решение в виде $w^* = A\cos n\varphi$, получим решение М. Леви.

Рассмотрим другой пример. Пусть требуется определить критическую нагрузку кругового кольца с двумя шарнирами, как показано на фиг. 2. За решение для w^* примем выражение

$$w^* = A + B\cos K\varphi$$

где A определяется из условия симметрии деформации, B — уравнением (5).

Последнее дает для критической нагрузки кольца, ослабленного двумя шарнирами:



Фиг. 2

$$P = \frac{(1-K^2)^2\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2R}\sin K\pi\right] - \frac{4}{K^2\pi}(1-K^2)\sin^2\frac{K\pi}{2} + \frac{2}{K^2\pi}\sin^2\frac{K\pi}{2}}{\frac{K^2}{2}\left[\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2K}\sin K\pi\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2K}\sin K\pi\right] + \frac{2}{K^2\pi}\sin^2\frac{K\pi}{2}}\,\frac{EI}{R^3}$$

Минимум этого выражения (при $K = 1.32$) равен $P = 0.8\,EI/R^3$.

Это точно совпадает с формулой В. Ф. Сегаля [3], выведенной другим путем.

Таким образом, применение функционала (8) вместо (1) позволяет расширить круг задач по устойчивости оболочек.

Поступила 23 I 1950

ЛИТЕРАТУРА

1. Муштари Х. М. Некоторые обобщения теории тонких оболочек с приложениями к задаче устойчивости упругого равновесия. Изв. Физико-матем. общества и Научно-иссл. ин-та матем. и мех. при Казанском универ. 1938. Т. XI. Сер. 3.
2. Новожилов В. В. Основы нелинейной теории упругости. ОГИЗ. 1948.
3. Папкович П. Ф. Строительная механика корабля. Т. I. Ч. II. 1944. Стр. 268.