

ОБ ОДНОМ ЭФФЕКТИВНОМ ВАРИАНТЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ
 УПРУГОСТИ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОЙ ПОЛОСЫ

С. Е. Бирман (Ленинград)

§ 1. В нашей работе^[1] показано, что решение задачи об упругом равновесии бесконечной полосы можно получить с помощью контурно-сопряженных функций $P(z)$ и $Q(z)$, которые по заданным на контуре напряжениям определяются соотношениями

$$P(z) + iQ(z) = -\frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\zeta}{\operatorname{sh} 2a\zeta + 2a\zeta} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \zeta (t - z + ia) dt \quad (1.1)$$

$$P(z) - iQ(z) = -\frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\zeta}{\operatorname{sh} 2a\zeta - 2a\zeta} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \zeta (t - z + ia) dt \quad (1.2)$$

Соотношение (1.1) имеет место при симметричном относительно оси загрузкии полосы, соотношение (1.2) — при обратнo симметричном.

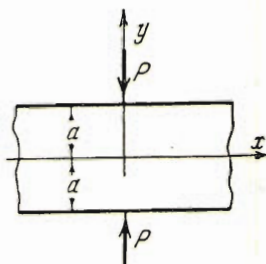
Здесь рассматривается вариант этого решения. Обратимся к примеру. Пусть полоса нагружена двумя равными обратнo направленными сосредоточенными силами P , как показано на фиг. 1. Из (1.1) имеем

$$P(z) + iQ(z) = -\frac{iP}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \zeta (z - ia) d\zeta}{\operatorname{sh} 2a\zeta + 2a\zeta} \quad (1.3)$$

Тогда^[1]

$$\Phi(z) = P(z) = -\frac{P}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sh} a\zeta \cos z\zeta d\zeta}{\operatorname{sh} 2a\zeta + 2a\zeta} \quad (1.4)$$

$$\Psi(z) = Q(z) = -\frac{P}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{ch} a\zeta \sin z\zeta d\zeta}{\operatorname{sh} 2a\zeta + 2a\zeta}$$



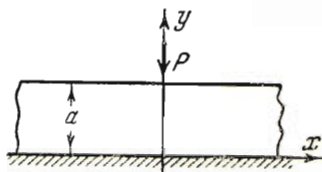
Фиг. 1

Отсюда для составляющих напряжения получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned} Y_y &= -\frac{P}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x\zeta}{\operatorname{sh} 2a\zeta + 2a\zeta} (\operatorname{sh} a\zeta \operatorname{ch} y\zeta - y\zeta \operatorname{sh} a\zeta \operatorname{sh} y\zeta + a\zeta \operatorname{ch} a\zeta \operatorname{ch} y\zeta) d\zeta \\ X_x &= -\frac{P}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x\zeta}{\operatorname{sh} 2a\zeta + 2a\zeta} (\operatorname{sh} a\zeta \operatorname{ch} y\zeta + y\zeta \operatorname{sh} a\zeta \operatorname{sh} y\zeta - a\zeta \operatorname{ch} a\zeta \operatorname{ch} y\zeta) d\zeta \\ X_y &= \frac{P}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x\zeta}{\operatorname{sh} 2a\zeta + 2a\zeta} (a\zeta \operatorname{ch} a\zeta \operatorname{sh} y\zeta - y\zeta \operatorname{sh} a\zeta \operatorname{ch} y\zeta) d\zeta \end{aligned} \quad (1.5)$$

Это решение получено было (различными путями) Файлоном^[2] и Меланом^[3]. Получение численных результатов этого решения связано с весьма трудоемкими

вычислениями. Оба автора ограничились вычислением напряжений Y_y на оси полосы, что соответствует задаче о распределении давления на несжимаемом (скальное) основании, расположенное под сжимаемым слоем грунта¹ (фиг. 2).



Фиг. 2

Чтобы получить полную картину напряженного состояния грунта, необходимо изыскать какой-либо метод существенного улучшения сходимости интегралов (1.5). При этом следует учесть, что по мере приближения к контуру трудности для вычислений возрастают вследствие разрывности заданной на контуре функции.

Эти трудности могут быть устранены, если выделить в формулах разрывную часть и представить ее в конечном виде. К такой именно форме, т. е. с выделенной разрывной частью, можно привести общее решение для бесконечной полосы, что одновременно и решает проблему улучшения сходимости квадратур.

§ 2. Перепишем (1.1) таким образом:

$$\begin{aligned}
 P(z) + iQ(z) &= -\frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\zeta}{\operatorname{sh} 2a\zeta} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \zeta(t - z + ia) dt + \\
 &+ \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2a\zeta d\zeta}{\operatorname{sh} 2a\zeta (\operatorname{sh} 2a\zeta + 2a\zeta)} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \zeta(t - z + ia) dt \\
 \text{или} \\
 P(z) + iQ(z) &= -\frac{i}{2a} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \operatorname{th} \frac{m}{2}(t - z + ia) dt + \\
 &+ \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2a\zeta d\zeta}{\operatorname{sh} 2a\zeta (\operatorname{sh} 2a\zeta + 2a\zeta)} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \zeta(t - z + ia) dt
 \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $m = \frac{\pi}{2a}$; аналогично перепишем соотношение (1.2):

$$\begin{aligned}
 P(z) + iQ(z) &= -\frac{i}{2a} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \operatorname{th} \frac{m}{2}(t - z + ia) dt - \\
 &- \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2a\zeta d\zeta}{\operatorname{sh} 2a\zeta (\operatorname{sh} 2a\zeta - 2a\zeta)} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \zeta(t - z + ia) dt
 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Соотношения (2.1), (2.2) дают решение задачи для бесконечной полосы в искомой форме. Действительно, первый член написанных выражений есть не что иное, как интеграл Шварца для бесконечной полосы². Если в формулах (2.1) или (2.2) ограничиться лишь первыми членами, то соответствующие решения дадут на контуре значение заданной разрывной функции плюс некоторый «остаток» $\varphi(x)$. Этот остаток, который представляет собой уже непрерывную функцию от x , погашают на контуре вторые члены. В самом деле, соотношения (2.1) и (2.2), написанные без первого члена, суть по существу те же формулы (1.1) и (1.2), в которых вместо $f(x)$ фигурирует непрерывная функция³

$$\varphi(x) = \frac{m}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t) dt}{\operatorname{ch}^2 [m(t-x)/2]}$$

¹ Считая грунт линейно деформируемым и пренебрегая его трением по скале.

² В этом легко убедиться, интегрируя равенство (10) работы [1].

³ Непрерывность $\varphi(x)$ следует из того, что $f(x)$ абсолютно интегрируема, а ядро $1/\operatorname{ch}^2 [m(t-x)/2]$ ограничено и непрерывно.

В этом нетрудно убедиться, внося это выражение, например, в (1.4):

$$\begin{aligned}
 & -\frac{im}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\zeta}{\operatorname{sh} 2a\zeta + 2a\zeta} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin \zeta (t - z + ia) dt \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\alpha) d\alpha}{\operatorname{ch}^2 \frac{m}{2} (\alpha - t)} = \\
 & = -\frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2a\zeta d\zeta}{(\operatorname{sh} 2a\zeta + 2a\zeta) \operatorname{sh} 2a\zeta} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha) \sin \zeta (\alpha - z + ia) d\alpha
 \end{aligned}$$

и сравнив результат с (2.1).

Появление в подинтегральных функциях дополнительного множителя $2a\zeta / \operatorname{sh} 2a\zeta$ обеспечивает быструю сходимость соответствующих интегралов в окончательных формулах.

Кроме того, как увидим ниже, эта форма общего решения позволяет получить приближенные решения в конечном виде.

§ 3. Возвращаясь к рассмотренному выше примеру, из (2.1) получим

$$P(z) + iQ(z) = -\frac{Pi}{2a} \operatorname{th} \frac{m}{2} (z - ia) + \frac{Pi}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2a\zeta \sin \zeta (z - ia) d\zeta}{\operatorname{sh} 2a\zeta (\operatorname{sh} 2a\zeta + 2a\zeta)} \quad (3.1)$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 \Phi(z) &= -\frac{P}{2a \operatorname{ch} mz} + \frac{P}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a\zeta \cos z\zeta d\zeta}{\operatorname{ch} a\zeta (\operatorname{sh} 2a\zeta + 2a\zeta)} \\
 \Psi(z) &= -\frac{P}{2a} \operatorname{th} mz + \frac{P}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a\zeta \sin z\zeta d\zeta}{\operatorname{sh} a\zeta (\operatorname{sh} 2a\zeta + 2a\zeta)}
 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Отсюда

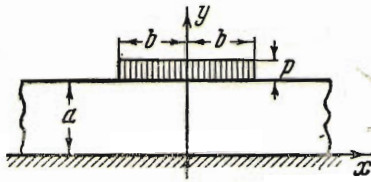
$$\begin{aligned}
 Y_y &= -\frac{P}{a} \left[\frac{\operatorname{ch} mx \cos my}{\operatorname{ch} 2mx + \cos 2my} + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{2my (\operatorname{sh}^2 mx - \cos^2 my) \operatorname{ch} mx \sin my + am (1 + \operatorname{ch} 2mx \cos 2my)}{(\operatorname{ch} 2mx + \cos 2my)^2} \right] + \\
 & \quad + \frac{P}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2a\zeta \cos x\zeta}{\operatorname{sh} 2a\zeta (\operatorname{sh} 2a\zeta + 2a\zeta)} (\operatorname{sh} a\zeta \operatorname{ch} y\zeta - y\zeta \operatorname{sh} a\zeta \operatorname{sh} y\zeta + a\zeta \operatorname{ch} a\zeta \operatorname{ch} y\zeta) d\zeta \\
 X_x &= -\frac{P}{a} \left[\frac{\operatorname{ch} mx \cos my}{\operatorname{ch} 2mx + \cos 2my} - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{2my (\operatorname{sh}^2 mx - \cos^2 my) \operatorname{ch} mx \sin my + am (1 + \operatorname{ch} 2mx \cos 2my)}{(\operatorname{ch} 2mx + \cos 2my)^2} \right] + \\
 & \quad + \frac{P}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2a\zeta \cos x\zeta}{\operatorname{sh} 2a\zeta (\operatorname{sh} 2a\zeta + 2a\zeta)} (\operatorname{sh} a\zeta \operatorname{ch} y\zeta + y\zeta \operatorname{sh} a\zeta \operatorname{sh} y\zeta - a\zeta \operatorname{ch} a\zeta \operatorname{ch} y\zeta) d\zeta \\
 X_y &= \frac{P}{a} \frac{am \operatorname{sh} 2mx \sin 2my - 2my (\operatorname{ch}^2 mx + \sin^2 my) \operatorname{sh} mx \cos my}{(\operatorname{ch} 2mx + \cos 2my)^2} - \\
 & \quad - \frac{P}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2a\zeta \sin x\zeta}{\operatorname{sh} 2a\zeta (\operatorname{sh} 2a\zeta + 2a\zeta)} (a\zeta \operatorname{ch} a\zeta \operatorname{sh} y\zeta - y\zeta \operatorname{sh} a\zeta \operatorname{ch} y\zeta) d\zeta
 \end{aligned} \quad (3.3)$$

В таком виде формулы отвечают поставленным выше требованиям и содержат приближенное решение задачи в конечном виде.

Действительно, если в формулах (3.3) отбросить интегральные члены, то, кроме сосредоточенной силы P , получим на контуре «остаток»

$$Y_y \Big|_{y=\pm a} = -\frac{Pm}{2(\operatorname{ch} mx + 1)} \quad (3.4)$$

Как известно¹, симметрично приложенные относительно оси полосы непрерывно и плавно изменяющиеся нормальные напряжения передаются через полосу, почти не изменяясь и не вызывая заметных напряжений X_x и X_y . Интегральные же члены в формулах (3.3) представляют собой решение для полосы, нагруженной напряжениями (3.4). Следовательно, ограничиваясь достаточной для практики точностью, мы можем в формулах (3.3) интегральные члены отбросить, присоединив к выражению для Y_y правую часть равенства (3.4) с обратным знаком.



Фиг. 3

Таблица 1

$\frac{x}{a}$	$(\pi a / 2P) p(x)$		
	по Файлоу	по Мелану	по форм. (3.5)
0	-1.4444	-1.4374	-1.402
$\pi / 12$	—	-1.2131	-1.178
$\pi / 6$	-0.7412	-0.7414	-0.724
$\pi / 4$	—	-0.3437	-0.346
$\pi / 3$	-0.1125	-0.1125	-0.129
$\pi / 2$	0.0300	-0.0019	0.011
$2\pi / 3$	0.0252	—	0.020
π	0.0036	—	0.006

Сравним результаты вычислений приближенного решения с результатами, вычисленными Файлоном и Меланом. Для напряжений на оси полосы имеем

$$p(x) = Y_y \Big|_{y=0} = -\frac{P}{a} \left(\frac{\operatorname{ch} mx + \pi/2}{\operatorname{ch} 2mx + 1} - \frac{\pi}{4(\operatorname{ch} mx + 1)} \right) \quad (3.5)$$

Результаты вычислений упомянутых выше авторов и соответствующие значения, вычисленные по формуле (3.5), приведены в табл. 1.

Заметим, что невыгоднейшей нагрузкой в смысле точности приближенного решения является сосредоточенная сила. Чем менее резко изменяется заданная нагрузка, тем точнее будут результаты приближенного решения.

§ 4. Рассмотрим случай, когда полоса нагружена равномерно на некотором участке $2b$ (фиг. 3). В этом случае из (1.1) получим

$$P(z) + iQ(z) = -\frac{2pi}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin b\zeta \sin \zeta(z-ia) d\zeta}{(\operatorname{sh} 2a\zeta + 2a\zeta)\zeta} \quad (4.1)$$

и выражения для напряжений могут быть написаны без выкладок по аналогии с (1.5) (заменой в этих формулах P на $2p$ и умножением подинтегральных функций на $\sin b\zeta/\zeta$). Решение этой практически важной задачи получено было К. Е. Егоровым^[5] как частный случай задачи о двухслойном основании. Им вычислены^[6] напряжения Y_y на оси y при $a/b = 1, 2$ и 5 .

Найдем решение этой же задачи при помощи соотношения (2.1) и вытекающее отсюда приближенное решение в конечном виде. Из (2.1) имеем

$$P(z) + iQ(z) = \frac{2pi}{\pi} \ln \frac{\operatorname{ch} \frac{m}{2}(b-z+ia)}{\operatorname{ch} \frac{m}{2}(b+z-ia)} + \frac{2pi}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2a \sin b\zeta \sin \zeta(z-ia) d\zeta}{\operatorname{sh} 2a\zeta (\operatorname{sh} 2a\zeta + 2a\zeta)} \quad (4.2)$$

¹ См., например, С. П. Тимошенко^[4], стр. 59, 63.

Тогда

$$\Phi(z) = -\frac{2p}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{\operatorname{sh} mb}{\operatorname{ch} mx} + \frac{p}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2a \sin b\zeta \cos z\zeta d\zeta}{\operatorname{ch} a\zeta (\operatorname{sh} 2a\zeta + 2a\zeta)}$$

$$\Psi(z) = \frac{p}{\pi} \ln \frac{\operatorname{ch} m(z-b)}{\operatorname{ch} m(z+b)} + \frac{p}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2a \sin b\zeta \sin z\zeta d\zeta}{\operatorname{sh} a\zeta (\operatorname{sh} 2a\zeta + 2a\zeta)}$$
(4.3)

Отсюда находим

$$Y_y = -\frac{p}{\pi} \left[\operatorname{arc\,tg} \frac{\operatorname{sh}^2 mb - \operatorname{sh}^2 mx - \cos^2 my}{2 \operatorname{sh} mb \operatorname{ch} mx \cos my} + \frac{\pi}{2} + \right.$$

$$+ \frac{\pi \operatorname{sh} 2mb (\operatorname{ch} 2mb + \operatorname{ch} 2mx \cos 2my)}{\operatorname{ch}^2 2mb + \operatorname{ch}^2 2mx - \sin^2 2my + 2 \operatorname{ch} 2mb \operatorname{ch} 2mx \cos 2my} -$$

$$\left. - \frac{8my \operatorname{sh} mb \operatorname{ch} mx \sin my (\operatorname{ch}^2 mb - \operatorname{ch}^2 mx + \cos^2 my)}{\operatorname{ch}^2 2mb + \operatorname{ch}^2 2mx - \sin^2 2my + 2 \operatorname{ch} 2mb \operatorname{ch} 2mx \cos 2my} \right] +$$

$$+ \frac{4ap}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sh} b\zeta \cos x\zeta}{\operatorname{sh} 2a\zeta (\operatorname{sh} 2a\zeta + 2a\zeta)} (\operatorname{sh} a\zeta \operatorname{ch} y\zeta - y\zeta \operatorname{sh} a\zeta \operatorname{sh} y\zeta + a\zeta \operatorname{ch} a\zeta \operatorname{ch} y\zeta) d\zeta$$

$$X_x = -\frac{p}{\pi} \left[\operatorname{arc\,tg} \frac{\operatorname{sh}^2 mb - \operatorname{sh}^2 mx - \cos^2 my}{2 \operatorname{sh} mb \operatorname{ch} mx \cos my} + \frac{\pi}{2} - \right.$$

$$- \frac{\pi \operatorname{sh} 2mb (\operatorname{ch} 2mb + \operatorname{ch} 2mx \cos 2my)}{\operatorname{ch}^2 2mb + \operatorname{ch}^2 2mx - \sin^2 2my + 2 \operatorname{ch} 2mb \operatorname{ch} 2mx \cos 2my} +$$

$$\left. + \frac{8my \operatorname{sh} mb \operatorname{ch} mx \sin my (\operatorname{ch}^2 mb - \operatorname{ch}^2 mx + \cos^2 my)}{\operatorname{ch}^2 2mb + \operatorname{ch}^2 2mx - \sin^2 2my + 2 \operatorname{ch} 2mb \operatorname{ch} 2mx \cos 2my} \right] +$$

$$+ \frac{4ap}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sh} b\zeta \cos x\zeta}{\operatorname{sh} 2a\zeta (\operatorname{sh} 2a\zeta + 2a\zeta)} (\operatorname{sh} a\zeta \operatorname{ch} y\zeta + y\zeta \operatorname{sh} a\zeta \operatorname{sh} y\zeta - a\zeta \operatorname{ch} a\zeta \operatorname{ch} y\zeta) d\zeta$$
(4.4)

$$X_y = \frac{p}{\pi} \frac{\pi \operatorname{sh} 2mb \operatorname{sh} 2mx \sin 2my + 8my \operatorname{sh} mb \operatorname{sh} mx \cos my (\operatorname{ch}^2 mb + \operatorname{ch}^2 mx - \cos^2 my)}{\operatorname{ch}^2 2mb + \operatorname{ch}^2 2mx - \sin^2 2my + 2 \operatorname{ch} 2mb \operatorname{ch} 2mx \cos 2my} -$$

$$- \frac{4ap}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sh} b\zeta \sin x\zeta}{\operatorname{sh} 2a\zeta (\operatorname{sh} 2a\zeta + 2a\zeta)} (a\zeta \operatorname{ch} a\zeta \operatorname{sh} y\zeta - y\zeta \operatorname{sh} a\zeta \operatorname{ch} y\zeta) d\zeta$$

Если отбросить интегральные члены, то, кроме заданной нагрузки, получим на контуре «остаток»

$$Y_y \Big|_{y=\pm a} = -\frac{p \operatorname{sh} mb}{\operatorname{ch} mb + \operatorname{ch} mx}$$
(4.5)

Следовательно, приближенное решение задачи получим, если в формулах (4.4) отбросим интегральные члены и присоединим к выражению для Y_y правую часть равенства (4.5) с обратным знаком.

Поступила 1 III 1950

ЛИТЕРАТУРА

1. Бирман С. Е. ДАН СССР. 1948. Т. 62. № 2.
2. Filon. L. N. G. Trans. Roy. Phil. Soc. 1903. Ser. A. Vol. 201.
3. Melan E. Beton und Eisen. 1919.
4. Тимошенко С. П. Теория упругости. 1937.
5. Егоров К. Е. Сб. № 10 Трудов НИС фундаментстроя. 1939.
6. Цытович Н. А. Механика грунтов. Госстройиздат. Л.—М. 1940.