Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XIV, 1950

РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ ЦЕНТРА И ФОКУСА В ОДНОМ СЛУЧАЕ

Н. А. Сахарников
(Ленинград)

1. Постановка задачи. Пусть дана система уравнений

$$\frac{dx}{dt} = y + X(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = -x - Y(x, y) \tag{1.1}$$

где $X(x, y)$ и $Y(x, y)$ — однородные многочлены третьей степени относительно x и y с вещественными коэффициентами.

Этим многочленам всегда можно придать вид:

$$\begin{aligned} X(x, y) &= bx^3 + (c - \beta)x^2y + (3d - \gamma)xy^2 + fy^2 \\ Y(x, y) &= ax^3 + (3b + \alpha)x^2y + (c + \beta)xy^2 + dy^3 \end{aligned} \tag{1.2}$$

где независимые параметры a, b, c, d, f и α, β, γ будут вещественными. Этот вид функций X и Y предполагается в дальнейшем.

Известно [1], что особая точка $x = y = 0$ системы (1.1) может быть только или центром, или фокусом. Ниже приводится решение проблемы центра и фокуса для системы (1.1), т. е. дается аналитический критерий для отличения центра от фокуса.

Замечание. Если вместо переменных x и y ввести переменные x_1 и y_1, положив

$$x_1 = x\cos\varphi + y\sin\varphi, \qquad y_1 = y\cos\varphi - x\sin\varphi \tag{1.3}$$

то преобразованную систему можно записать в прежней форме, снабдив буквы $x, y, a, b, c, d, f, \alpha, \beta$ и γ индексом единица; тогда эти величины будут определяться формулами

$$\begin{aligned} a_1 &= a\cos^4\varphi + (4b + \alpha)\cos^3\varphi\sin\varphi + 2c\cos^2\varphi\sin^2\varphi + (4d - \gamma)\cos\varphi\sin^3\varphi + f\sin^4\varphi \\ b_1 &= b\cos^4\varphi + (c - a - \beta)\cos^3\varphi\sin\varphi + (3d - 3b - \alpha - \gamma)\cos^2\varphi\sin^2\varphi + \\ &\quad + (f - c - \beta)\cos\varphi\sin^3\varphi - d\sin^4\varphi \\ c_1 &= c\cos^2 2\varphi + 3\left(d - b - \frac{1}{4}(\alpha + \gamma)\right)\cos 2\varphi\sin 2\varphi + \left(\frac{3}{4}f + \frac{3}{4}a - \frac{1}{2}c\right)\sin^2 2\varphi \\ d_1 &= d\cos^4\varphi + (f - c - \beta)\cos^3\varphi\sin\varphi + (3b - 3d + \alpha + \gamma)\cos^2\varphi\sin^2\varphi + \\ &\quad + (c - a - \beta)\cos\varphi\sin^3\varphi - b\sin^4\varphi \\ f_1 &= f\cos^4\varphi + (\gamma - 4d)\cos^3\varphi\sin\varphi + 2c\cos^2\varphi\sin^2\varphi - (4b + \alpha)\cos\varphi\sin^3\varphi + a\sin^4\varphi \\ \alpha_1 &= \alpha\cos^2\varphi + 4\beta\sin\varphi\cos\varphi + \gamma\sin^2\varphi \\ \beta_1 &= \beta\cos 2\varphi + \frac{1}{4}(\gamma - \alpha)\sin 2\varphi \\ \gamma_1 &= \alpha\sin^2\varphi - 4\beta\cos\varphi\sin\varphi + \gamma\cos^2\varphi \end{aligned} \tag{1.4}$$

Установим, например, первую из этих формул. При помощи формул преобразования (1.3) из уравнений (1.1) имеем

$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{dy}{dt}\cos\varphi - \frac{dx}{dt}\sin\varphi = -x_1 - [a_1x_1^3 + (3b_1 + \alpha_1)x_1^2y_1 + (c_1 + \beta_1)x_1y_1^2 + d_1y_1^3]$$

Сравнивая коэффициенты при x_1^3, получаем выражение для a_1 через исходные параметры задачи и величину φ, т. е. первую из формул (1.4). Остальные формулы (1.4) устанавливаются аналогично. Они имеют место при произвольном φ.

Ниже мы неоднократно будем пользоваться этим замечанием.

2. План и метод решения задачи. Для того чтобы особая точка $x = y = 0$ системы (1.1) была центром, необходимо и достаточно, чтобы были равны нулю все постоянные Ляпунова [2]. Поэтому установим все возможные зависимости между параметрами системы (1.1), при которых равны нулю все постоянные Ляпунова. Рассмотрим для этого уравнение

$$(y + X)\frac{\partial u}{\partial x} - (x + Y)\frac{\partial u}{\partial y} = \left(\frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial x}\right)u \tag{2.1}$$

где X и Y — те же, что в системе (1.1). Подставим сюда вместо u ряд

$$1 + u_1(x,y) + u_2(x,y) + \cdots + u_k(x, y) + \cdots$$

где $u_k(x, y)$ — пока неопределенные однородные функции степени k относительно x и y. Приравняем между собой однородные функции равных степеней, которые при этом возникнут в обеих частях равенства (2.1). Получим бесконечную систему дифференциальных уравнений, которая может служить для последовательного определения функций $u_k(x, y)$:

$$y\frac{\partial u_k}{\partial x} - x\frac{\partial u_k}{\partial y} = H_k \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{2.2}$$

где

$$H_k \equiv 0, \qquad \text{если } k \text{ нечетное}$$

$$H_2 = \frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial x}, \qquad H_k = H_2 u_{k-2} + Y\frac{\partial u_{k-2}}{\partial y} - X\frac{\partial u_{k-2}}{\partial x}, \quad \text{если } k \text{ четное} \tag{2.3}$$

Если при некотором k функция $H_{2k}(x, y)$ представляет известный многочлен, т. е.

$$H_{2k}(x, y) = \sum_{l=0}^{2k} a_l x^{2k-l} y^l$$

то будет определенной такая функция его коэффициентов:

$$g_k = (a_0 + a_{2k})(2k - 1)!! + (a_2 + a_{2k-2})(2k - 3)!!\,1!! +$$
$$+ (a_4 + a_{2k-4})(2k - 5)!!\,3!! + \cdots \tag{2.4}$$

Известно [3], что, для того чтобы особая точка $x = y = 0$ системы (1.1) была центром, необходимо и достаточно, чтобы величины g_k были равны нулю при всех целых положительных значениях k.

Вычисление величин g_k производим в следующем порядке. Сперва находим H_2, затем g_1 по формуле (2.4). Полагаем $g_1 = 0$, находим u_2 из системы (2.2), составляем многочлен H_4 по формуле (2.3), вычисляем g_2 по формуле (2.4). Полагаем $g_2 = 0$, находим u_4, H_6, g_3 и т. д.

Замечание. Функции $u_{2m}(x, y)$ определяются системой (2.2) не единственным образом, а с точностью до слагаемого вида $G(x^2 + y^2)^m$, где G — произвольная постоянная. Но слагаемые эти не оказывают влияния на значение величин g_k, поэтому будем останавливаться на любой определенной функции $u_{2m}(x, y)$.

3. Вычисление g_1 **и** g_2. В соответствии с планом решения задачи начинаем расчет с составления функции H_2. Имеем

$$H_2 = \frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial x} = \alpha x^2 + 4\beta xy + \gamma y^2$$

По формуле (2.4) находим, что $g_1 = \alpha + \gamma$.

Если $g_1 \neq 0$, то особая точка $x = y = 0$ системы (1.1) есть фокус.

Предположим, что выполнено первое необходимое условие существования центра

$$\alpha + \gamma = 0 \tag{3.1}$$

Тогда

$$g_2 = k_2 [\alpha (a - f) + 2\beta (\alpha + 2b + 2d)]$$

где k_2 — отличная от нуля постоянная, не зависящая от параметров задачи (в таком же смысле ниже употребляются величины k_i). Предположим, что выполнено второе необходимое условие существования центра

$$\alpha (a - f) + 2\beta (\alpha + 2b + 2d) = 0 \tag{3.2}$$

Таким образом, условия (3.1) и (3.2) представляют необходимые условия существования центра для системы (1.1).

4. Разбиение задачи на четыре части. Вычисление последующих g_k произведем при некоторых частных предположениях относительно параметров α и β. А именно, рассмотрим четыре возможных случая, которыми исчерпывается задача:

$$\begin{array}{llll} \text{I.} & \alpha = 0,\ \beta = 0 & \text{III.} & \alpha = 0,\ \beta \neq 0 \\ \text{II.} & \alpha \neq 0,\ \beta = 0 & \text{IV.} & \alpha \neq 0,\ \beta \neq 0 \end{array}$$

Здесь же заметим, что случай III при условии (3.1) может быть приведен к случаю II преобразованием вращения системы xoy на угол $\varphi = \frac{1}{4}\pi$; а случай IV при условии (3.1) приводится к случаю II преобразованием вращения на угол φ, определяемый равенством

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2\beta}{\alpha} \tag{4.1}$$

Действительно, из формул (1.4) и (3.1) следует, что при таком преобразовании величина β_1 обращается в нуль, а величина α_1 будет отлична от нуля. Поэтому для полного решения задачи надо прежде всего исследовать случаи I и II.

Исследование случая I. Здесь $\alpha = 0$, $\beta = 0$ и в силу (3.1) имеем

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0 \tag{4.2}$$

При условии (4.2) особая точка $x = y = 0$ системы (1.1) есть центр.

Действительно, здесь $H_2 \equiv 0$, а поэтому система (1.1) приводится к уравнению в полных дифференциалах. Следовательно, система (1.1) допускает не зависящий от t интеграл

$$F(x, y) = 2(x^2 + y^2) + ax^4 + 4bx^3y + 2cx^2y^2 + 4dxy^3 + fy^4 \tag{4.3}$$

существование которого достаточно для существования центра вначале.

Исследование случая II. В этом случае $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$ и в силу равенств (3.1), (3.2) выполняется условие

$$\alpha \neq 0, \quad \beta = 0, \quad \alpha + \gamma = 0, \quad a = f \tag{4.4}$$

При условии (4.4) имеем

$$g_3 = k_3 \alpha (b - d) [2\alpha + 5 (b + d)]$$

Следовательно, при условии (4.4) центр можно ожидать только в двух подслучаях:

$$b - d = 0 \tag{4.5}$$

$$b - d \neq 0, \qquad 2\alpha + 5 (b + d) = 0 \tag{4.6}$$

Если выполнены условия (4.4) и (4.5), то особая точка $x = y = 0$ системы (1.1) есть центр. Действительно, здесь выполнено известное [3] достаточное условие существования центра:

$$X (y, x) = Y (x, y)$$

Если выполнены условия (4.4) и (4.6), то

$$g_4 = k_4 \alpha^2 (b - d) (3a + c)$$

Следовательно, для существования центра в нашем случае необходимо выполнение условия

$$3a + c = 0 \tag{4.7}$$

Если выполнены условия (4.4), (4.6) и (4.7) то

$$g_5 = k_5 \alpha^2 (b - d) \left[4a^2 + (b - d)^2 - \frac{(b + d)^2}{4}\right]$$

Следовательно, для существования центра в нашем случае необходимо выполнение условия

$$16a^2 + 4 (b - d)^2 = (b + d)^2 \tag{4.8}$$

Если выполнены условия (4.4), (4.6)—(4.8), то

$$g_6 = k_6 \alpha^2 (b - d)\, a\, [4a^2 + (b - d)^2]$$

Следовательно, в рассматриваемом случае центр может иметь место только при выполнении условия

$$a = 0 \tag{4.9}$$

При условиях (4.4), (4.6) — (4.9) среди параметров задачи остается только один произвольный параметр. Действительно, при этих условиях имеем

$$\begin{gathered} a = c = f = \alpha + \gamma = \beta = 0, \qquad \alpha \neq 0 \\ (b + d)^2 = 4 (b - d)^2 \qquad 2\alpha + 5 (b + d) = 0 \end{gathered} \tag{4.10}$$

Поэтому, если ввести параметр $m = \frac{1}{2} (b - d)$, то имеем только два неисследованных случая:

$$1) \quad X = m (3x^3 - 7xy^2), \qquad Y = m (- x^2y + y^3) \tag{4.11}$$

$$2) \quad X = m (- x^3 + xy^2), \qquad Y = m (7x^2y - 3y^3) \tag{4.12}$$

где m — произвольное вещественное число, отличное от нуля, потому что $\alpha \neq 0$.

Каждый из этих случаев при помощи формул (1.4) может быть приведен к случаю

$$
\begin{aligned}
X &= m(-x^3 - 5x^2y + 3xy^2 + y^3) \\
Y &= m(-x^3 - 3x^2y + 5xy^2 - y^3)
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

путем преобразования вращения на угол $\varphi = \frac{1}{4}\pi$ в первом случае и угол $\varphi = -\frac{1}{4}\pi$ во втором случае.

Докажем, что особая точка $x = y = 0$ системы (1.1) при условии (4.13) есть центр.

Заметим, что качественная картина поведения интегральных кривых нашей системы, как известно [3], не зависит от величины m. Поэтому, не нарушая общности исследования, положим $m = -1$.

Преобразуем теперь систему (1.1) к полярным координатам, положив $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Получим систему, которая после исключения t приводится к уравнению

$$
\frac{dr}{d\varphi} = -\frac{r^3 A(\varphi)}{1 + r^2 B(\varphi)}
\tag{4.14}
$$

где

$$
A(\varphi) = X(\cos\varphi, \sin\varphi)\cos\varphi - Y(\cos\varphi, \sin\varphi)\sin\varphi
$$

$$
B(\varphi) = X(\cos\varphi, \sin\varphi)\sin\varphi + Y(\cos\varphi, \sin\varphi)\cos\varphi
$$

Принимая во внимание условие (4.13), имеем

$$
A(\varphi) = 2\sin 2\varphi + \cos 4\varphi, \qquad B(\varphi) = \cos 2\varphi + \sin 4\varphi
$$

Если умножить обе части равенства (4.14) на $2r$ и обозначить $\rho = r^2$, $\psi = 2\varphi$, то получим

$$
\frac{d\rho}{d\psi} = -\frac{\rho^2 A(\psi/2)}{1 + \rho B(\psi/2)}
\tag{4.15}
$$

Относительно уравнения вида (4.15), где A и B — многочлены степени n относительно $\cos\psi$ и $\sin\psi$, М. И. Альмухамедов [4] доказал теорему о том, что задача об отличии центра от фокуса всегда может быть решена до конца проверкой известного конечного числа условий. А именно, если равны нулю первые $4n-2$ постоянные Ляпунова, то будут равны нулю и все остальные постоянные Ляпунова.

В уравнении (4.15) $n = 2$, поэтому $4n - 2 = 6$. Для уравнений (4.14), (4.15) и системы (1.1) при условии (4.13) постоянные Ляпунова соответственно равны

$$
F_{2i}(0) - F_{2i}(2\pi)
$$

где $F_{2i}(\varphi)$ — коэффициенты разложения интеграла по степеням r, т. е.

$$
r^2 + r^4 F_4(\varphi) + r^6 E_6(\varphi) + \ldots
$$

А для системы (1.1) при условии (4.13) первые шесть постоянных Ляпунова равны нулю. Следовательно, особая точка $x = y = 0$ этой системы есть центр.

Итак, в случае II особая точка $x = y = 0$ системы (1.1) есть центр только при выполнении условий (4.4) и (4.5) или (4.10).

Замечание. Система (1.1) при условии (4.13) была предметом более ранних исследований. М. И. Альмухамедов [5] рассмотрел систему

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y + b_{03}\,y^3 + b_{21}\,x^2 y + c\,(x^3 - 3xy^2) \\ \frac{dy}{dt} &= -x + c_{30}\,x^3 + c_{12}\,xy^2 + c\,(y^3 - 3x^2 y) \end{aligned} \tag{4.16}$$

при условии $c \neq 0, b_{21} + c_{12} \neq 0$ и пришел к выводу, что

$$g_4 = c\,(b_{21} + c_{12})^2\,(b_{21} + b_{03} + 4c_{30})$$

$$g_5 = c\,(b_{21} + c_{12})^2\,[12c^2 + 388\,(b_{03} + c_{30})^2 + 85\,b_{03}\,c_{30}]$$

и что, следовательно, для системы (1.1) при условии (4.13), когда $c = 1$, $b_{03} = c_{30} = -1$, $b_{21} = c_{12} = 5$, величина $g_5 \neq 0$ и что особая точка $x = y = 0$ является фокусом.

В вычисления постоянных Ляпунова, произведенных М. И. Альмухамедовым для системы (4.16), вкралась ошибка. В действительности для этой системы имеем

$$g_4 = c\,(b_{21} + c_{21})^2\,(b_{21} - c_{12} + 3b_{03} - 3c_{30})$$

$$g_5 = c\,(b_{21} + c_{12})\,(b_{03} + c_{30})\,(c^2 - b_{03}\,c_{30})$$

Поэтому для системы (1.1) при условии (4.13) величина $g_5 = 0$. Выше доказано, что для этой системы все постоянные Ляпунова равны нулю, а начало координат является центром.

Исследование случая III, т. е. когда $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$. Выше доказано, что случай III может быть приведен к случаю II при помощи преобразования вращения на угол $\varphi = \frac{1}{4}\pi$. Поэтому и на основании случая II заключаем, что в случае III особая точка $x = y = 0$ системы (1.1) есть центр только при выполнении одного из двух условий:

$$1) \quad \alpha_1 \neq 0. \qquad \beta_1 = \alpha_1 + \gamma_1 = a_1 - f_1 = b_1 - d_1 = 0 \tag{4.17}$$

$$2) \quad \alpha_1 \neq 0, \qquad a_1 = c_1 = f_1 = \alpha_1 + \gamma_1 = \beta_1 = 0 \tag{4.18}$$

$$(b_1 + d_1)^2 = 4\,(b_1 - d_1)^2, \qquad 2\alpha_1 + 5\,(b_1 + d_1) = 0$$

в которых параметры определяются формулами (1.4) при $\varphi = \frac{1}{4}\pi$.

Условие (4.17), выраженное через исходные параметры задачи, имеет вид:

$$\alpha = \gamma = b = d = 0 \tag{4.19}$$

Действительно, в случае III в силу формул (1.4) при $\varphi = \frac{1}{4}\pi$ имеем $\alpha_1 = 2\beta \neq 0$, $\beta_1 = 0$. Условие $a_1 = f_1$ равносильно равенству $b + d = 0$, а условие $b_1 = d_1$ — равенству $b - d = 0$. Отсюда следует условие (4.19).

Это очевидное достатоточное условие существования центра имеется в трудах Ляпунова, Пуанкаре и в работах М. И. Альмухамедова.

Условие (4.18), выраженное через исходные параметры, имеет вид:

$$\alpha = \gamma = c = a + f = b + d = 5a + \beta = a^2 - b^2 = 0 \tag{4.20}$$

В этом можно убедиться опять при помощи формул (1.4).

Исследование случая IV, т. е. когда $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$. Выше доказано, что исследование случая IV может быть приведено к исследованию случая II при помощи преобразования вращения на угол φ, определяемый равенством (4.1). Поэтому и на основании результата, полученного при исследовании случая II, заключаем, что в случае IV особая точка

$x=y=0$ системы (1.1) есть центр только при выполнении условий (4.17) или (4.18), в которых параметры определяются формулами (1.4), а φ определяется (4.1). Условие (4.17) здесь равносильно следующему:

$$2(b-d)k^2+(a+f-2c)k-2(b-d)=0 \tag{4.21}$$

где

$$k=\frac{2\beta}{\alpha}=\frac{f-a}{\alpha+2b+2d}, \qquad \alpha+\gamma=0$$

Условие (4.18) здесь равносильно совокупности следующих равенств:

$$\alpha+\gamma=0, \qquad 3(a+f)+2c=0, \qquad \alpha(a-f)+2\beta(\alpha+2b+2d)=0$$

$$\alpha[2\alpha+5(b+d)]=\beta[2\beta+5(a-f)], \qquad c(\alpha^2-4\beta^2)=6\alpha\beta(b-d)$$

$$(\alpha^2+4\beta^2)^3=25[(b-d)(\alpha^2-4\beta^2)-4\alpha\beta(\alpha+f)]^2 \tag{4.22}$$

В этом можно убедиться при помощи формул (1.4).

5. Объединение результатов исследования. Выше было показано, что особая точка $x=y=0$ системы (1.1) является центром только при выполнении следующих условий:

в случае I: $\alpha=0, \quad \beta=0$ при условии (4.2)

в случае II: $\alpha\neq 0, \quad \beta=0$ при условии (4.4)—(4.5) или (4.10)

в случае III: $\alpha=0, \quad \beta\neq 0$ при условии (4.19) или (4.20)

в случае IV: $\alpha\neq 0, \quad \beta\neq 0$ при условии (4.21) или (4.22)

Условие (4.21) и (4.22) выведены, конечно, в предположении, что $\alpha\neq 0$ и $\beta\neq 0$. Если положить в них $\beta=0$, то из условия (4.21) получим условие (4.4) — (4.5), а из условия (4.22) — условие (4.10). Если в условии (4.22) положить $\alpha=0$, то получим условие (4.20). Поэтому, если считать допустимыми в формуле (4.22) нулевые значения α и β, а формулу (4.21) распространить также и на нулевое значение β, то условия (4.4)—(4.5), (4.10) и (4.20) будут содержаться в условиях (4.21) и (4.22).

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема. Для того чтобы особая точка $x=y=0$ системы (1.1) при условии (1.2) была центром, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих четырех условий:

1) $$\alpha=\beta=\gamma=0 \tag{5.1}$$

2) $$\alpha=\gamma=b=d=0 \tag{5.2}$$

3) $$2(b-d)k^2+(a+f-2c)k-2(b-d)=0$$
$$\alpha+\gamma=0 \qquad \left(k=\frac{2\beta}{\alpha}=\frac{f-a}{\alpha+2b+2d}\right) \tag{5.3}$$

4) $$\alpha+\gamma=0, \ \alpha(a-f)+2\beta(\alpha+2b+2d)=0$$
$$3(a+f)+2c=0, \qquad c(\alpha^2-4\beta^2)=6\alpha\beta(b-d) \tag{5.4}$$
$$\alpha[2\alpha+5(b+d)]=\beta[2\beta+5(a-f)]$$
$$(\alpha^2+4\beta^2)^3=25[(b-d)(\alpha^2-4\beta^2)-4\alpha\beta(a+f)]^2$$

Если ни одно из этих условий не выполнено, то имеет место фокус.

Следствие 1. Из вышеизложенного следует, что для системы (1.1) равенство нулю первых шести постоянных Ляпунова обеспечивает равенство нулю всех остальных постоянных Ляпунова.

Следствие 2. Из вышеизложенного следует, что для того чтобы особая точка $x = y = 0$ системы (1.1) была центром, необходимо и достаточно, чтобы система (1.1) или обладала одним из трех свойств:

$$1) \qquad \partial X / \partial x = \partial Y / \partial y \tag{5.5}$$

$$2) \qquad X(y, x) = Y(x, y) \tag{5.6}$$

$$3) \qquad X(y, x) = -Y(x, y), \ X(x, y) = m(x^3 + 5x^2y - 3xy^2 - y^3) \tag{5.7}$$

(где m — отличное от нуля произвольное вещественное число), или могла быть проведена путем преобразования вращения вокруг начала координат к такой системе, которая обладает одним из этих свойств.

При этом надо иметь в виду, что если система (1.1) обладает первым свойством, то в результате преобразования вращения мы получим систему, которая будет обладать первым свойством относительно новых переменных.

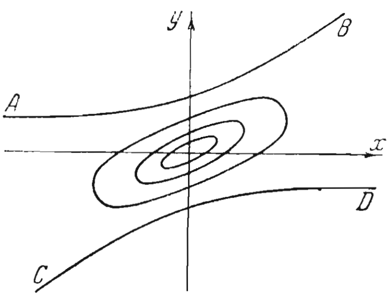
Если система (1.1) обладает свойством (5.5) или (5.6), то преобразованная система может не обладать соответствующими свойствами:

$$X_1(y_1, x_1) = Y_1(x_1, y_1) \quad \text{или} \quad X_1(y_1, x_1) = -Y_1(x_1, y_1)$$

6. Анализ полученных результатов. 1. Если система (1.1) удовлетворяет условию (5.5), то вблизи особой точки $x = y = 0$ все траектории представляют алгебраические кривые, так как система допускает интеграл вида (4.3).

2. Если система (1.1) удовлетворяет условию (5.6), то поле траекторий симметрично относительно прямой, проходящей через особую точку.

3. Если система (1.1) удовлетворяет условию (5.7), то качественная картина поведения траекторий указана на фиг. 1. В этом случае область замкнутых траекторий ограничена двумя траекториями AB и CD, каждая из которых обеими ветвями будет уходить в бесконечность.



Фиг. 1

4. Если система (1.1) удовлетворяет условию (5.5), (5.6) или (5.7) после преобразования вращения, то свойства траекторий, указанные в трех предшествующих пунктах, соответственно сохраняются.

5. Во всех случаях центра траектории симметричны относительно начала координат. Это непосредственно следует из нечетности правых частей данной системы (1.1) относительно переменных x и y.

Поступила 23 V 1950

ЛИТЕРАТУРА

1. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. ОГИЗ. 1949.
2. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. ОНТИ. 1935.
3. Сахарников Н. А. Об условиях существования центра и фокуса. ПММ. 1950. Т. XIV. Вып. 5.
4. Альмухамедов М. И. Об устойчивых и неустойчивых центрах. Автореферат диссертации. КГУ им. В. И. Ульянова-Ленина.
5. Альмухамедов М. И. Известия физико-математического общества при Казанском университете. 1937. Т. IX. Сер. 3.