Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XIV, 1950

О СПЕКТРЕ ХАРАКТЕРИСТИЧНЫХ ЧИСЕЛ

К. П. Персидский
(Алма-Ата)

1. Рассмотрим счетную систему линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1} x_1 + p_{s2} x_2 + \cdots + p_{sn} x_n + \cdots \qquad (s = 1, 2, \ldots) \qquad (1.1)$$

где $p_{sk} = p_{sk}(t)$— вещественные или комплексные функции, непрерывные при $t \geqslant 0$. Будем полагать, что при $t \geqslant 0$ выполняются условия

$$p_s(t) = |p_{s1}| + |p_{s2}| + \cdots + |p_{sn}| + \cdots \leqslant p(t) \qquad (s = 1, 2, \ldots) \qquad (1.2)$$

где $p_s(t)$ и $p(t)$ непрерывны[1] при $t \geqslant 0$.

Точкой рассматриваемого здесь счетномерного пространства величин $t, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ будем далее называть любую совокупность чисел $(t_0, x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots, x_n^\circ, \ldots)$, в которой $t \geqslant 0$, а $x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots$—вещественные или комплексные числа, удовлетворяющие неравенству

$$\sup [|x_1^\circ|, |x_2^\circ|, \ldots, |x_n^\circ|, \ldots] < \infty$$

Пусть

$$x_1 = x_1(t), \quad x_2 = x_2(t), \ldots, x_n = x_n(t), \ldots \qquad (1.3)$$

есть счетная система функций, непрерывных при $t \geqslant 0$. Систему функций (1.3) будем называть ограниченной, если для любого наперед заданного сегмента $[0, \alpha]$ существует такое конечное число N_α, что

$$\sup [|x_1(t)|, |x_2(t)|, \ldots] \leqslant N_\alpha \qquad \text{при } t \subset [0, \alpha]$$

Систему функций (1.3) будем называть решением системы (1.1), проходящим через точку $(t_0, x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots)$, если $x_1(t_0) = x_1^\circ$, $x_2(t_0) = x_1^\circ, \ldots$ и если при всех значениях $t \geqslant 0$ функции (1.3) имеют производные, удовлетворяющие условию

$$\frac{dx_s(t)}{dt} = p_{s1} x_1(t) + p_{s2} x_2(t) + \cdots \qquad (s = 1, 2, \ldots)$$

причем если система функций (1.3) ограничена, то это решение будем называть ограниченным.

---

[1] Вместо условия непрерывности функций $p_s(t)$ можно потребовать непрерывности по t правых частей уравнений (1.1) в каждой точке $(t, x_1, x_2, \ldots)$ рассматриваемого пространства (см. статьи [1, 2]). В работах [3, 4] эти требования по моему недосмотру не указаны относительно рассматриваемых там линейных систем уравнений вида (1.1).

Легко видеть, что через любую наперед заданную точку $(t_0, x_1^\circ, x_2^\circ, ..)$ проходит единственное ограниченное решение системы (1.1); причем ограниченное решение этой системы уравнений будет и равностепенно непрерывным, а производные $x_s'(t)$ $(s = 1, 2, \ldots)$ будут непрерывны при $t \geqslant 0$.

Заметим, что счетная система дифференциальных уравнений, в частном случае система (1.1), может иметь и неограниченные (не равностепенно непрерывные) решения [1]; такие решения здесь не будут рассматриваться.

Пусть (1.3) есть решение системы (1.1). Рассмотрим функцию

$$x(t) = \sup\left[\,|x_1(t)|, |x_2(t)|, \ldots\right] \tag{1.4}$$

которую в дальнейшем будем называть нормой рассматриваемого решения.

Легко показать, что норма решения удовлетворяет неравенству [3]

$$x(t_0) \exp\left\{-\int_{t_0}^{t} p(t)\,dt\right\} \leqslant x(t) \leqslant x(t_0) \exp\left\{+\int_{t_0}^{t} p(t)\,dt\right\} \quad (t \geqslant t_0 \geqslant 0) \tag{1.5}$$

Отсюда, если допустить, что $p(t)$ ограничена, т. е. $p(t) \leqslant a < \infty$ при любом $t \geqslant 0$, то тогда

$$x(t_0)\, e^{-a(t-t_0)} \leqslant x(t) \leqslant x(t_0)\, e^{a(t-t_0)} \qquad (t \geqslant t_0 \geqslant 0) \tag{1.6}$$

или

$$x(t_0)\, e^{-a\,|t-t_0|} \leqslant x(t) \leqslant x(t_0)\, e^{a\,|t-t_0|} \qquad (t \geqslant 0) \tag{1.7}$$

Для дальнейшего необходима следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть*

$$\begin{array}{llll}
x_1 = x_{11}(t), & x_2 = x_{21}(t), & \ldots, & x_n = x_{n1}(t), \ \ldots \\
x_1 = x_{12}(t), & x_2 = x_{22}(t), & \ldots, & x_n = x_{n2}(t), \ \ldots \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\
x_1 = x_{1g}(t), & x_2 = x_{2g}(t), & \ldots, & x_n = x_{ng}(t), \ \ldots \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

есть счетное число решений системы (1.1). *Допустим, что при некотором значении* $t = t_0 \geqslant 0$ *имеют место неравенства*

$$|x_{s1}(t_0)| + |x_{s2}(t_0)| + \cdots + |x_{sg}(t_0)| + \cdots \leqslant \beta \qquad (s = 1, 2, \ldots)$$

где β — *некоторое конечное число.*

Пусть $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ — *любые вещественные или комплексные числа, удовлетворяющие условию*

$$\sup\left[\,|c_1|, |c_2|, \ldots\right] = c < \infty$$

Тогда система функций

$$\begin{array}{l}
x_1 = c_1 x_{11}(t) + c_2 x_{12}(t) + \cdots \\
x_2 = c_1 x_{21}(t) + c_2 x_{22}(t) + \cdots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_n = c_1 x_{n1}(t) + c_2 x_{n2}(t) + \cdots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

есть решение системы уравнений (1.1), *причем эти ряды можно почленно дифференцировать.*

Для ясности дадим доказательство этой леммы, хотя оно и аналогично доказательству одной, ранее указанной теоремы [5].

Действительно, функции

$$x_s = x_s{}^{(m)}t = \sum_{g=1}^{m} c_s\, x_{sg}(t) \qquad (s = 1,2,\ldots)$$

определяют решение системы (1.1). Норма $x^{(m)}(t)$ этого решения при $t = t_0$ удовлетворяет неравенству $x^{(m)}(t_0) \leqslant c\beta$.

Отсюда на основании (1.5) имеем

$$x^{(m)}(t) \leqslant x^{(m)}(t_0) \exp \int_{t_0}^{t} p(t)\, dt \leqslant c\beta \exp \int_{t_0}^{t} p(t)\, dt \tag{1.8}$$

при любом $t \geqslant t_0$. Отсюда

$$|x_s{}^{(m)}(t)| = |c_1 x_{s1}(t) + \cdots + c_m x_{sm}(t)| \leqslant c\beta \exp \int_{t_0}^{t} p(t)\, dt \quad (s = 1, 2, \ldots) \tag{1.9}$$

Дадим числу s в (1.9) какое-либо определенное значение, а также зафиксируем значение числа t. Тогда, не изменяя абсолютных значений величин $c_1, c_2, \ldots$, можно их аргументы подобрать так, что при указанных значениях величин s и t будем иметь

$$c_g\, x_{sg}(t) \geqslant 0 \qquad (g = 1, \ldots, m)$$

Тогда на основании (1.9) будем иметь

$$|c_1 x_{s1}(t) + \cdots + c_m x_{sm}(t)| = |c_1 x_{s1}(t)| + \cdots + |c_m x_{sm}(t)| =$$

$$= |c_1||x_{s1}(t)| + \cdots + |c_m||x_{sm}(t)| \leqslant c\beta \exp \int_{t_0}^{t} p(t)\, dt$$

Если положим $|c_1| = \cdots = |c_m| = c$, то тогда

$$|x_{s1}(t)| + \cdots + |x_{sm}(t)| \leqslant \beta \exp \int_{t_0}^{t} p(t)\, dt \tag{1.10}$$

Так как выбор величин s и t был произволен, то неравенство (1.10) имеет место при любом $s = 1, 2, \ldots$ и любом $t \geqslant t_0$. На основании (1.10) получаем

$$|x_s{}^{(m)}(t)| \leqslant \sum_{g=1}^{m} |c_g||x_{sg}(t)| \leqslant c\beta \exp \int_{t_0}^{t} p(t)\, dt \qquad (s = 1,2,\ldots) \tag{1.11}$$

Положим

$$x_s = c_1 x_{s1}(t) + c_2 x_{s2}(t) + \cdots + c_m x_{sm}(t) + \cdots \qquad (s = 1,2,\ldots)$$

и пусть $x(t) = \sup[|x_1|, |x_2|, \ldots]$. Тогда на основании (1.11) получаем

$$|x_s| \leqslant |c_1||x_{s1}(t)| + \cdots + |c_m||x_{sm}(t)| + \cdots \leqslant c\beta \exp \int_{t_0}^{t} p(t)\, dt \quad (s = 1, 2, \ldots)$$

$$x(t) \leqslant c\beta \exp \int_{t_0}^{t} p(t)\, dt \tag{1.12}$$

Имеем

$$\sum_{g=1}^{m} c_g\, x'_{sg}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} p_{sh} \sum_{g=1}^{m} c_g\, x_{kg}(t)$$

Отсюда

$$\left|\sum_{g=1}^{m} c_g x_{sg}'(t)\right| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \left|p_{sk}\right| \sum_{g=1}^{m} |c_g x_{kg}(t)| \leqslant p(t)\, c\beta \exp \int_{t_0}^{t} p(t)\, dt$$

Отсюда аналогично неравенству (1.12) получаем

$$\sum_{g=1}^{\infty} |c_g|\, |x_{sg}'(t)| \leqslant p(t)\, c\beta \exp \int_{t_0}^{t} p(t)\, dt \qquad (s = 1, 2, \ldots) \tag{1.13}$$

Следовательно, ряд

$$\sum_{g=1}^{\infty} c_g x_{sg}'(t) \qquad (s = 1, 2, \ldots)$$

абсолютно сходится и этот ряд на основании (1.13) можно почленно интегрировать. Имеем

$$\sum_{g=1}^{\infty} c_g x_{sg}'(t) = \lim_{m\to\infty} \sum_{g=1}^{m} c_g x_{sg}'(t) = \lim_{m\to\infty} \sum_{g=1}^{m} c_g \left(\sum_{k=1}^{\infty} p_{sk} x_{kg}(t)\right)$$

Следовательно, ряд

$$\sum_{g=1}^{\infty} c_g \left(\sum_{k=1}^{\infty} p_{sk} x_{kg}(t)\right)$$

сходится и его сумма равна

$$\sum_{g=1}^{\infty} c_g x_{sg}'(t)$$

Зафиксируем числа s и t. Тогда для любого наперед заданного числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $N = N(\varepsilon)$, что

$$\sum_{k \geqslant N}^{\infty} |p_{sk}| < \varepsilon$$

Найдется такое число $l = l(\varepsilon)$, что

$$\sum_{g \geqslant l}^{\infty} |c_g|\, |x_{kg}(t)| < c\varepsilon \qquad (k = 1, 2, \ldots N)$$

Пусть $m \geqslant l$, тогда

$$\sum_{g=1}^{m} c_g x_{sg}'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} p_{sk} \sum_{g=1}^{m} c_g x_{kg}(t) =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} p_{sk} \sum_{g=1}^{m} c_g x_{kg}(t) + \sum_{k=N+1}^{\infty} p_{sk} \sum_{g=1}^{m} c_g x_{kg}(t) =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} p_{sk} \sum_{g=1}^{\infty} c_g x_{kg}(t) + \sum_{k=N+1}^{\infty} p_{sk} \sum_{g=1}^{m} c_g x_{kg}(t) - \sum_{k=1}^{N} p_{sk} \sum_{g=m+1}^{\infty} c_g x_{kg}(t)$$

Так как

$$|p_{sk}|\left|\sum_{g=1}^{\infty} c_g x_{kg}(t)\right| \leqslant |p_{sk}|\, c\beta \exp\int_{t_0}^{t} p(t)\,dt$$

то ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_{sk}\left(\sum_{g=1}^{\infty} c_g x_{kg}(t)\right)$$

сходится и его сумма не более чем

$$c\beta\, p(t) \exp\int_{t_0}^{t} p(t)\,dt$$

Имеем

$$|a_1| = \left|\sum_{k=N+1}^{\infty} p_{sk} \sum_{g=1}^{\infty} c_g x_{kg}(t)\right| < \varepsilon c\beta \exp\int_{t_0}^{t} p(t)\,dt = \gamma_1$$

$$|a_2| = \left|\sum_{k=1}^{N} p_{sk} \sum_{g=m+1}^{\infty} c_g x_{kg}(t)\right| < \varepsilon c \sum_{k=1}^{N} |p_{sk}| \leqslant \varepsilon c p(t) = \gamma_2$$

$$|a_3| = \left|\sum_{k=N+1}^{\infty} p_{sk} \sum_{g=1}^{m} c_g x_{kg}(t)\right| < \gamma_1$$

Следовательно,

$$J = \sum_{k=1}^{\infty} p_{sk}\left(\sum_{g=1}^{\infty} c_g x_{kg}(t)\right) - \sum_{g=1}^{m} c_g x'_{sg}(t) = a_1 + a_2 - a_3$$

стремится к нулю при $m \to \infty$, т. е

$$\sum_{g=1}^{\infty} c_g x'_{sg}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} p_{sk}\left(\sum_{g=1}^{\infty} c_g x_{kg}(t)\right)$$

Так как выбор величин s и t был произволен, то предыдущее равенство имеет место при любом $s = 1, 2, \ldots$ и любом $t \geqslant 0$.

Тем самым доказано, что

$$\sum_{g=1}^{\infty} c_g x'_{sg}(t) = \sum_{g=1}^{\infty} c_g\left(\sum_{k=1}^{\infty} p_{sk} x_{kg}(t)\right) = \sum_{k=1}^{\infty} p_{sk}\left(\sum_{g=1}^{\infty} c_g x_{kg}(t)\right) \tag{1.14}$$

Имеем на основании (1.14)

$$\int_{t_0}^{t}\left(\sum_{k=1}^{\infty} p_{sk} \sum_{g=1}^{\infty} c_g x_{kg}(t)\right)dt = \int_{t_0}^{t}\left(\sum_{g=1}^{\infty} c_g x_{sg}'(t)\right)dt =$$

$$= \sum_{g=1}^{\infty} c_g \int_{t_0}^{t} x_{sg}'(t)\,dt = \sum_{g=1}^{\infty} c_g x_{sg}(t) - \sum_{g=1}^{\infty} c_g x_{sg}(t_0) \qquad (s = 1, 2, \ldots)$$

Следовательно,

$$x_s(t) = \sum_{g=1}^{\infty} c_g x_{sg}(t) \qquad (s = 1, 2, \ldots) \tag{1.15}$$

есть решение системы интегральных уравнений

$$x_s = \gamma_s + \int_{t_0}^{t} \Big(\sum_{h=1}^{\infty} p_{sk} x_k \Big) dt \qquad (s = 1, 2, \ldots) \tag{1.16}$$

где положено

$$\gamma_s = \sum_{g=1}^{\infty} c_g x_{sg}(t_0) \qquad (s = 1, 2, \ldots)$$

На основании (1.2), (1,12) и (1.16) следует, что функции (1.15) равностепенно непрерывны по переменному t. Отсюда и на основании (1.2) следует непрерывность по t функций

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_{sk} x_k(t) \qquad (s = 1, 2, \ldots)$$

Отсюда и на основании (1.16) получаем

$$\Big(\sum_{g=1}^{\infty} c_g x_{sg}(t) \Big)' = \sum_{k=1}^{\infty} p_{sk} \sum_{g=1}^{\infty} c_g x_{sg}(t) \tag{1.17}$$

На основании (1.14) и (1.17) получаем

$$\Big(\sum_{g=1}^{\infty} c_g x_{sg}(t) \Big)' = \sum_{g=1}^{\infty} c_g x_{sg}'(t) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} p_{sk} \sum_{g=1}^{\infty} c_g x_{kg}(t) = \sum_{g=1}^{\infty} c_g \sum_{k=1}^{\infty} p_{sk} x_{kg}(t) \qquad (s = 1, 2, \ldots) \tag{1.18}$$

что и доказывает лемму.

2. Пусть (1.3) есть решение системы (1.1), проходящее через какую-либо точку $(t_0, x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots)$. Характеристичным числом этого решения назовем[2] характеристичное число (в смысле Ляпунова[6]), его нормы, т. е. функции $x(t)$. Заметим, что характеристичное число функции $x(t) = \sup[|x_1(t)|, |x_2(t)|, \ldots]$ будет не более (может быть и менее) нижней грани характеристичных чисел функций $|x_1(t)|, |x_2(t)|, \ldots$.

В дальнейшем будем полагать, что функция $p(t)$ ограниченна, т. е. $p(t) \leqslant a < \infty$ при любом $t \geqslant 0$.

Тогда из (1.6) следует, что любое решение системы уравнений (1,1) (отличное от тривиального решения $x_1 = x_2 = \cdots = 0$) имеет конечное характеристичное число α, удовлетворяющее неравенству $|\alpha| \leqslant a$.

Обозначим через S множество всех решений системы уравнений (1.1), отличных от тривиального решения $x_1 = x_2 = \cdots = 0$. Пусть σ есть множество характеристичных чисел решений, принадлежащих множеству S. Очевидно, что $\sigma \subset [-a, +a]$.

В дальнейшем множество σ будем называть спектром характеристичных чисел системы уравнений (1.1).

Так как система (1.1) линейная и однородная, то легко видеть, что σ есть множество характеристичных чисел всех тех решений системы

(1.1), у которых начальные значения $x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots, x_n^\circ, \ldots$ при некотором фиксированном начальном значении $t = t_0 \geqslant 0$ удовлетворяют условию

$$\sup [|x_1^\circ|, |x_2^\circ|, \ldots, |x_n^\circ|, \ldots] = 1$$

Пусть α есть характеристичное число решения (отличного от тривиального) системы (1.1). Тогда на основании определения характеристичного числа функции следует, что для любого наперед заданного числа $\varepsilon > 0$ функция

$$x(t)\, e^{(\alpha-\varepsilon)\, t}$$

стремится к нулю при $t \to \infty$, а функция

$$x(t)\, e^{(\alpha+\varepsilon)\, t}$$

будет неограниченной при $t \to \infty$.

Следовательно, если $\alpha > 0$, то рассматриваемое решение системы (1.1) будет стремиться равностепенно к нулю при $t \to \infty$; если $\alpha < 0$, то указанное решение будет неограниченным при $t \to \infty$.

Если бы система (1.1) была конечной, состоящей из n уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}\, x_1 + \cdots + p_{sn}\, x_n \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

то спектр ее характеристичных чисел состоял бы, как показал Ляпунов[6], из конечного числа точек $m \leqslant n$.

Спектр счетной системы уравнений (1.1) может быть конечным, счетным и несчетным множеством точек. Например[3], спектр системы уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = x_{s+1} \qquad (s = 1, 2, \ldots)$$

есть сегмент $[-1, +1]$.

Характеристичное число решения (1.3) системы (1.1) определяется поведением его нормы $x(t)$ при $t \to \infty$ и, следовательно, не зависит от значений нормы на каком-либо конечном интервале $(0, t_0)$. Отсюда легко получается

Лемма 2. *Спектры* $\sigma^{(1)}$ *и* $\sigma^{(2)}$ *двух систем уравнений*

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}^{(1)}\, x_1 + p_{s2}^{(1)}\, x_2 + \cdots \qquad (s = 1, 2, \ldots)$$

и

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}^{(2)}\, x_1 + p_{s2}^{(2)}\, x_2 + \cdots \qquad (s = 1, 2, \ldots)$$

равны между собой, если только существует такое конечное число $t_0 \geqslant 0$, *что при всех значениях* $t \geqslant t_0$ *имеют место равенства*

$$p_{sk}^{(1)}(t) = p_{sk}^{(2)}(t) \qquad (s, k = 1, 2, \ldots)$$

Действительно, решения

$$x_1 = x_1^{(1)}(t), \quad x_2 = x_2^{(1)}(t), \ldots$$

$$x_1 = x_1^{(2)}(t), \quad x_2 = x_2^{(2)}(t), \ldots$$

указанных систем уравнений, проходящие через одну и ту же точку $(t_0, x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots)$, тождественны друг другу при всех значениях $t \geqslant t_0$; следовательно, их характеристичные числа имеют одинаковые значения. Отсюда легко получить, что $\sigma^{(1)} = \sigma^{(2)}$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Если спектр σ *характеристичных чисел системы уравнений* (1.1) *не имеет точек, принадлежащих полуинтервалу* $(-\infty, r]$, *то существует такое конечное число* B *(зависящее лишь от выбора указанного числа* r*), что норма* $x(t)$ *любого решения* (1.3) *системы* (1.1) *будет удовлетворять неравенству*

$$x(t) \leqslant x(0)\, Be^{-rt} \tag{2.1}$$

при любом $t \geqslant 0$.

Доказательство. Для тривиального решения $x_1 = x_2 = \cdots = 0$ неравенство (2.1) очевидно; следовательно, при доказательстве можно полагать, что $x(0) \neq 0$, а тем самым достаточно неравенство (2.1) доказать лишь для всех тех решений, у которых $x(0) = 1$, ибо любое решение, у которого $x(0) \neq 0$, обращается при помощи деления на $x(0)$ в решение, у которого $x(0) = 1$.

Допустим, что нет такого конечного числа B, что любое решение системы (1.1), удовлетворяющее начальному условию $x(0) = 1$, удовлетворяло бы неравенству

$$x(t) \leqslant Be^{-rt}$$

при любом $t \geqslant 0$. Тогда найдется такое решение

$$x_1 = y_1^{(1)}(t), \quad x_2 = y_2^{(1)}(t), \ldots \tag{2.2}$$

норма которого $y^{(1)}(t)$ при $t = 0$ удовлетворяет условию $y^{(1)}(0) = 1$, и найдется такое значение $t = t_1$, что

$$y^{(1)}(t_1) \geqslant 2 \cdot 2\, e^{-rt_1}$$

Следовательно, найдется такое значение $s = s_1$, что

$$|\, y_{s_1}^{(1)}(t_1) \,| > 2e^{-rt_1}$$

Аналогичным образом найдется такое решение

$$x_1 = x_1^{(2)}(t), \qquad x_2 = x_2^{(2)}(t), \ldots \tag{2.3}$$

норма которого $x^{(2)}(t)$ при $t = 0$ удовлетворяет условию $x^{(2)}(0) = 1$, и найдется такое значение $t = t_2$, что

$$x^{(2)}(t_2) \geqslant 2 \cdot 2^2\, 2e^{(a+\rho)\, t_1}\, e^{-rt_2} \qquad (\rho = |\, r \,|)$$

Следовательно, найдется такое значение $s = s_2$, что

$$|\, x_{s_2}^{(2)}(t_2) \,| \geqslant 2^2\, 2e^{(a+\rho)\, t_1}\, e^{-rt_2}$$

Пусть аргумент числа β_2, $|\beta_2| = 1$ выбран так, что величины

$$y_{s_2}^{(1)}(t_2), \qquad \beta_2\, x_{s_2}^{(2)}(t_2)$$

имеют одинаковые аргументы. При помощи (2.3) построим решение

$$x_1 = y_1^{(2)}(t) = \frac{\beta_2 x_1^{(2)}(t)}{2e^{(a+\rho)\,t_1}}, \qquad x_2 = y_2^{(2)}(t) = \frac{\beta_2 x_2^{(2)}(t)}{2e^{(a+\rho)\,t_1}}, \ldots \tag{2.4}$$

Норма $y^{(2)}(t)$ этого решения удовлетворяет условию

$$y^{(2)}(0) = \frac{1}{2e^{(a+\rho)\,t_1}}, \qquad y^{(2)}(t_1) \leqslant \frac{e^{at_1}}{2e^{(a+\rho)\,t_1}} \leqslant \frac{e^{-rt_1}}{2}$$

[последнее неравенство следует на основании (1.6)], а при $t = t_2$ имеет место неравенство

$$|\,y_{s_2}^{(1)}(t_2) + y_{s_2}^{(2)}(t_2)\,| \geqslant |\,y_{s_2}^{(2)}(t_2)| > 2^2 e^{-rt_2} \tag{2.5}$$

Аналогичным образом найдется такое решение

$$x_1 = x_1^{(3)}(t), \qquad x_2 = x_2^{(3)}(t), \ldots \tag{2.6}$$

норма которого $x^{(3)}(t)$ при $t = 0$ удовлетворяет условию $x^{(3)}(0) = 1$, и найдется такое значение $t = t_3$, что

$$x^{(3)}(t_3) \geqslant 2 \cdot 2^3\, 2^2\, e^{(a+\rho)\,(t_1+t_2)}\, e^{-rt_3}$$

Следовательно, найдется такое значение $s = s_3$, что

$$|\,x_{s_3}^{(3)}(t_3)\,| > 2^3\, 2^2\, e^{(a+\rho)\,(t_1+t_2)}\, e^{-rt_3}$$

Пусть аргумент числа β_3, $|\beta_3| = 1$ выбран так, что величины

$$y_{s_3}^{(1)}(t_3) + y_{s_3}^{(2)}(t_3), \qquad \beta_3\, x_{s_3}^{(3)}(t_3)$$

имеют одинаковые аргументы. При помощи (2.6) построим решение

$$x_s = y_s^{(3)}(t) = \frac{\beta_3 x_s^{(3)}(t)}{2^2\, e^{(a+\rho)\,(t_1+t_2)}} \qquad (s = 1, 2, \ldots) \tag{2.7}$$

Норма $y^{(3)}(t)$ этого решения удовлетворяет условиям

$$y^{(3)}(0) = \frac{1}{2^2\, e^{(a+\rho)\,(t_1+t_2)}} < \frac{1}{2^2}, \qquad y^{(3)}(t_1) < \frac{e^{-rt_1}}{2^2}$$

$$y^{(3)}(t_2) < \frac{e^{at_2}}{2^2\, e^{(a+\rho)\,(t_1+t_2)}} < \frac{e^{-rt_2}}{2^2}$$

[последние два неравенства следуют на основании (1.6)], а при $t = t_3$ имеет место неравенство

$$|\,y_{s_3}^{(1)}(t_3) + y_{s_3}^{(2)}(t_3) + y_{s_3}^{(3)}(t_3)\,| \geqslant |\,y_{s_3}^{(2)}(t_3)\,| > 2^3\, e^{-rt_3} \tag{2.8}$$

Аналогичным образом для каждого числа $m = 2, 3, 4, \ldots$ найдется такое решение

$$x_1 = y_1^{(m)}(t), \qquad x_2 = y_2^{(m)}(t), \ldots \tag{2.9}$$

норма которого $y^{(m)}(t)$ при $t = 0$ удовлетворяет условию

$$y^{(m)}(0) \leqslant \frac{1}{2^{m-1}}$$

а при $t = t_g$ $(g = 1, 2, \ldots, m-1)$ имеет место неравенство

$$y^{(m)}(t_g) < \frac{e^{-rt_g}}{2^{m-1}} \tag{2.10}$$

причем при $t = t_m$ и при некотором значении $s = s_m$ будем иметь

$$|y_{s_m}^{(1)}(t_m) + \cdots + y_{s_m}^{(m)}(t_m)| \geqslant |y_{s_m}^{(m)}(t_m)| > 2^m e^{-rt_m} \tag{2.11}$$

Счетная последовательность решений

$$\begin{array}{ll} x_1 = y_1^{(1)}(t), & x_2 = y_2^{(1)}(t), \ \ldots \\ x_1 = y_1^{(2)}(t), & x_2 = y_2^{(2)}(t), \ \ldots \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ x_1 = y_1^{(m)}(t), & x_2 = y_2^{(m)}(t), \ \ldots \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \end{array}$$

удовлетворяет при $t = t_0 = 0$ условиям леммы 1, ибо

$$|y_n^{(1)}(0)| + |y_n^{(2)}(0)| + \cdots + |y_n^{(m)}(0)| + \cdots \leqslant 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots = 2$$

$$(n = 1, 2 \ldots) \tag{2.12}$$

Следовательно, функции

$$x_s = x_s(t) = y_s^{(1)}(t) + \cdots + y_s^{(m)}(t) + \ldots \qquad (s = 1, 2, \ldots) \tag{2.13}$$

определяют решение системы уравнений (1.1), норма которого $x(t)$ при $t = 0$ удовлетворяет на основании (2.12) неравенству $x(0) \leqslant 2$.

Пусть α есть характеристичное число решения (2.13). Положим $\varepsilon = \alpha - r$, очевидно, что $\varepsilon > 0$. Тогда функция

$$x(t)\, e^{(\alpha-\varepsilon)\, t} = x(t)\, e^{rt}$$

стремится к нулю при $t \to \infty$. Следовательно, найдется такое конечное число D, что при всех значениях $t \geqslant 0$ имеет место неравенство

$$x(t)\, e^{rt} \leqslant D \tag{2.14}$$

Рассмотрим ранее построенную последовательность чисел $t_1, t_2, \ldots, t_m, \ldots$ На основании (2.10) и (2.11) будем иметь

$$\begin{aligned} |x_{s_m}(t_m)| &= |y_{s_m}^{(1)}(t_m) + \cdots + y_{s_m}^{(m)}(t_m) + y_{s_m}^{(m+1)}(t_m) + \cdots| \geqslant \\ &\geqslant |y_{s_m}^{(1)}(t_m) + \cdots + y_{s_m}^{(m)}(t_m)| - |y_{s_m}^{(m+1)}(t_m) + \cdots| \geqslant \\ &\geqslant |y_{s_m}^{(m)}(t_m)| - [|y_s^{(m+1)}(t_m)| + \cdots] \geqslant \qquad (m = 1, 2, \ldots) \\ &\geqslant 2^m e^{-rt_m} - e^{-rt_m}\left(\frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^{m+1}} + \cdots\right) \geqslant 2^{m-1} e^{-rt_m} \end{aligned} \tag{2.15}$$

На основании (2.15) следует, что при $t = t_m$ $(m = 1, 2, \ldots)$ имеют место неравенства

$$|x_{s_m}(t_m)|\, e^{rt_m} \geqslant 2^{m-1}$$

т. е.

$$x(t_m)\, e^{rt_m} \geqslant 2^{(m-1)} \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

Но последнее неравенство противоречит условию (2.14). Полученное противоречие и доказывает теорему.

На основании предыдущей теоремы легко доказывается теорема.

Теорема 2. Допустим, что есть такое число $\gamma \geqslant 0$, *что любое характеристичное число* α *спектра* σ *системы* (1.1) *удовлетворяет неравенству* $\alpha > \gamma$. *Тогда решение* $x_1 = x_2 = \cdots = 0$ *системы* (1.1) *устойчиво; причем если* $\gamma > 0$, *то устойчивость будет асимптотической.*

Доказательство. Очевидно, что полуинтервал $(-\infty, \gamma]$ не имеет точек, принадлежащих спектру σ. Следовательно, на основании теоремы 1 существует такое конечное число B, что норма $x(t)$ любого решения системы (1.1) будет удовлетворять неравенству

$$x(t) \leqslant x(0) Be^{-\gamma t} \leqslant x(0) B \tag{2.16}$$

при любом $t \geqslant 0$. Так как число B не зависит от выбора решения, то неравенство (2.16) и доказывает теорему.

3. Теорему 1 можно записать в более общем виде.

Теорема 3. Если спектр σ *характеристичных чисел системы уравнений* (1.1) *не имеет точек, принадлежащих полуинтервалу* $(-\infty, r]$, *то для любого заданного числа* $t_0 \geqslant 0$ *существует такое конечное число* $D = D(t_0, r)$, *что норма* $x(t)$ *любого решения системы* (1.1) *будет удовлетворять неравенству*

$$x(t) \leqslant x(t_0) De^{-r(t-t_0)} \tag{3.1}$$

при любом $t \geqslant 0$, *а тем самым и при любом* $t \geqslant t_0$.

Доказательство. На основании (2.1) имеем

$$x(t) \leqslant x(0) Be^{-rt} = x(0) Be^{-rt_0} e^{-r(t-t_0)} \tag{3.2}$$

при любом $t \geqslant 0$. На основании (1.6) имеем

$$x(t_0) \geqslant x(0) e^{-at_0}, \quad \text{или} \quad x(0) \leqslant x(t_0) e^{at_0}$$

Последнее неравенство и неравенство (3.2) дают

$$x(t) \leqslant x(t_0) e^{(a-r)t_0} Be^{-r(t-t_0)}$$

при любом $t \geqslant 0$. Следовательно, достаточно положить

$$D = Be^{(a-r)t_0}$$

и тогда будем иметь

$$x(t) \leqslant x(t_0) De^{-r(t-t_0)} \tag{3.3}$$

что и доказывает теорему.

Для равномерной устойчивости по первому приближению [2] имеет большое значение случай, когда в неравенстве (3.1) величина D не зависит от выбора величины $t_0 \geqslant 0$, полагая при этом, что это неравенство имеет место при всех значениях $t \geqslant t_0$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 4. Если в системе уравнений (1.1) *коэффициенты* p_{sk} *суть постоянные или периодические функции с общим периодом* $\omega > 0$ *и если интервал* $(-\infty, r]$ *не имеет общих точек со спектром* σ *характери-*

стичных чисел системы (1.1), *то норма* $x(t)$ *любого решения системы* (1.1) *удовлетворяет неравенству* (3.3) *при любом* $t \geqslant t_0 \geqslant 0$, *причем величина* D *не зависит от выбора значения* $t_0 \geqslant 0$, *а зависит лишь от числа* r.

Доказательство. Допустим, что p_{sk} — постоянные. В этом случае решение системы (1.1), проходящее через точку $(t_0, x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots)$, будет вида

$$x_s = f_s(t - t_0, x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots) \qquad (s = 1, 2, \ldots) \tag{3.4}$$

Следовательно, и норма $x(t)$ этого решения будет того же вида

$$x(t) = f(t - t_0),$$

причем $x(t_0) = f(0) = \sup[\,|x_1^\circ|,\ |x_2^\circ|, \ldots]$.

Если в (3.4) положим $t_0 = 0$, то получим решение, проходящее через точку $(0, x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots)$, норма которого будет равна $f(t)$.

На основании теоремы 1 будем иметь

$$f(t) \leqslant f(0)\, Be^{-rt}$$

при любом $t \geqslant 0$. Следовательно, отсюда получаем

$$x(t) \equiv f(t - t_0) \leqslant f(0)\, Be^{-r(t - t_0)} = x(t_0)\, Be^{-r(t - t_0)} \tag{3.5}$$

при любом $t \geqslant t_0 \geqslant 0$, причем величина B не зависит от выбора $t_0 \geqslant 0$.

Допустим, что p_{sk} — периодические функции с общим периодом $\omega > 0$. Пусть

$$x_s = f_s(t, x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots) \qquad (s = 1, 2, \ldots) \tag{3.6}$$

есть решение системы (1.1), проходящее через точку $(0, x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots,)$. Пусть $m = 1, 2, \ldots$; тогда при всех значениях $t \geqslant m\omega$ функции

$$x_s = f_s(t - m\omega, x_1^0, x_1^0, \ldots) \qquad (s = 1, 2, \ldots) \tag{3.7}$$

также определяют решение системы (1.1), проходящее через точку $(m\omega, x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots)$. Следовательно, если обозначим норму решения (3.6) через $f(t)$, а норму решения (3.7) через $\theta(t)$, то при всех значениях $t \geqslant m\,\omega$ будем иметь

$$\theta(t) \equiv f(t - m\omega) \tag{3.8}$$

На основании теоремы 1 имеем

$$f(t) \leqslant f(0)\, Be^{-rt} \tag{3.9}$$

при любом $t \geqslant 0$. Из (3.8) и (3.9) получаем

$$\theta(t) \leqslant \theta(m\omega)\, Be^{-r(t - m\omega)} \tag{3.10}$$

при любом $t \geqslant m\omega$, причем величина B здесь не зависит от выбора числа $m = 0, 1, 2, \ldots$

Пусть $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \ldots$ есть решение системы уравнений (1.1), проходящее через точку $(t_0, x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots)$, норму которого обозначим через $x(t)$. Пусть число $m = 0, 1, 2, \ldots$ выбрано так, что

$$m\omega \leqslant t_0 < (m + 1)\,\omega \tag{3.11}$$

На основании (3.10) будем иметь

$$x(t) \leqslant x(m\omega) Be^{-r(t-m\omega)} = x(m\omega) Be^{-r(t_0-m\omega)} e^{-r(t-t_0)} \leqslant$$
$$\leqslant x(m\omega) Be^{|r|\omega} e^{-r(t-t_0)} \qquad (3.12)$$

при любом значении $t \geqslant m\omega$, а тем самым и при любом $t \geqslant t_0$.

Положим в неравенство (1.6) $t_0 = m\omega$, тогда

$$x(t) \geqslant x(m\omega) e^{-a(t-m\omega)} \qquad (3.13)$$

при любом $t \geqslant m\omega$. Положим в (3.13) $t = t_0$, тогда

$$x(m\omega) \leqslant x(t_0) e^{a(t_0-m\omega)} < x(t_0) e^{a\omega} \qquad (3.14)$$

ибо рассматриваемая здесь величина $t_0 \geqslant 0$ удовлетворяет условию (3.11).

Из (3.12) и (3.14) получаем

$$x(t) \leqslant x(t_0) Be^{(a+|r|)\omega} e^{-r(t-t_0)} \qquad (3.15)$$

при любом $t \geqslant m\omega$, а тем самым при любом $t \geqslant t_0$. Положим

$$D = Be^{(a+|r|)\omega}$$

Тогда на основании (3.15) будем иметь

$$x(t) \leqslant x(t_0) De^{-r(t-t_0)} \qquad (3.16)$$

при любом значении $t \geqslant t_0 \geqslant 0$, причем величина D не зависит от выбора значения $t_0 \geqslant 0$. Неравенства (3.5) и (3.16) доказывают теорему 4.

Замечание. В общем случае величина $D = D(t_0, r)$ зависит от выбора начального значения $t = t_0 \geqslant 0$. Соотношение $D = Be^{(a-r)t_0}$ показывает, что функция D имеет относительно t_0 характеристичное число не менее величины $r - a$.

4. Рассмотрим систему уравнений (4.1)

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + \cdots + p_{sn}x_n + \cdots + L_s(t, x_1, x_2, \ldots) \qquad (s = 1, 2, \ldots)$$

которая получается из системы (1.1) прибавлением функций $L_s(t, x_1, x_2 \ldots)$.

Будем полагать, что в области H

$$t \geqslant 0, \qquad |x_s| \leqslant R \qquad (s = 1, 2, \ldots)$$

функции L_s непрерывны по t и удовлетворяют условию

$$|L_s(t, x_1', x_2', \ldots) - L_s(t, x_1'', x_2'', \ldots)| \leqslant A\Delta x \qquad (s = 1, 2 \ldots)$$

где $A(t)$ непрерывна при $t \geqslant 0$, а $\Delta x = \sup[|x_1' - x_1''|, |x_2' - x_2''|, \ldots]$ причем при $x_1 = x_2 = \cdots = 0$ функции $L_s \equiv 0$.

Очевидно, что функции $L_s(t, x_1, x_2, \ldots)$ непрерывны в каждой точке $(t, x_1, x_2, \ldots)$ области H. Имеет место следующая теорема.

Теорема 5. Допустим, что коэффициенты p_{sk} линейной части

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + \cdots \qquad (s = 1, 2, \ldots) \qquad (4.2)$$

системы уравнений (4.1) суть постоянные или периодические функции с общим периодом $\omega > 0$.

Допустим, что спектр σ характеристичных чисел системы (4.2) *строго положителен, т. е. допустим, что существует такое число* $\nu > 0$, *что любое* α *из* σ *удовлетворяет неравенству* $\alpha > \nu$.

Допустим, что в области H *функции* L_s *удовлетворяют условию*

$$|L_s(t, x_1, x_2, \ldots)| \leqslant x\gamma(x) \qquad (s = 1, 2, \ldots) \tag{4.3}$$

где $\gamma(x) \to 0$ *при* $x = \sup[|x_1|, |x_2|, \ldots] \to 0$.

Тогда решение $x_1 = x_2 = \cdots = 0$ *системы уравнений* (4.1) *равномерно и асимптотически устойчиво.*

Доказательство. На основании теоремы 4 имеем

$$x(t) \leqslant x(t_0) De^{-\nu(t-t_0)} \tag{4.4}$$

при любом $t \geqslant t_0 \geqslant 0$ и где D не зависит от выбора $t_0 \geqslant 0$ и не зависит от нормы $x(t)$ решения системы (4.2). Отсюда на основании теоремы о равномерной устойчивости по первому приближению [2] следует справедливость теоремы 5.

Предыдущую теорему можно несколько изменить, взяв вместо условия (4.3) следующее условие:

$$|L_s(t, x_1, x_2, \ldots)| \leqslant rx \qquad (s = 1, 2, \ldots) \tag{4.5}$$

где $x = \sup[|x_1|, |x_2|, \ldots]$.

Тогда при соблюдении указанных условий имеет место следующая теорема.

Теорема 6. При достаточно малом значении величины $r > 0$ *решение* $x_1 = x_2 = \cdots = 0$ *системы* (4.1) *равномерно и асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Действительно, на основании (4.4) легко получить [2]

$$x(t) \leqslant x_0 De^{-\nu(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} De^{-\nu(t-z)} rx(z)\, dz \tag{4.6}$$

где $x(t)$ означает норму решения системы (4.1) и $x_0 = x(t_0)$.

На основании (4.6) следует, что $x(t)$ не более решения уравнения

$$y = x_0 De^{-\nu(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} Dre^{-\nu(t-z)} y\, dz$$

Легко видеть, что

$$y = x_0 De^{-(\nu - rD)(t-t_0)}$$

Следовательно,

$$x(t) \leqslant x_0 De^{-(\nu - rD)(t-t_0)} \tag{4.7}$$

при любом $t \geqslant t_0 \geqslant 0$, что и доказывает теорему 6.

Рассмотрим счетную систему линейных уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = q_{s1}x_1 + q_{s2}x_2 + \cdots + q_{sn}x_n + \cdots \qquad (s = 1, 2, \ldots) \tag{4.8}$$

где $q_{sk} = q_{sk}(t)$ непрерывны при $t \geqslant 0$ и удовлетворяют условию

$$q_s(t) = |q_{s1}| + |q_{s2}| + \cdots \leqslant q(t) \qquad (s = 1, 2, \ldots) \tag{4.9}$$

причем $q_s(t)$ и $q(t)$ непрерывны при $t \geqslant 0$.

Спектр характеристичных чисел системы (4.8) обозначим через σ^*. Имеет место следующая теорема.

Теорема 7. Допустим, что коэффициенты p_{sk} *системы* (1.1) *суть постоянные или периодические функции с общим периодом* $\omega > 0$.

Допустим, что полуинтервал $(-\infty, r]$ *не содержит точек спектра* σ *характеристичных чисел системы* (1.1).

Допустим, что

$$|p_{s1}(t) - q_{s1}(t)| + |p_{s2}(t) - q_{s2}(t)| + \cdots \leqslant \delta(t) \quad (s = 1, 2, \ldots) \tag{4.10}$$

где $\delta(t) \to 0$ *при* $t \to \infty$.

Тогда интервал $(-\infty, r)$ *не содержит точек спектра* σ^* *характеристичных чисел системы* (4.8).

Доказательство. На основании теоремы 4 следует, что норма $x(t)$ решения системы (1.1) удовлетворяет неравенству

$$x(t) \leqslant x(t_0)\, D e^{-r(t-t_0)} \tag{4.11}$$

при любом $t \geqslant t_0 \geqslant 0$ и где D не зависит от выбора $t_0 \geqslant 0$.

Систему уравнений (4.8) можно записать в следующем виде:

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + \cdots + (q_{s1} - p_{s1})\,x_1 + (q_{s2} - p_{s2})\,x_2 + \cdots \qquad (s = 1, 2, \ldots) \tag{4.12}$$

Пусть $\varepsilon > 0$ наперед заданное число и пусть $\tau > 0$ выбрано так, что $\delta(t) < \varepsilon$ при $t \geqslant \tau$. Тогда на основании (4.10) будем иметь

$$|p_{s1}(t) - q_{s1}(t)| + |p_{s2}(t) - q_{s2}(t)| + \cdots < \varepsilon \qquad (s = 1, 2, \ldots) \tag{4.13}$$

при любом $t \geqslant \tau$.

На основании леммы 2 можно допустить, что (4.13) имеет место при любом $t \geqslant 0$, ибо такое допущение не изменит спектра σ^* характеристичных чисел системы (4.8).

Обозначим через

$$x_1 = x_1(t), \qquad x_2 = x_2(t), \ldots \tag{4.14}$$

решение системы (4.12), проходящее через точку $(t_0, c_1, c_2, \ldots)$, и пусть $c = \sup[\,|c_1|, |c_2|, \ldots]$; норму решения (4.14) обозначим через $x(t)$.

Обозначим через

$$x_s = f_s(t, t_0, c_1, c_2, \ldots) \qquad (s = 1, 2, \ldots) \tag{4.15}$$

решение системы (1.1), проходящее через ранее указанную точку $(t_0, c_1, c_2, \ldots)$; норму решения (4.15) обозначим через $f(t)$. Очевидно, что норма $f(t)$ удовлетворяет условию (4.11).

Положим

$$L_s(t, x_1, x_2, \ldots) = (q_{s1} - p_{s1})\,x_1 + (q_{s2} - p_{s2})\,x_2 + \cdots \qquad (s = 1, 2, \ldots) \tag{4.16}$$

На основании (4.13) можно считать, что

$$| L_s(t, x_1, x_2, \dots) | \leqslant x\varepsilon \qquad (s = 1, 2, \dots) \tag{4.17}$$

при любом $t \geqslant 0$ и где $x = \sup [\, | x_1 |, \, | x_2 |, \dots]$.

На основании (4.12), (4.15) и (4.16) можно показать [1], что функции (4.14) удовлетворяют уравнениям

$$x_s(t) = f_s(t, t_0, c_1, c_2, \dots) + \int_{t_0}^{t} f_s(t, z, L_1(z, x_1(z), \dots),$$

$$L_2(z, x_1(z), \dots)\, dz \qquad (s = 1, 2, \dots)$$

Отсюда на основании (4.11) и (4.17) будем иметь

$$x(t) \leqslant cDe^{-r(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} De^{-r(t-z)}\, x(z)\, \varepsilon\, dz$$

т. е. $x(t)$ не более решения уравнения

$$y = cDe^{-r(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} De^{-r(t-z)}\, y\varepsilon\, dz\,.$$

Следовательно,

$$x(t) \leqslant y = cDe^{-(r-\varepsilon D)(t-t_0)} \tag{4.18}$$

при любом $t \geqslant t_0 \geqslant 0$.

На основании (4.18) следует, что любое характеристичное число α^* спектра σ^* удовлетворяет неравенству $\alpha^* \geqslant r - \varepsilon D$.

Так как выбор величины $\varepsilon > 0$ произволен, то из последнего неравенства следует, что $\alpha^* \geqslant r$, т. е. интервал $(-\infty, r)$ не содержит точек спектра σ^* системы уравнений (4.8).

Поступила 13 VI 1950

ЛИТЕРАТУРА

1. Персидский К. П. Об устойчивости решений бесконечной системы уравнений. ПММ. 1948. Т. XII. Вып. 5.
2. Персидский К. П. Равномерная устойчивость по первому приближению. ПММ. 1949. Т. XII. Вып. 3.
3. Персидский К. П. О характеристичных числах решений счетной системы линейных дифференциальных уравнений. ДАН СССР. 1948. Т. XIII. № 3.
4. Персидский К. П. Об одной счетной системе уравнений с частными производными. ПММ. 1950. Т. XIV. Вып. 1.
5. Персидский К. П. Об устойчивости решений счетной системы дифференциальных уравнений. Изв. Акад. Наук КазССР, серия матем. и механики. 1948. Вып. 2.
6. Ляпунов А. М. Общая задача устойчивости движения. ОНТИ. 1935.