Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XIV, 1950

КАЧЕСТВЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ КРИВЫХ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Н. П. Еругин
(Ленинград)

Приемы исследования, намеченные в работе автора [1], применяются к одному частному виду системы дифференциальных уравнений.

§ 1. Предварительно рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y + ay, \qquad \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y \tag{1.1}$$

где постоянные a_{ik} удовлетворяют неравенствам

$$a_{11} + a_{22} < 0, \qquad a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0 \tag{1.2}$$

т. е. характеристические числа системы (1.1) при $a = 0$ отрицательные. При каком постоянном a характеристические числа останутся отрицательными? Заменяя в последнем неравенстве a_{12} через $a_{12} + a$, получим условие отрицательности характеристических чисел системы (1.1)

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} - a_{21}a > 0 \tag{1.3}$$

Случай $a_{21} = 0$ неинтересен. Если же $a_{21} \neq 0$, то можно в дальнейшем считать $a_{21} > 0$. Поэтому из (1.3) имеем

$$a < \frac{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}{a_{21}} \tag{1.4}$$

Теперь рассмотрим уравнения

$$\frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y + f(y), \qquad \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y \tag{1.5}$$

где

$$f(y) < \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{21}}y \quad \text{при} \quad y > 0, \qquad f(y) > \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{21}}y \quad \text{при} \quad y < 0 \tag{1.6}$$

Можно, следовательно, взять

$$f(y) = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{21}}y - \alpha(y) \qquad \begin{pmatrix} \alpha(y) > 0 & \text{при} & y > 0 \\ \alpha(y) < 0 & \text{при} & y < 0 \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

Подставляя (1.7) в (1.5), имеем

$$\frac{dx}{dt} = a_{11}x + \frac{a_{11}a_{22}}{a_{21}}y - \alpha(y), \qquad \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y \tag{1.8}$$

Характеристические числа соответствующей линейной системы здесь определяются уравнением $\xi^2 - (a_{11} + a_{22})\xi = 0$, т. е. будут

$$\xi_1 = 0, \qquad \xi_2 = a_{11} + a_{22} < 0 \tag{1.9}$$

На основании (1.6) видим, что система (1.5), кроме точки (0, 0), не имеет точек равновесия. Заметим сразу, что система (1.8) по признаку Бендиксона (см [1] гл. 1) не имеет замкнутых решений, так как здесь

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = a_{11} + a_{22} < 0$$

Введем новые переменные

$$X = \frac{a_{11}y - a_{21}x}{a_{21}(a_{11} + a_{22})}, \qquad Y = \frac{a_{21}x + a_{22}y}{a_{21}(a_{11} + a_{22})} \tag{1.10}$$

$$y = a_{21}X + a_{21}Y, \qquad x = -a_{22}X + a_{11}Y \tag{1.11}$$

Тогда система (1.8) перейдет в систему

$$\frac{dY}{dt} = (a_{11} + a_{22})Y - \frac{1}{a_{11} + a_{22}}\alpha[a_{21}(X + Y)]$$

$$\frac{dX}{dt} = \frac{1}{a_{11} + a_{22}}\alpha[a_{21}(X + Y)] \tag{1.12}$$

В системе (1.8) можно отметить следующие различные случаи. Полагая $a_{11} = 0$, $a_{22} < 0$, получим

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha(y), \quad \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y \tag{1.13}$$

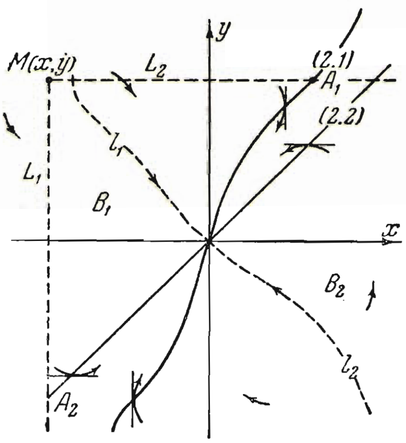
Если $a_{22} = 0$. $a_{11} < 0$, то имеем

$$\frac{dx}{dt} = a_{11}x - \alpha(y), \quad \frac{dy}{dt} = a_{21}x \tag{1.14}$$

Можно считать

$$\begin{matrix} a_{11} < 0, & a_{22} < 0 & \text{или} & a_{11} < 0 \\ a_{22} > 0 & \text{или} & a_{11} > 0, & a_{22} < 0 \end{matrix} \tag{1.15}$$

при этом уравнения остаются в виде (1.8)



Фиг. 1

§ 2. Рассмотрим сначала систему (1.8) в предположении $a_{11} < 0$, $a_{22} < 0$. Введем в рассмотрение кривую

$$a_{11}x + \frac{a_{11}a_{22}}{a_{21}}y - \alpha(y) = 0 \tag{2.1}$$

и прямую

$$a_{21}x + a_{22}y = 0 \tag{2.2}$$

На кривой (2.1) касательная к интегральной кривой параллельна оси y и на прямой (2.2) параллельна оси x. Из (2.1), (2.2) найдем

$$x = \frac{1}{a_{11}}\alpha(y) - \frac{a_{22}}{a_{21}}y, \qquad x = -\frac{a_{22}}{a_{21}}y \tag{2.3}$$

В силу предположения $a_{11} < 0$, $a_{22} < 0$ и неравенств (1.7)

$$\frac{\alpha(y)}{a_{11}} < 0 \quad \text{при} \quad y > 0, \qquad \frac{\alpha(y)}{a_{11}} > 0 \quad \text{при} \quad y < 0 \tag{2.4}$$

Легко убедиться, сравнивая правые части уравнений (2.3), что кривая (2.1) находится левее прямой (2.2) при $y > 0$, **и, наоборот, правее** прямой (2.2), когда $y < 0$. Так как принято $a_{21} > 0$ и $a_{11} < 0$, $a_{22} < 0$, то прямая (2.2) проходит в первой и третьей четвертях. Предположим еще, что

$$\frac{\alpha(y)}{a_{11}} - \frac{a_{22}}{a_{21}}y > 0 \quad \text{при} \quad y > 0, \qquad \frac{\alpha(y)}{a_{11}} - \frac{a_{22}}{a_{21}}y < 0 \quad \text{при} \quad y < 0 \tag{2.5}$$

При указанных предположениях в силу неравенств (1.7) эти неравенства возможны. Таким образом, кривая (2.1) расположена правее оси y и левее прямой (2.2), когда $y > 0$, и левее оси y, но правее прямой (2.2), когда $y < 0$. Отметим еще, что

$\frac{dx}{dt} < 0$, $\frac{dx}{dt} > 0$ Соответственно правее и левее кривой (2.1), $\frac{dy}{dt} > 0$, $\frac{dy}{dt} < 0$ Соответственно правее и левее прямой (2.2)

Все сказанное позволяет нарисовать схему поведения интегральных кривых при $t \to \infty$, представленную на фиг. 1, где стрелки показывают направление движения при $t \to \infty$. На чертеже зона, ограниченная кривой (2.1) и прямой (2.2) при $x > 0$ и $y > 0$, обозначена через A_1; зона, ограниченная этими линиями и расположенная ниже прямой (2.2) и правее кривой (2.1), через B_2; зона, ограниченная этими кривыми при $x < 0$, $y < 0$, через A_2; зона, ограниченная этими линиями и расположенная левее кривой (2.1) и прямой (2.2), через B_1.

Возьмем какую-нибудь точку $M(x, y)$ в зоне B_1 и проведем через нее прямую L_1 параллельно оси y и прямую L_2 параллельно оси x.

Рассмотрим зону B_1; здесь y убывает, а x возрастает при $t \to \infty$. Отсюда следует, что точка $M(t)$ входит в область (при увеличении t), ограниченную прямыми L_1, L_2, (2.2) и кривой (2.1). Но тогда при $t \to \infty$ точка $M(t)$ либо пересекает прямую (2.2), либо кривую (2.1), либо входит в точку (0, 0), так как других особых-точек нет. То же самое происходит в зоне B_2.

Если точка $M(t)$ входит в зону A_1 или A_2, то она, очевидно, входит в точку (0, 0) при $t \to \infty$, так как из зоны A_1 или A_2 она выйти не может и приближается безгранично к точке (0, 0). Это видно непосредственно из поля направлений. Таким образом, во всех случаях $x \to 0$ и $y \to 0$ при $t \to \infty$.

В силу теоремы 2.1, приведенной в работе [1], в зоне B_1, а также в зоне B_2 существуют движения l_1 и l_2 соответственно, входящие в точку равновесия при $t \to \infty$. Согласно примечанию к той же теореме, если $\alpha(p)$ имеет непрерывную производную в окрестности $p = 0$ и $\alpha(p) = P(p^{1+\alpha})$, где $\alpha > 0$, то в каждой зоне B_1 и B_2 имеется только одна кривая, входящая в точку (0, 0) при $t \to \infty$.

Тангенс угла, под которым могут входить движения в точку равновесия, для системы (1.8) определяется уравнением

$$a_{11}a_{22}u^2 + (a_{11} - a_{22})\, a_{21}u - a_{21}{}^2 = 0 \tag{2.6}$$

Отсюда

$$u_1 = \frac{a_{21}}{a_{11}}, \qquad u_2 = -\frac{a_{21}}{a_{22}} \tag{2.7}$$

Здесь u_1 есть тангенс угла касательной в точке (0,0) к кривым l_1, l_2. Это критическое направление, как легко видеть, не будет особым. Наоборот, u_2 есть особое критическое направление, а именно u_2 есть угловой коэффициент прямой (2.2), вдоль которой и входит бесконечное множество движений в точку равновесия при $t \to \infty$. Кривую l_2 можно получить следующим образом. Запишем уравнение соответствующее системе (1.8):

$$y = \int_0^x \frac{a_{21}x + a_{22}y}{a_{11}x + (a_{11}a_{22} / a_{21})\, y - \alpha(y)}\, dx \tag{2.8}$$

Отсюда y найдем методом последовательных приближений, принимая за первое

$$y_1 = \frac{a_{21}}{a_{11}}\, x \tag{2.9}$$

Таким образом, мы найдем границы областей, из которых движения входят в зоны A_1 и A_2. Заметим, что если $\alpha(y)$ содержит линейный член от y, то критические направления (2.7) заменяются другими. Может оказаться, что критических направлений нет, но тогда, как нетрудно показать, не будут выполнены условия (2.5) и вся качественная картина существенно изменится. Если $\alpha(y)$ не содержит линейный член от y, то в окрестности $y = 0$ условия (2.5) всегда выполнены.

§ 3. Рассмотрим возможные схемы поля направлений, соответствующие уравнениям (1.8). Предположим

$$a_{11} > 0, \qquad a_{22} < 0 \tag{3.1}$$

Прямая (2.2) здесь будет проходить в первой и третьей четвертях. Рассматривая уравнения (2.3), можно убедиться в том, что кривая (2.1) расположена правее прямой (2.2) при $y > 0$ и левее при $y < 0$. Это следует из неравенств (1.7) и предположения $a_{11} > 0$. Далее легко видеть, что

$$\frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y < 0 \qquad \text{слева от прямой (2.2)} \tag{3.2}$$

$$\frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y > 0 \qquad \text{справа от прямой (2.2)} \tag{3.3}$$

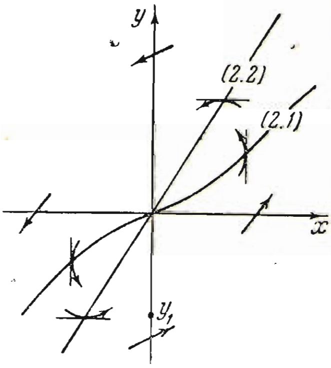
$$\frac{dx}{dt} = a_{11}x + \frac{a_{11}a_{22}}{a_{21}}\, y - \alpha(y) > 0 \qquad \text{справа от кривой (2.1)} \tag{3.4}$$

$$\frac{dx}{dt} < 0 \qquad \text{слева от кривой (2.2)} \tag{3.5}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{y=0} = \frac{a_{21}}{a_{11}} \tag{3.6}$$

Это дает схему поля направлений, представленную на фиг. 2. В точках прямой (2.2) $y(t)$ достигает минимума при $y < 0$ и максимума при $y > 0$; в точках кривой (2.1) $x(t)$ достигает максимума при $x > 0$ и минимума при $x < 0$.

Проследим за движением точки $M(t)$, пересекающей отрицательную полуось y. В силу (3.3) и (3.4) после пересечения отрицательной полуоси y в области $y < 0$ имеем



Фиг. 2

$$\frac{dy}{dt} \geqslant d > 0, \qquad y - y_1 \geqslant d(t - t_1) \tag{3.7}$$

где $y_1 < 0$ соответствует $t = t_1$.

Отсюда следует, что при некотором $t = t_2 > t_1$ будет $y = 0$, т. е. интегральная кривая обязательно пересекает ось x. После пересечения оси x при $y > 0$ имеем из уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{21}x + a_{22}y}{a_{11}(a_{21}x + a_{22}y) / a_{21} - \alpha(y)} \tag{3.8}$$

неравенство

$$\frac{dy}{dx} > \frac{a_{21}}{a_{11}} > 0 \tag{3.9}$$

Это следует из неравенств (1.7), (3.3) и условия $a_{11} > 0$.

Таким образом, интегральная кривая после пересечения точки $(x_2, 0)$ оси x расположена выше прямой

$$x = \frac{a_{11}}{a_{21}}\, y + x_2 \qquad (x_2 > 0) \tag{3.10}$$

Но прямая (3.10) пересекается с прямой (2.2) в точке с ординатой

$$y = -\frac{a_{21}x_2}{a_{11} + a_{22}} > 0$$

Здесь приняты во внимание (1.2) и условие $a_{21} > 0$.

Отсюда следует, что интегральная кривая пересекает кривую (2.1). После пересечения кривой (2.1) интегральная кривая пересекает прямую (2.2). Действительно, $y(t)$ возрастает после пересечения кривой (2.1), поэтому точка $M(t)$ не входит в начало координат при $t \to \infty$. С другой стороны, так как еще $x(t)$ убывает, то точка $M(t)$ будет оставаться в ограниченной области, если не пересекает прямой (2.2), чего быть не может, ибо, кроме (0, 0), нет точек равновесия. Утверждение доказано.

После пересечения прямой (2.2), очевидно, точка $M(t)$ или входит в точку (0, 0) при $t \to \infty$, или пересекает положительную полуось y.

Можно повторить эти рассуждения в области $x < 0$. Следовательно, имеем следующее: всякое движение, соответствующее уравнениям (1.8), при условиях (3.1) обладает одним из двух свойств:

1) точка $M(t)$ входит в точку (0, 0) при $t \to \infty$;

2) полярный угол φ точки $M(t)$ неограниченно возрастает.

§ **4**. Теперь предположим

$$a_{11} < 0, \qquad a_{22} > 0 \tag{4.1}$$

Прямая (2.2) проходит во второй и четвертой четвертях и кривая (2.1) расположена слева от прямой (2.2) при $y > 0$ и справа при $y < 0$. При этом

$$\frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y > 0 \qquad \text{справа от прямой (2.2)} \tag{4.2}$$

$$\frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y < 0 \qquad \text{слева от прямой (2.2)} \tag{4.3}$$

$$\frac{dx}{dt} = a_{11}x + \frac{a_{11}a_{22}}{a_{21}}\, y - \alpha(y) < 0 \qquad \text{справа от кривой (2.1)} \tag{4.4}$$

$$\frac{dx}{dt} > 0 \qquad \text{слева от кривой (2.1)} \tag{4.5}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{y=0} = \frac{a_{21}}{a_{11}} \tag{4.6}$$

Отсюда имеем поле направлений, представленное на фиг. 3. Пусть точка $M(t)$ пересекает отрицательную полуось y. На основании (4.3) и неравенств (1.7) из (3.8) имеем $dy / dx < a_{21} / a_{11}$ при $x > 0$ и $y < 0$ слева от прямой (2.2).

Следовательно, после пересечения отрицательной полуоси y интегральная кривая расположена выше прямой

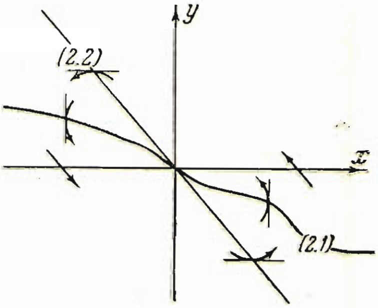
$$x = \frac{a_{11}}{a_{21}}\, y - x_0 \qquad (x_0 > 0) \tag{4.7}$$

Прямая (4.7) пересекается с прямой (2.2) в точке с ординатой

$$y_1 = \frac{a_{21}x_0}{a_{11} + a_{22}} < 0$$

Отсюда следует, что интегральная кривая пересекает прямую (2.2). После пересечения прямой (2.2) имеем

$$\frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y \geqslant d > 0$$



Фиг. 3

так как $x(t)$ и $y(t)$ возрастают. Следовательно, после пересечения прямой (2.2) будет $y - y_1 \geqslant d(t - t_1)$. Но тогда при некотором $t = t_2$ будет $y = 0$ и, следовательно, точка $M(t)$ пересекает кривую (2.1). После пересечения кривой (2.1) имеем $x(t) < x_2$, $x_2 > 0$, так как $x(t)$ достигает максимума на кривой (2.1) при $x > 0$.

Если теперь $y(t) < 0$, то интегральная кривая входит в точку $(0, 0)$. Предположим интегральная кривая пересекает ось x в точке $(x_2, 0)$. При $x > 0$, $y > 0$ на основании (4.2) и (1.7) выполняется неравенство $dy / dx > a_{21} / a_{11}$, т. е. над осью x интегральная кривая расположена ниже прямой

$$x = \frac{a_{11}}{a_{21}}\, y + x_2 \tag{4.9}$$

Но прямая (4.9) пересекает положительную полуось в точке с ординатой

$$y = -\frac{a_{21}x_2}{a_{11}} > 0$$

Следовательно, интегральная кривая пересекает положительную полуось y. Отсюда мы получаем то же заключение, которое имели при условиях (3.1). К такому же результату приходим, когда $a_{11} = 0$ или $a_{22} = 0$. Случай $a_{11} < 0$, $a_{22} < 0$ рассмотрен полностью ранее. Таким образом, имеем следующую теорему.

Теорема 1. Всякое движение, определяемое системой (1.8), обладает одним из двух свойств:

1) точка $M(t)$ входит в точку $(0, 0)$ при $t \to \infty$;

2) полярный угол φ точки $M(t)$ неограниченно возрастает.

§ 5. Рассмотрим общий случай системы (1.8), когда $\alpha(y)$ содержит линейный член от y, т. е.

$$\alpha(y) = ay - \gamma(y) \tag{5.1}$$

где

$$a > 0, \qquad \frac{\gamma(y)}{y} \to 0 \quad \text{при} \quad y \to 0 \tag{5.2}$$

При таком $\alpha(y)$ уравнения (1.8) принимают вид:

$$\frac{dx}{dt} = a_{11}x + \left(\frac{a_{11}a_{22}}{a_{21}} - a\right)y + \gamma(y), \qquad \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y \tag{5.3}$$

Характеристические числа линейной системы здесь будут

$$\xi_{1,2} = \frac{a_{11} + a_{22} \pm \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4aa_{21}}}{2} \tag{5.4}$$

На основании условий (1.2) и (5.2), так как предполагается $a_{21} > 0$, видно, что вещественные части ξ_1 и ξ_2 будут отрицательные. Следовательно, в случае (5.1) невозмущенное движение $x = 0$, $y = 0$ уравнений (1.8) будет асимптотически устойчиво. Точка (0, 0) здесь может быть и узлом и фокусом.

Предположим теперь, что $a = 0$, т. е.

$$\alpha(y) = \gamma(y) \tag{5.5}$$

где $\gamma(y)$ обладает свойством (5.2). Тогда, как мы видели, ξ_1 и ξ_2 даются равенствами (1.9). Если $\gamma(y)$ есть ряд по нечетным степеням (в силу (1.7)), то

$$\gamma(y) = by^3 + b_5y^5 + \ldots \qquad (b > 0) \tag{5.6}$$

Тогда в системе (1.12) имеем

$$\frac{1}{a_{11} + a_{22}}\alpha\left[a_{21}(X + Y)\right]_{Y=0} = \frac{ba_{21}{}^3X^3}{a_{11} + a_{22}} + \cdots \tag{5.7}$$

Здесь постоянная Ляпунова

$$g = \frac{ba_{21}{}^3}{a_{11} + a_{22}} < 0 \tag{5.8}$$

и, следовательно, по теореме Ляпунова имеет место асимптотическая устойчивость.

Пользуясь вышеизложенными методами, в частности используя полиномы Бернштейна и отсутствие замкнутых решений, можно доказать, что в случае (5.5) вообще имеет место асимптотическая устойчивость.

Используя все полученные здесь результаты, на основании теоремы 1.3 работы [1] получаем следующую теорему.

Теорема 2. Все движения, определяемые уравнениями (1.5), обладают свойством $x \to 0$ и $y \to 0$ при $t \to \infty$.

§ 6. Уточним качественную картину в окрестности точки (0, 0) для системы (1.8) в случае (5.5), когда $\alpha(y)$ не содержит линейный член от y.

По теореме 25.2 работы [1] очевидно, что для уравнений (1.8) точка (0.0) есть узел, так как в силу (1.2) здесь

$$(a - d)^2 + 4bc = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{11}a_{22} = (a_{11} + a_{22})^2 > 0$$

Из двух критических направлений, определенных формулами (2.9), u_1 есть не особое и u_2 особое. Следовательно, вдоль направления u_1 входит единственная интегральная кривая и вдоль u_2 с двух сторон входит бесконечное множество интегральных кривых.

Поступила 23 V 1950

ЛИТЕРАТУРА

1. Еругин Н. П. О некоторых вопросах устойчивости движения и качественной теории дифференциальных уравнений в целом. ПММ. 1950. Т. XIV. Вып. 5.