

**ЦЕПИ РЕГУЛИРОВАНИЯ СО ЗВЕНЬЯМИ, ИМЕЮЩИМИ  
 ПО НЕСКОЛЬКО СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ**

**Б. В. Булгаков**  
 (Москва)

**§ 1. Матричные уравнения звеньев цепи.** Регулируемые системы обычно представляют простые или разветвленные замкнутые цепи, в которых каждое звено действует на следующее, между тем как обратным воздействием можно пренебречь. Звенья имеют по одной или несколько степеней свободы; в последнем случае можно выбрать какую-либо одну предпочтительную координату для каждого и путем исключения остальных координат из системы дифференциальных уравнений звена, которые будем предполагать линейными и с постоянными коэффициентами, получить одно уравнение высокого порядка. Так как, однако, это часто связано со сложными преобразованиями и потерей непосредственного физического значения уравнений, то имеет смысл вместо этого оперировать с матричным уравнением, соответствующим системе скалярных уравнений звена.

Пусть, например, уравнения звена  $\alpha_1$  имеют вид:

$$\sum_{k=1}^{m_1} f_{jk}^{(1)}(D) y_k^{(1)} = \sum_{k'=1}^{m_x} e_{jk'}^{(1)}(D) x_{k'} \quad (j = 1, \dots, m_1)$$

где  $y_1^{(1)}, \dots, y_{m_1}^{(1)}$  — координаты звена,  $x_1, \dots, x_{m_x}$  — функции, представляющие воздействия, внешние по отношению к звену,  $D$  — оператор дифференцирования  $d/dt$  и, наконец,  $f_{jk}^{(1)}(D)$  и  $e_{jk'}^{(1)}(D)$  — полиномы. Введем матрицы-столбцы

$$y_1 = \begin{Bmatrix} y_1^{(1)} \\ \vdots \\ y_{m_1}^{(1)} \end{Bmatrix} \quad (m_1 \times 1), \quad x = \begin{Bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{m_x} \end{Bmatrix} \quad (m_x \times 1)$$

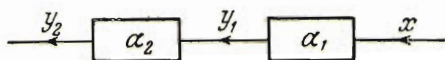
и полиноминые матрицы

$$f_1(D) = \| f_{jk}^{(1)}(D) \| \quad (m_1 \times m_1), \quad e_1(D) = \| e_{jk'}^{(1)}(D) \| \quad (m_1 \times m_x)$$

(Все применяемые здесь и в дальнейшем операции, терминология и обозначения матричного исчисления либо общеприняты, либо разъяснены в [1]). Система уравнений звена может быть теперь заменена матричным уравнением

$$f_1(D) y_1 = e_1(D) x$$

Пусть имеем второе звено  $\alpha_2$  с матричной координатой  $y_2$  типа  $m_2 \times 1$  и пусть два звена соединены каскадом, т. е. первое подвергается только внешнему для системы двух звеньев воздействию  $x$ , а второе — только воздействию первого (фиг. 1). Матричное уравнение второго звена имеет вид:



Фиг. 1

$$f_2(D) y_2 = e_2(D) y_1$$

где  $f_2(D)$ ,  $e_2(D)$  — полиномильные матрицы типов  $m_2 \times m_2$  и  $m_2 \times m_1$ . Предполагая матрицы  $f_1(D)$ ,  $f_2(D)$  неособыми и разрешая уравнения формально относительно  $y_1$ ,  $y_2$  путем деления слева на  $f_1(D)$ ,  $f_2(D)$ , найдем

$$y_1 = X_1(D) x, \quad y_2 = X_2(D) y_1$$

где каждую из матриц

$$X_1(D) = f_1(D) \setminus e_1(D), \quad X_2(D) = f_2(D) \setminus e_2(D)$$

мы будем называть *передачей* или *трансммиттансом* соответствующего звена. Косая черта, наклоненная налево, есть символ деления слева.

Исключая  $y_1$ , имеем

$$y_2 = X(D) x$$

Матрица

$$X(D) = X_2(D) X_1(D)$$

играет роль трансмиттанса системы двух звеньев.

Таким образом, *трансммиттансы звеньев, соединенных каскадом, перемножаются*. При этом порядок сомножителей в произведении, считая справа налево, соответствует порядку следования звеньев в цепи в направлении одностороннего воздействия.

Если каждое звено имеет по одной степени свободы и  $m_x = 1$ , то трансмиттансы  $X_1(D)$ ,  $X_2(D)$  оказываются скалярами и порядок их перемножения несущественен.

Установленное правило представляет обобщение соответствующего закона исчисления четырехполюсников <sup>[2]</sup>, применяемого в теории связи по проводам и радиотехнике.

Если заменить  $D$  через  $i\omega$ , как это делается в теории переменных токов, то трансмиттансы обратятся в соответствующие матричные частотные характеристики.

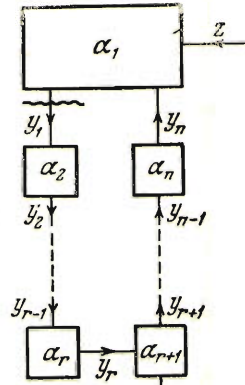
Заметим, что схематическое представление структуры регулируемой системы в виде цепи включает элемент произвола постольку, поскольку при ее анализе можно объединять смежные звенья в один блок, рассматривая его как одно звено. Поэтому, если какая-нибудь регулируемая система не может быть представлена в виде одноконтурной цепи с более чем двумя звеньями, то к двузвенному замкнутому контуру она может быть сведена во всяком случае. Для этого нужно только каким-нибудь образом разбить все координаты и скалярные уравнения на две группы и отнести одну группу к первому, а другую ко второму звену.



§ 2. **Одноконтурная замкнутая цепь.** Пусть имеем одноконтурную замкнутую цепь регулирования из  $n$  звеньев  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  (фиг. 2). Первым звеном может быть поле регулирования<sup>1</sup>, остальные звенья — различные элементы регулятора. Число степеней свободы звена  $\alpha_j$  пусть равно  $m_j$ . Возмущение приложено к первому звену, команда — к звену  $\alpha_{r+1}$ .

Матричные уравнения системы  $n$  звеньев имеют вид:

$$\begin{aligned} f_1(D) y_1 &= e_1(D) y_n + e_{1z}(D) z \\ f_2(D) y_2 &= e_2(D) y_1 \\ &\dots \dots \dots \\ f_r(D) y_r &= e_r(D) y_{r-1} \\ f_{r+1}(D) y_{r+1} &= -e_{r+1}(D) y_r + e_{r+1,x}(D) x \\ &\dots \dots \dots \\ f_n(D) y_n &= e_n(D) y_{n-1} \end{aligned} \quad (2.1)$$



Фиг. 2

При этом матрицы  $y_j, x, z$  типов  $m_j \times 1, m_x \times 1, m_z \times 1$  характеризуют соответственно состояние звеньев, команду, изменение нагрузки и помехи,  $f_j(D)$  — неособые квадратные полиномиальные матрицы порядков  $m_j$ , а  $e_1(D), \dots, e_n(D), e_{r+1,x}(D), e_{1z}(D)$  — вообще прямоугольные полиномиальные матрицы типов  $m_1 \times m_n, \dots, m_n \times m_{n-1}, m_{r+1} \times m_x, m_1 \times m_z$ .

Обозначения выбраны таким образом, чтобы в одном уравнении, а именно перед операционной матрицей  $e_{r+1}(D)$ , стоял минус; этим имеется в виду выразить, что регулятор должен противодействовать нарушению желаемого режима.

Умножим матричные уравнения, начиная со второго, слева на матрицы

$$\begin{aligned} &-e_1(D) f_n^{-1}(D) e_n(D) \dots f_2^{-1}(D) \\ &\dots \dots \dots \\ &-e_1(D) f_n^{-1}(D) e_n(D) \dots f_r^{-1}(D) \\ &e_1(D) f_n^{-1}(D) e_n(D) \dots f_{r+1}^{-1}(D) \\ &\dots \dots \dots \\ &e_1(D) f_n^{-1}(D) \end{aligned}$$

и сложим с первым. После приведений получим

$$\begin{aligned} [f_1(D) + e_1(D) f_n^{-1}(D) e_n(D) \dots f_2^{-1}(D) e_2(D)] y_1 &= \\ = e_1(D) f_n^{-1}(D) e_n(D) \dots f_{r+1}^{-1}(D) e_{r+1,x}(D) x + e_{1z}(D) z \end{aligned} \quad (2.2)$$

Полагая

$$\Delta_j(D) = \det f_j(D), \quad F_j(D) = \text{adj } f_j(D)$$

где символ  $\text{adj}$  обозначает присоединенную матрицу, введем трансмит-

<sup>1</sup> Этот термин применяем вместо «объекта регулирования», так как один и тот же объект может подвергаться регулированию в отношении различных своих физических свойств, например давления и температуры.

тансы односторонних воздействий между смежными звеньями

$$X_j(D) = f_j(D) \setminus e_j(D) = \frac{F_j(D) e_j(D)}{\Delta_j(D)} \quad (j = 1, \dots, n) \quad (2.3)$$

и трансмиттансы команды и возмущений

$$X_{r+1, x}(D) = f_{r+1}(D) \setminus e_{r+1, x}(D) = \frac{F_{r+1}(D) e_{r+1, x}(D)}{\Delta_{r+1}(D)}$$

$$X_{1z}(D) = f_1(D) \setminus e_{1z}(D) = \frac{F_1(D) e_{1z}(D)}{\Delta_1(D)} \quad (2.4)$$

Тогда после деления слева на  $f_1(D)$  уравнение (2.2) получает вид:

$$[E_{m_1} + X(D)] y_1 = e_x(D) x + e_z(D) z$$

где

$$X(D) = X_1(D) X_n(D) \dots X_2(D) \quad (2.5)$$

$$e_x(D) = X_1(D) X_n(D) \dots X_{r+1, x}(D), \quad e_z(D) = X_{1z}(D)$$

или же

$$y_1 = X_x(D) x + X_z(D) z \quad (2.6)$$

причем

$$X_x(D) = [E_{m_1} + X(D)] \setminus e_x(D), \quad X_z(D) = [E_{m_1} + X(D)] \setminus e_z(D) \quad (2.7)$$

Квадратная матрица

$$X(D) = \| X_{jk}(D) \| \quad (m_1 \times m_1) \quad (2.8)$$

представляет *трансмиттанс разомкнутой цепи*  $\alpha_2 \dots \alpha_n \check{\alpha}_1$ , получаемой путем разрыва связи между первым и вторым звеном, как показано на схеме. Если  $x = z = 0$ , то, подавая, например, на вход первого звена  $\alpha_2$  этой цепи вместо  $y_1$  какой-нибудь синусоидальный сигнал  $u(t)$ , мы снимем на выходе последнего звена  $\alpha_1$  сигнал  $-X(D)u(t)$  (минус получился благодаря наличию такового в  $(r+1)$ -м уравнении). Если  $[y_j^{(1)}]$  обозначает размерность скалярной координаты  $y_j^{(1)}$ , то размерность  $X_{jk}(D)$ , очевидно, будет  $[y_j^{(1)}][y_k^{(1)}]^{-1}$ ; если, в частности, все координаты  $y_j^{(1)}$  безразмерны, то и все  $X_{jk}(D)$  будут таковыми. Матрицу  $E_{m_1} + X(D)$  мы будем, несколько обобщая терминологию Боде [3], называть *возвратной разностью*, так как  $[E_{m_1} + X(D)]u(t)$  есть разность между сигналами  $u(t)$  и  $-X(D)u(t)$ .

Матрицы  $X_x(D)$ ,  $X_z(D)$  представляют трансмиттансы поля регулирования с включенным регулятором по отношению к команде и к возмущениям.

Часть цепи между полем регулирования и местом подачи команды, состоящая из звеньев  $\alpha_2, \dots, \alpha_r$ , может быть названа обратной связью, так как с ее помощью осуществляются регистрация состояния поля регулирования и передача соответствующего сигнала для его сличения с командой, которое происходит в звене  $\alpha_{r+1}$ . Если обратную связь выключить, то, очевидно, будет

$$y_1 = e_x(D) x + e_z(D) z \quad (2.9)$$

т. е. трансмиттансы  $X_x(D)$ ,  $X_z(D)$  приводятся к  $e_x(D)$ ,  $e_z(D)$ . Слагаемое  $X(D)$  в знаменателях правых частей формул (2.7) выражает поэтому



влияние обратной связи. Уравнение (2.9) характеризует управление типа незамкнутой цепи, уравнение (2.6) — автоматическое регулирование.

Если  $X_x(0)$  конечно, то мы имеем при  $x = \text{const}$ ,  $z = 0$  статическое решение

$$y_{1x} = X_x(0) x$$

если притом условия асимптотической устойчивости выполнены, то это решение характеризует состояние, к которому стремится поле регулирования в ответ на постоянную команду; рассогласование  $y_{1x} - y_1$  при этом стремится к нулю.

Аналогичным образом, если  $X_z(0)$  конечно, то при  $x = 0$ ,  $z = \text{const}$  мы получаем частное решение

$$y_{1z} = X_z(0) z$$

характеризующее статическую реакцию поля регулирования на постоянное возмущение, например уменьшение нагрузки паровой машины на постоянную величину. Если

$$X_z(0) = 0$$

то эта статическая реакция равна нулю; при внезапном приложении постоянного возмущения происходит переходный процесс, по окончании которого поле регулирования возвращается в прежнее состояние, так что мы имеем изодромное регулирование.

Изодромными системами регулирования целесообразно называть также и такие, в которых не все, а лишь некоторые наиболее важные координаты имеют нулевые статические значения при постоянном возмущении; этот случай, однако, сводится к предыдущему, если сузить определение поля регулирования и считать, что оно определяется лишь значениями тех координат, которые нас особо интересуют.

Совершая замену  $D \rightarrow i\omega$ , можно обычным образом перейти от трансмиттансов, входящих в предыдущие уравнения, к соответствующим частотным характеристикам. Эти характеристики могут быть найдены не только вычислительным, но и экспериментальным путем, для чего нужно поочередно задавать синусоидальные возмущения каждому скалярному элементу матричной координаты на входе и измерять соответствующие амплитуды и фазы элементов матричной координаты на выходе. Характеристики  $X_x(i\omega)$ ,  $X_z(i\omega)$  определяют режимы установившихся синусоидальных колебаний при синусоидальной команде  $x$  и синусоидальном возмущении  $z$ .

Если заменить в (2.6) «неопределенный» оператор  $D$  оператором  $p$  Хевисайда-Карсона, то получится уравнение переходного процесса в изображениях для случая нулевых начальных значений. При ненулевых начальных значениях нужно предварительно избавиться от знаменателей и добавить по известным правилам операционного исчисления члены, соответствующие начальным значениям. Неравносильность первоначальных и преобразованного уравнений в смысле, например, определений Лузина<sup>[4]</sup> не имеет значения, если правильно учесть связь начальных значений

неизвестных и их производных, входящих в первоначальные и преобразованные уравнения. Приложение полученных уравнений для вычисления характеристического определителя и исследования устойчивости собственных колебаний рассмотрено в § 3 и 6.

В частности, некоторые или все звенья  $\alpha_j$  могут иметь по одной степени свободы, так что  $m_j = 1$ ; тогда соответствующие  $f_j(D)$  будут скалярными полиномами. Полиномиальная матрица  $e_j(D)$  и трансмиттанс  $X_j(D)$  будут скалярами только в том случае, когда оба смежных звена  $\alpha_{j-1}$ ,  $\alpha_j$  имеют по одной степени свободы (при  $j = 1$  это должно иметь место в отношении  $\alpha_n$  и  $\alpha_1$ ); аналогичные замечания можно сделать в отношении матриц  $e_{r+1, x}(D)$ ,  $e_{1z}(D)$ ,  $X_{r+1, x}(D)$ ,  $X_{1z}(D)$ .

Обозначая

$$l(D) = X(D) \setminus e_x(D) \quad (2.10)$$

мы можем написать

$$e_x(D) = X(D) l(D)$$

$$X_x(D) = [E_{m_1} + X(D)] \setminus X(D) l(D) \quad (2.11)$$

В элементах каждого столбца матрицы  $E_{m_1} + X(D)$  отметим члены, содержащие степень  $D$ , старшую для данного столбца, и предположим, что определитель коэффициентов этих членов отличен от нуля. Рассмотрим затем регулируемые системы, для которых в некотором диапазоне частот элементы матрицы  $X(i\omega)$  велики. В этом случае матрица

$$X_z(i\omega) = [E_{m_1} + X(i\omega)] \setminus e_z(i\omega) = \frac{\text{adj}[E_{m_1} + X(i\omega)]}{\det[E_{m_1} + X(i\omega)]} e_z(i\omega)$$

мала, так что помехи мало чувствительны. Что же касается матрицы

$$\begin{aligned} X_x(i\omega) &= [E_{m_1} + X(i\omega)] \setminus X(i\omega) l(i\omega) = \\ &= [E_{m_1} + X(i\omega)] \setminus [E_{m_1} + X(i\omega) - E_{m_1}] l(i\omega) = \\ &= \{E_{m_1} - [E_{m_1} + X(i\omega)] \setminus E_{m_1}\} l(i\omega) \end{aligned}$$

то она близка к  $l(i\omega)$  и, следовательно, в рассматриваемом диапазоне приближенное значение частотной характеристики команды есть  $l(i\omega)$ . Чтобы сделать рассматриваемый случай более конкретным, предположим еще, что  $m_1 = m_r = m_x$  и  $e_{r+1, x}(D) = e_{r+1}(D)$ , вследствие чего трансмиттанс обратной связи

$$k(D) = X_r(D) \dots X_2(D) \quad (2.12)$$

является квадратной матрицей  $m_1$ -го порядка, так же как и матрица

$$e_x(D) = X_1(D) X_n(D) \dots X_{r+1}(D) \quad (2.13)$$

При этом

$$X(D) = e_x(D) k(D) = X(D) l(D) k(D), \quad l(D) = k^{-1}(D)$$

так что частотная характеристика команды определяется в основном обратной связью; иными словами, ответ системы на команду зависит только от настройки измерительных, усилительных, передающих, счетно-решающих и управляющих элементов, составляющих линию обратной связи.



### § 3. Характеристическое уравнение одноконтурной замкнутой цепи.

Уравнение (2.2) было получено из заданных уравнений (2.1) путем почленного сложения первого с остальными, умноженными слева на некоторые матрицы. Это имеет своим результатом элементарные преобразования третьего типа в смысле [1], § 1.7, производимые над строками коагулированной формы операционной матрицы, т. е. матрицы операторов при неизвестных.

Поэтому если заменить уравнением (2.2) первое из заданных уравнений и оставить без изменения остальные, то операционная матрица полученной системы, которую можно представить в виде

$$\left\| \begin{array}{cccc} f_1(D) + e_1(D)X_n(D) \dots X_2(D) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & -e_2(D) & & f_2(D) \dots 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & 0 & & 0 & \dots -e_n(D) & f_n(D) \end{array} \right\|$$

имеет тот же определитель  $\Delta(D)$ , что и операционная матрица  $f(D)$  первоначальной. Пользуясь теоремой Лапласа, находим

$$\Delta(D) = \det [f_1(D) + e_1(D)X_n(D) \dots X_2(D)] \det f_2(D) \dots \det f_n(D) = \\ = \det \{f_1(D) [E_{m_1} + X(D)]\} \Delta_2(D) \dots \Delta_n(D)$$

или

$$\Delta(D) = \Delta_0(D) \det [E_{m_1} + X(D)] \quad (3.1)$$

где величина

$$\Delta_0(D) = \Delta_1(D) \dots \Delta_n(D) \quad (3.2)$$

представляет характеристический определитель разомкнутой цепи.

Развертывая определитель обратной разности

$$E_{m_1} + X(D) = \left\| \begin{array}{cccc} 1 + X_{11}(D) & \dots & X_{1m_1}(D) \\ \dots & \dots & \dots \\ X_{m_11}(D) & \dots & 1 + X_{m_1m_1}(D) \end{array} \right\|$$

представим его в виде

$$\det [E_{m_1} + X(D)] = 1 + K(D) \quad (3.3)$$

где

$$K(D) = \sum_i X_{ii}(D) + \sum_{ij} \begin{vmatrix} X_{ii}(D) & X_{ij}(D) \\ X_{ji}(D) & X_{jj}(D) \end{vmatrix} + \\ + \sum_{ijk} \begin{vmatrix} X_{ii}(D) & X_{ij}(D) & X_{ik}(D) \\ X_{ji}(D) & X_{jj}(D) & X_{jk}(D) \\ X_{ki}(D) & X_{kj}(D) & X_{kk}(D) \end{vmatrix} + \dots + \det X(D) \quad (3.4)$$

Так как согласно (2.5),

$$X(D) = \frac{F_1(D) e_1(D) F_n(D) e_n(D) \dots F_2(D) e_2(D)}{\Delta_1(D) \Delta_n(D) \dots \Delta_2(D)}$$

то все  $X_{jk}(D)$  имеют делитель  $\Delta_0(D)$  и  $K(D)$  после приведения к од-

ному знаменателю получает вид:

$$K(D) = \frac{L(D)}{\Delta_0^{m_1}(D)}$$

где  $L(D)$  — полином. Но выражение

$$\Delta(D) = \det f(D) = \Delta_0(D) [1 + K(D)] = \Delta_0(D) + \frac{L(D)}{\Delta_0^{m_1-1}(D)}$$

должно быть целой рациональной функцией, так как это есть характеристический определитель замкнутой цепи. Следовательно,

$$\frac{L(D)}{\Delta_0^{m_1-1}(D)} = M(D)$$

где  $M(D)$  — полином; отсюда

$$L(D) = M(D) \Delta_0^{m_1-1}(D), \quad K(D) = \frac{M(D)}{\Delta_0(D)} \quad (3.5)$$

Такой вид должно иметь  $K(D)$  после вычисления и возможных сокращений. Характеристический определитель замкнутой цепи будет

$$\Delta(D) = \Delta_0(D) [1 + K(D)] = \Delta_0(D) + M(D) \quad (3.6)$$

Зная его, можем написать характеристическое уравнение

$$\Delta(D) = 0 \quad (3.7)$$

Выражение (3.6) дает также возможность по обычным правилам исследовать устойчивость с помощью частотных критериев А. В. Михайлова и Найквиста или неравенств Рауса-Гурвитца.

Так как при вычислении характеристического определителя внешние воздействия  $x$  и  $z$  не имеют значения, то мы можем получить другие выражения для  $K(D)$ , разрывая цепь после второго звена, после третьего и т. д.:

$$\begin{aligned} 1 + K(D) &= \det [E_{m_1} + X_2(D) X_1(D) X_n(D) \dots X_3(D)] = \\ &= \det [E_{m_1} + X_3(D) X_2(D) X_1(D) X_n(D) \dots X_4(D)] = \dots \end{aligned} \quad (3.8)$$

Обычно бывает выгодно делать разрыв после звена  $\alpha_j$ , для которого  $m_j$  — наименьшее, всего лучше — единица, так как тогда и трансмиттанс разомкнутой цепи и соответствующая возвратная разность будут скалярными. В этом случае

$$K(D) = X_j(D) \dots X_1(D) X_n(D) \dots X_{j+1}(D)$$

**§ 4. Автоматическое управление курсом корабля.** В качестве примера теории, развитой в предыдущих параграфах, рассмотрим хорошо известные уравнения автоматического управления курсом корабля, которые могут быть найдены, например, у Басина<sup>[5]</sup>, Ведрова<sup>[6]</sup>, Вейсса<sup>[7]</sup>, Граммеля<sup>[8]</sup>, Мак-Колла<sup>[9]</sup>, Чалмерса<sup>[10]</sup>; эти уравнения применимы и к самолету.

Уравнение моментов относительно вертикальной оси корабля, проходящей через центр тяжести, и уравнение боковых сил могут быть



в случае малых отклонений от прямолинейного курса написаны в виде

$$\begin{aligned} (T^2 D^2 + UD) \theta + k \alpha - \beta &= 0 \\ -RD\theta + (SD + 1) \alpha - m\beta &= 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

Здесь  $\theta$  обозначает угол рыскания (фиг. 3), т. е. угол продольной оси корабля с заданным курсом,  $\alpha$  — угол дрейфа, т. е. угол продольной оси с вектором  $v$  скорости центра тяжести,  $\beta$  — отклонение руля. Остальные буквы (кроме  $D$ ) обозначают коэффициенты, которые при данной скорости могут считаться постоянными.

Уравнения автомата управления и рулевой машины будут

$$\begin{aligned} \sigma &= (L^2 D^2 + MD + l) (x - \theta) - n\beta \\ (V^2 D^2 + WD) \beta &= h\sigma \end{aligned} \quad (4.2)$$



Фиг. 3

Здесь  $\sigma$  — координата автомата,  $x$  — команда; через  $L^2$ ,  $M$ ,  $l$ ,  $n$  обозначены параметры настройки автомата, через  $V^2$ ,  $W$ ,  $h$  — параметры рулевой машины.

Согласно первому уравнению автомат вообще реагирует на угол рыскания, угловую скорость и ускорение, регистрируемые чувствительными элементами, и на сигнал, пропорциональный углу отклонения руля, передаваемый обратной связью.

Чтобы уменьшить число постоянных параметров, введем новые переменные  $t'$ ,  $\alpha'$ ,  $\sigma'$ ,  $\beta'$  при помощи соотношений

$$t = \frac{T^2}{U} t', \quad \alpha = \frac{R}{S} \alpha', \quad \sigma = \frac{U^3 W}{T^4 h} \sigma', \quad \beta = \frac{U^2}{T^2} \beta' \quad (4.3)$$

и заметим, что

$$D = \frac{U}{T^2} D' \quad \left( D' = \frac{d}{dt'} \right)$$

Преобразуя уравнения, найдем

$$\begin{aligned} (D'^2 + D') \theta + k' \alpha' - \beta' &= 0 \\ -S' D' \theta + (S' D' + 1) \alpha' - m' \beta' &= 0 \\ \sigma' &= (L'^2 D'^2 + M' D' + l') (x - \theta) - n' \beta' \\ (V'^2 D'^2 + D') \beta' &= \sigma' \end{aligned}$$

При этом

$$\begin{aligned} k' &= \frac{RT^2}{SU^2} k, & S' &= \frac{U}{T^2} S, & m' &= \frac{SU^2}{RT^2} m, & L'^2 &= \frac{h}{UW} L^2 \\ M' &= \frac{T^2 h}{U^3 W} M, & l' &= \frac{T^4 h}{U^3 W} l, & n' &= \frac{T^2 h}{UW} n, & V'^2 &= \frac{U}{T^2 W} V^2 \end{aligned}$$

Нештрихованные и штрихованные постоянные входят в первоначальные и преобразованные уравнения совершенно аналогичным образом за исключением того, что постоянным  $T$ ,  $U$ ,  $W$ ,  $R$ ,  $h$  в первой системе

соответствуют величины 1, 1, 1,  $S'$ , 1 во второй. Поэтому можно просто предположить, что рассматриваемое преобразование уже сделано, и, опуская штрихи, положить в первоначальных уравнениях

$$T = U = W = 1, \quad R = S, \quad h = 1$$

Разрешая затем уравнения (4.1) формально относительно  $\theta, \alpha$ , а уравнения (4.2) относительно  $\sigma, \beta$ , получим матричные уравнения

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \theta \\ \alpha \end{vmatrix} &= X_1(D) \begin{vmatrix} \sigma \\ \beta \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \sigma \\ \beta \end{vmatrix} &= -X_2(D) \begin{vmatrix} \theta \\ \alpha \end{vmatrix} + X_{2x}(D) x \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} X_1(D) &= \frac{1}{\Delta_1(D)} \begin{vmatrix} 0 & SD + 1 - km \\ 0 & mD^2 + (m + S)D \end{vmatrix} \\ X_2(D) &= \frac{L^2D^2 + MD + l}{\Delta_2(D)} \begin{vmatrix} V^2D^2 + D & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ X_{2x}(D) &= \frac{L^2D^2 + MD + l}{\Delta_2(D)} \begin{vmatrix} V^2D^2 + D \\ 1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\Delta_1(D) = SD^3 + (S + 1)D^2 + (Sk + 1)D, \quad \Delta_2(D) = V^2D^2 + D + n$$

Трансмиттанс цепи, разомкнутой на входе второго звена, будет

$$X(D) = X_1(D) X_2(D) = \frac{L^2D^2 + MD + l}{\Delta_0(D)} \begin{vmatrix} SD + (1 - km) & 0 \\ mD^2 + (m + S)D & 0 \end{vmatrix}$$

где

$$\Delta_0(D) = \Delta_1(D) \Delta_2(D)$$

Отсюда

$$K(D) = \frac{(L^2D^2 + MD + l) [SD + (1 - km)]}{\Delta_0(D)}$$

$$\Delta(D) = \Delta_0(D) [1 + K(D)] = k_0D^5 + k_1D^4 + k_2D^3 + k_3D^2 + k_4D + k_5$$

причем

$$k_0 = SV^2, \quad k_1 = S(V^2 + 1) + V^2, \quad k_2 = S(L^2 + n + V^2k + 1) + V^2 + 1$$

$$k_3 = S(M + n + k) + L^2(1 - km) + n + 1$$

$$k_4 = S(l + kn) + M(1 - km) + n, \quad k_5 = l(1 - km)$$

Нетрудно убедиться, что те же выражения для  $K(D)$ ,  $\Delta(D)$  получаются при размыкании цепи на входе первого звена.

При исследовании устойчивости ограничимся частным случаем

$$L = M = V = 0$$

т. е. предположим, что автомат реагирует только на угол рыскания, а инерцией рулевой машины можно пренебречь.



Тогда характеристическое уравнение  $\Delta(\lambda) = 0$  может быть написано в виде

$$P(\lambda)n + Q(\lambda)l + R(\lambda) = 0$$

где

$$P(\lambda) = S\lambda^3 + (S+1)\lambda^2 + (Sk+1)\lambda$$

$$Q(\lambda) = S\lambda + (1 - km)$$

$$R(\lambda) = S\lambda^4 + (S+1)\lambda^3 + (Sk+1)\lambda^2$$

Полагая  $\lambda = i\omega$ , отделяем в характеристическом уравнении действительную и мнимую части и, разрешая два получившихся уравнения относительно  $n, l$ , выводим соотношения вида

$$n = \frac{\Lambda_n(\omega)}{\Lambda(\omega)}, \quad l = \frac{\Lambda_l(\omega)}{\Lambda(\omega)}$$

Эти соотношения могут рассматриваться как параметрические уравнения некоторой кривой  $N$  в плоскости  $nl$ . Она разбивает плоскость на области, в которых характеристическое уравнение имеет одно и то же число корней с положительной действительной частью<sup>[11]</sup>. Одной из этих областей будет область устойчивости (в ней число корней с положительной действительной частью равно нулю). При этом

$$\Lambda_n(\omega) = \omega^2 [-S^2\omega^2 + S^2k + km(S+1) - 1]$$

$$\Lambda_l(\omega) = \omega^2 [-S^2\omega^4 + (2S^2k - S^2 - 1)\omega^2 - (Sk+1)^2]$$

$$\Lambda(\omega) = -S(S+km)\omega^2 - (1 - km)(Sk+1)$$

Штриховку кривой производим по правилу Неймарка.

Особыми прямыми, соответствующими значениям  $\omega = 0, \infty$ , являются ось абсцисс и бесконечно удаленная прямая.

Если в характеристическом уравнении и в уравнении

$$P'(\lambda)n + Q'(\lambda)l + R'(\lambda) = 0$$

положить  $\lambda = \varepsilon$  и разрешить относительно  $n, l$ , то получатся параметрические уравнения дискриминантной кривой<sup>[12]</sup>

$$n = \frac{\Gamma_n(\varepsilon)}{\Gamma(\varepsilon)}, \quad l = \frac{\Gamma_l(\varepsilon)}{\Gamma(\varepsilon)}$$

где

$$\Gamma_n(\varepsilon) = 3S^2\varepsilon^4 + 2S(S+3-2km)\varepsilon^3 + [S^2k+4S+ \\ +3-3km(S+1)]\varepsilon^2 + 2(Sk+1)(1-km)\varepsilon$$

$$\Gamma_l(\varepsilon) = -\varepsilon^2[S\varepsilon^2 + (S+1)\varepsilon + (Sk+1)]^2$$

$$\Gamma(\varepsilon) = -2S^2\varepsilon^3 + S(-S-4+3km)\varepsilon^2 - 2(1-km)(S+1)\varepsilon - \\ - (1-km)(Sk+1)$$

Примем, например, для натуральных параметров корабля численные значения, приводимые в гл. VIII книги А. М. Басина<sup>[5]</sup>.

Тогда получим следующие значения параметров уравнений (до преобразования переменных):

$$T^2 = 0.6601, \quad U = 2.007, \quad k = -0.5281$$

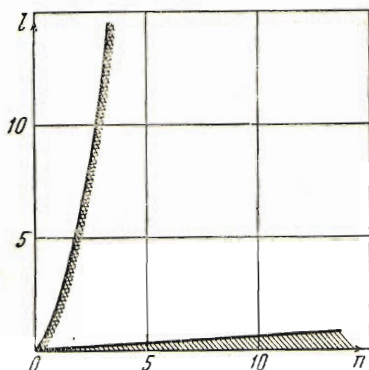
$$R = 0.6009, \quad S = 1.295, \quad m = 0.2331$$

После преобразования

$$k = -0.04016, \quad S = 3.938, \quad m = 3.066$$

Кривая  $N$  и дискриминантная кривая для этих параметров показаны на фиг. 4.

Кривая  $N$  и положительная часть оси абсцисс, заштрихованные по правилу Неймарка, выделяют область устойчивости. Дискриминантная кривая выделяет подобласть аperiodического затухания (показана сплошной штриховкой).



Фиг. 4

Автор выражает благодарность И. З. Пирогову, выполнившему все вычисления, необходимые для построения кривых.

**§ 5. Гироскопический стабилизатор.** В качестве второго примера, которым автор обязан Я. Н. Ройтенбергу, рассмотрим гироскопический стабилизатор, исследованный в его статье [13], откуда заимствованы уравнения.

Прибор предназначен для удержания в горизонтальном положении платформы, которая может качаться на горизонтальной оси. Он представляет собой гироскоп с тремя степенями свободы, кожух которого играет роль внутреннего карданова кольца, между тем как внешнее кольцо жестко связано с платформой, так что ось платформы является в то же время и осью внешнего кольца.

С этой осью при помощи зубчатой передачи соединен вал электромотора постоянного тока, который должен преодолевать действие внешних сил на платформу. Электромотор имеет независимое возбуждение, а ток в его якоре регулируется усилителем. Напряжение на вход усилителя поступает с потенциометра, укрепленного на оси кожуха гироскопа.

При воздействии на платформу внешних возмущающих сил, создающих момент относительно ее оси, гироскоп прецессирует вокруг оси своего кожуха, а установленный на кожухе потенциометр подает напряжение на вход усилителя. Полученное после усиления напряжение подводится к цепи якоря мотора, который развивает момент, противодействующий моменту внешних сил.

Гироскоп помимо управления мотором выполняет еще и функцию прямой стабилизации платформы, так как непосредственно после приложения внешнего момента, когда токи в усилителе и якоре электромотора, а значит и вращающий момент последнего еще не достигли нужной величины, уравновешение внешнего момента происходит не только за счет момента мотора, но и за счет гироскопического момента, развивающегося в результате прецессии гироскопа.



Уравнения системы при линейном законе включения потенциометра можно представить в виде

$$\begin{aligned} AD\omega - HD\beta - Ri &= 0 \\ H\omega + BD^2\beta &= 0 && \left( \begin{array}{l} \text{гироскопиче-} \\ \text{ская система} \end{array} \right) \\ \mu\omega + (\tau D + 1)i - pI &= 0 && \text{(мотор)} \\ -S\beta + (\sigma D + 1)I &= 0 && \text{(усилитель)} \end{aligned}$$

Здесь  $\omega$  — угловая скорость платформы,  $\beta$  — угол прецессии кожуха гироскопа относительно платформы,  $i$  и  $I$  — токи в цепи якоря мотора и в усилителе,  $A$  — момент инерции платформы и гироскопической системы относительно оси платформы вместе с приведенным моментом инерции якоря мотора,  $B$  — экваториальный момент инерции гироскопа,  $H$  — его кинетический момент,  $\mu$ ,  $\tau$ ,  $p$ ,  $R$ ,  $S$ ,  $\sigma$  — параметры мотора и усилителя.

Принимая за первое звено цепи гироскопическую систему с мотором, а за второе звено — усилитель, имеем матричные уравнения

$$\begin{pmatrix} \omega \\ \beta \\ i \end{pmatrix} = X_1(D) I, \quad I = -X_2(D) \begin{pmatrix} \omega \\ \beta \\ i \end{pmatrix}$$

в которых

$$X_1(D) = \frac{p}{\Delta_1(D)} \begin{pmatrix} BRD^2 \\ -HR \\ D(ABD^2 + H^2) \end{pmatrix}$$

$$X_2(D) = \frac{S}{\Delta_2(D)} \parallel 0, \quad -1, \quad 0 \parallel$$

$$\Delta_1(D) = AB[\tau D^4 + D^3 + (n + q^2\tau)D^2 + q^2D], \quad \Delta_2(D) = \sigma D + 1$$

$$n = \frac{R\mu}{A}, \quad q = \frac{H}{\sqrt{AB}}$$

Трансмиттанс цепи, разомкнутой на выходе второго звена, будет

$$X(D) = X_2(D) X_1(D) = \frac{mH^2}{\Delta_0(D)}$$

где

$$m = \frac{RSp}{H}, \quad \Delta_0(D) = \Delta_1(D) \Delta_2(D).$$

Так как здесь  $X(D)$  — скаляр, то

$$K(D) = X(D)$$

и характеристический определитель будет

$$\Delta(D) = \Delta_0(D) [1 + K(D)] = \Delta_0(D) + mH^2$$

или

$$\begin{aligned} \Delta(D) = AB & [\sigma\tau D^5 + (\sigma + \tau) D^4 + (1 + n\sigma + q^2\sigma\tau) D^3 + \\ & + (n + q^2\sigma + q^2\tau) D^2 + q^2D + m q^2] \end{aligned}$$

**§ 6. Характеристическое уравнение измененной системы.** В качестве обобщения задачи § 3 рассмотрим следующую: зная характеристический определитель  $\Delta_0(D)$  линейной системы

$$f_0(D)y = 0$$

найти определитель  $\Delta(D)$  измененной системы

$$f(D)y = 0$$

При этом, имея в виду приложения к частотным методам исследования устойчивости, требуется дать такое правило, которое позволяло бы определять отношение  $\Delta(i\omega)/\Delta_0(i\omega)$  как вычислительным, так и экспериментальным путем.

Предполагается, что  $f_0(D)$ ,  $f(D)$  — квадратные матрицы одного и того же порядка  $n$  и что матрица

$$\delta f(D) = f(D) - f_0(D)$$

имеет ненулевые элементы только в строках с номерами  $j_1, \dots, j_p$  и столбцах с номерами  $k_1, \dots, k_q$ . Полагая

$$u = \begin{pmatrix} y_{k_1} \\ \vdots \\ y_{k_q} \end{pmatrix}$$

и представляя второе матричное уравнение в форме

$$f_0(D)y = -\delta f(D)y$$

можем заменить его эквивалентной системой

$$f_0(D)y = \varepsilon v, \quad u = \mathcal{C}y, \quad v = -X_2(D)u \quad (6.1)$$

где  $\varepsilon$  есть матрица типа  $n \times p$ , у которой элементы  $\varepsilon_{j_1,1}, \dots, \varepsilon_{j_p,p}$  равны единице, а прочие — нули; затем  $\mathcal{C}$  есть матрица типа  $q \times n$ , у которой элементы  $\mathcal{C}_{1,k_1}, \dots, \mathcal{C}_{q,k_q}$  равны единице, а прочие — нули, и, наконец,

$$X_2(D) = \begin{pmatrix} \delta f_{j_1, k_1}(D) & \dots & \delta f_{j_1, k_q}(D) \\ \dots & \dots & \dots \\ \delta f_{j_p, k_1}(D) & \dots & \delta f_{j_p, k_q}(D) \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

Три уравнения (6.1) можно рассматривать как уравнения звеньев замкнутой цепи. Операционные матрицы звеньев суть  $f_0(D)$ ,  $E_q$ ,  $E_p$  и характеристический определитель разомкнутой цепи будет  $\Delta_0(D)$ . Разрешая первое уравнение относительно  $y$ , получим

$$y = X_1'(D)v, \quad u = \mathcal{C}y, \quad v = -X_2(D)u \quad (6.3)$$



где

$$X_1'(D) = \frac{1}{\Delta_0(D)} \begin{vmatrix} F_{1, j_1}^{(0)}(D) & \dots & F_{1, j_p}^{(0)}(D) \\ \dots & \dots & \dots \\ F_{n, j_1}^{(0)}(D) & \dots & F_{n, j_p}^{(0)}(D) \end{vmatrix}$$

а  $F_{jk}^{(0)}(D)$  суть элементы матрицы  $F_0(D)$ , присоединенной к  $f_0(D)$ .  
Определитель замкнутой цепи согласно (3.6) есть

$$\Delta(D) = \Delta_0(D) [1 + K(D)]$$

причем  $1 + K(D)$  равен определителю любой из двух матриц

$$E_q + \mathcal{C}X_1'(D)X_2(D), \quad E_p + X_2(D)\mathcal{C}X_1'(D)$$

представляющих возвратные разности, получаемые при размыкании цепи после звена  $\alpha_u$  или после звена  $\alpha_v$ .

Полагая  $X_1(D) = \mathcal{C}X_1'(D)$  или

$$X_1(D) = \frac{1}{\Delta_0(D)} \begin{vmatrix} F_{k_1, j_1}^{(0)}(D) & \dots & F_{k_1, j_p}^{(0)}(D) \\ \dots & \dots & \dots \\ F_{k_q, j_1}^{(0)}(D) & \dots & F_{k_q, j_p}^{(0)}(D) \end{vmatrix} \quad (6.4)$$

представим возвратные разности в более простом виде:

$$E_q + X_1(D)X_2(D), \quad E_p + X_2(D)X_1(D) \quad (6.5)$$

и тогда

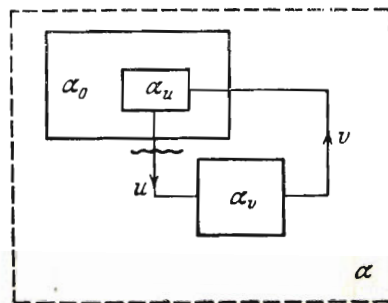
$$\Delta(D) = \Delta_0(D) \det [E_q + X_1(D)X_2(D)] = \Delta_0(D) \det [E_p + X_2(D)X_1(D)] \quad (6.6)$$

Можно также исключить  $y$  из системы (6.3). Получающиеся таким путем уравнения

$$u = X_1(D)v, \quad v = -X_2(D)u \quad (6.7)$$

следует рассматривать как уравнения двузвенной цепи.

Размыкая цепь на выходе звена  $\alpha_u$ , можно экспериментально измерить элементы матрицы  $E_q + X_1(i\omega)X_2(i\omega)$ , сравнивая синусоидальные сигналы, подаваемые на вход звена  $\alpha_v$  с ответными сигналами, снимаемыми на выходе звена  $\alpha_u$ . Замкнутая цепь и место размыкания показаны на схеме (фиг. 5), где звено  $\alpha_u$ , составляющее часть неизменной системы  $\alpha_0$ , изображено внутри последней. Звено  $\alpha_v$  представляет совокупность тех элементов, которыми система  $\alpha_0$  отличается от неизменной системы  $\alpha$ .



Фиг. 5

**§ 7. Многоконтурные замкнутые цепи.** Теоремы, полученные в § 3 и 6, могут быть применены для вычисления характеристических определителей и частотного исследования устойчивости сложных многоконтурных цепей. Для этого нужно сначала путем устранения некоторых элементов и внутренних связей обратить заданную систему в пассивную, устойчивость которой при любой ее сложности не нуждается в аналитической проверке. После этого нужно вернуться к первоначальной системе, применяя в любой последовательности и комбинациях метод блокировки, т. е. объединения того или другого внутреннего контура в одно звено с матричной координатой (§ 3), и метод постепенного восстановления отброшенных элементов и связей (§ 6). На каждом этапе нужно, как обычно, проверять нули определителей соответствующих возвратных разностей<sup>[9]</sup>, гл. V, VIII, которые можно находить как вычислительным путем из уравнений, так и экспериментально — путем снятия частотных характеристик реальных элементов или групп элементов.

Поступила 17 VI 1950

Московский государственный  
университет

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Булгаков Б. В. Колебания. М.—Л. 1949. Т. I. Гл. 1.
2. Streccker F. und Feldtkeller R. Grundlagen der Theorie des allgemeinen Vierpols. Elektrische Nachrichtentechnik. 1929. Bd. 6. S. 93—112.
3. Боде Г. Теория цепей и проектирование усилителей с обратной связью. Перев. Колосова А. А. и Мееровича Л. А. М. 1948.
4. Лузин Н. Н. К изучению матричной теории дифференциальных уравнений. Автоматика и телемеханика. 1940. № 5. Стр. 4—66. [
5. Басин А. М. Теория устойчивости на курсе и поворотливости судна. Л.—М. 1949.
6. Ведров В. С. Динамическая устойчивость самолета. 1938.
7. Weiss H. K. Constant Speed Control Theory. Journal of the Aeronautical Sciences. 1939. Vol. 6. No. 4. P. 147—152.
8. Grammel R. Der Kreiselsel, seine Theorie und seine Anwendungen; Braunschweig. 1920.
9. Мак-Колл Л. А. Основы теории сервомеханизмов. Перев. под ред. Я. З. Цыпкина. М. 1947.
10. The Principles and Practice of Automatic Control. The Engineer. 1937. Vol. CLXIII. No. 4228—4241. Русский перевод под названием «Автопилоты» под ред. Г. В. Щипанова. М.—Л. 1939.
11. Неймарк Ю. И. Об определении значений параметров, при которых система автоматического регулирования устойчива. Автоматика и телемеханика. 1948. Т. IX. № 3. Стр. 190.
12. Булгаков Б. В. Дискриминантная кривая и область апериодической устойчивости. ПММ. 1950. Т. XIV. Вып. 5. Стр. 453.
13. Ройтенберг Я. Н. Автоколебания гироскопических стабилизаторов. ПММ. 1947. Т. XI. Вып. 2. Стр. 271—280.