Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XIV, 1950

РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ПО МЕТОДУ СИММЕТРИИ

Н. В. Ламбин

(Минск)

Пусть плоскость комплексного переменного z разделена аналитической кривой L на две части D_1 и D_2, в каждой из которых определена аналитическая функция ($w_1(z)$ в D_1 и $w_2(z)$ в D_2), имеющая наперед заданные особенности и являющаяся характеристической функцией некоторого плоского векторного поля. Условия на границе состоят в том, что нормальная составляющая векторного поля остается при переходе через границу непрерывной, а касательная претерпевает разрыв первого рода, причем отношение предельных значений остается постоянным для всей границы.

Эта краевая задача решается следующим методом. Функции $w_1(z)$ и $w_2(z)$ аналитически продолжаются через кривую L. Граничные условия заменяются эквивалентными им функциональными уравнениями, верными в некоторой области, содержащей кривую L. Специальным приемом задача переносится на некоторую риманову поверхность, на которой полученные функциональные уравнения оказываются верными во всей области существования аналитически продолженных функций w_1 и w_2. Условия преобразованной задачи инвариантны относительно конформных отображений. Указан достаточно широкий класс случаев, когда можно конформным отображением свести задачу вновь к задаче на плоскости и притом так, чтобы во вторично преобразованной задаче граничная кривая была прямой или окружностью. Функциональные уравнения дают возможность по заданным первоначально особенностям функций w_1 и w_2 найти все их особенности и по особенностям самые функции.

Каждая краевая задача этого вида может быть интерпретирована и как задача о фильтрации жидкости и как задача о магнитном или электрическом поле. Разница лишь в том, что задачи, имеющие практический интерес, характеризуются различными особыми точками функций w_1 и w_2: в случае фильтрации и в случае электрического поля мы имеем логарифмические точки ветвления (источники жидкости или точечные заряды), а в случае магнитного поля — полюса (диполи). При решении задачи эта разница несущественна.

1. Линии симметрии римановой поверхности. Пусть дана риманова поверхность Q. Назовем линией симметрии этой поверхности всякое связное и содержащее более одной точки множество C ее точек, которое обладает тем свойством, что существует конформное отображение второго рода римановой поверхности Q на нее же, оставляющее все точки множества C на месте. Риманову поверхность Q будем называть поврехностью симметрии для линии C, а указанное отображение — отображением симметрии.

Очевидно, что двукратное отображение симметрии есть тождественное отображение. Поэтому, если отображение симметрии переводит точку z в z^*, то при этом отображении точки z и z^* обмениваются местами. Такие точки будем называть симметричными относительно C. Имеем[1]:

$$z^{**} = z \qquad (1.1)$$

2. Случай односвязной римановой поверхности. Легко видеть, что если Q есть плоскость, то всякая прямая и окружность есть ее линия симметрии. Теория дробно-линейных отображений дает возможность доказать, что этим исчерпываются все линии симметрии плоскости.

Аналогично совокупность линий симметрии круга есть совокупность его неевклидовых прямых, т. е. прямых, проходящих через его центр, и круговых дуг, ортогональных к его окружности. Совокупность линий симметрии плоскости с исключенной точкой есть совокупность прямых и окружностей, проходящих через эту точку.

Докажем, что при конформном отображении римановой поверхности Q на другую риманову поверхность Q_1 линии симметрии переходят в линии симметрии, а пара симметричных точек в пару симметричных точек.

Для доказательства обозначим через C_1 образ линии C на поверхности Q_1. Обозначим через Q' риманову поверхность, полученную из Q отображением симметрии относительно C, а через Q_1' поверхность, полученную из Q' отображением посредством той же функции, которая реализует отображение Q на Q_1. Тогда поверхности Q_1, Q, Q', Q_1' получаются одна из другой конформными отображениями. В этой цепи отображений одно отображение второго рода. Следовательно, Q_1' получается из Q_1 отображением второго рода. Точки линии C остаются при этом на месте. Поверхность Q_1' совпадает с Q_1, так как Q_1 и Q_1' получаются из совпадающих поверхностей Q и Q' одним и тем же отображением.

Если рассматривать только пары точек, симметричных относительно C, то поверхности Q и Q' нет надобности различать. То же относится и к поверхностям Q_1 и Q_1'. Тогда из взаимно однозначного соответствия между точками этих поверхностей следует сохранение свойства симметричности двух точек при конформном отображении. Из этих соображений легко уяснить себе строение совокупности линий симметрии односвязной римановой поверхности; это будут образы прямых и окружностей при отображении плоскости на эту поверхность, если она эллиптического типа, и образы линий симметрии круга или плоскости с исключенной точкой, если она гиперболического или параболического типа.

3. Поверхность симметрии произвольной аналитической кривой. Докажем, что, задав любую аналитическую кривую, можно подобрать такую риманову поверхность, на которой она является линией симметрии, т. е. что всякая аналитическая кривая имеет поверхность симметрии.

Положим, что уравнение данной аналитической кривой L есть $z = \varphi(t)$, где t — действительный параметр, а $\varphi(t)$ — аналитическая функция

Тогда функцию $\varphi(t)$ можно рассматривать не только при действительных значениях t, но в некоторой области Q_t, содержащей отрезок действительной оси. Она отображает область Q_t на некоторую область Q_z, содержащую кривую L, конформно и взаимно однозначно.

Обозначим через $\psi(z)$ аналитическую функцию, реализующую обратное отображение Q_z на Q_t. Обозначим через $f(z)$ аналитическую функцию

$$f(z) = \varphi[\overline{\psi(z)}] \tag{3.1}$$

Тогда риманова поверхность этой функции есть искомая, а функция

$$F(z) = \overline{f(z)} = \varphi[\overline{\psi(z)}] \tag{3.2}$$

сопряженная с аналитической, реализует искомое конформное отображение (отображение симметрии).

В самом деле, функция $f(z)$, как и всякая аналитическая функция, отображает свою риманову поверхность Q на некоторую другую риманову поверхность Q_1. Функция $F(z)$ определена и однозначна на римановой поверхности Q, так как она отличается от $f(z)$ лишь знаком мнимой части. Функция $F(z)$ отображает Q на некоторую риманову поверхность Q_2. Точки кривой C остаются при этом на месте, что становится очевидным из (3.2), если принять во внимание, что $\overline{\psi(z)} = \psi(z)$ в точках кривой C.

Остается доказать, что Q_1 совпадает с Q.

Для доказательства обозначим через $F_1(z)$ функцию, обратную по отношению к $F(z)$. Имеем $F(z) = z$ на кривой C. Поэтому

$$F[F(z)] = z \qquad \text{на кривой } C \tag{3.3}$$

Так как обе части этого равенства — аналитические функции, то это равенство имеет место и в некоторой области, содержащей C.

Из (3.3) получаем

$$F_1\{F[F(z)]\} = F_1(z)$$

и по определению $F_1(z)$

$$F(z) = F_1(z)$$

Таким образом, функция $F(z)$ совпадает со своей обратной функцией. Поэтому и римановы поверхности этих функций совпадают, т. е. функция $F(z)$ отображает свою риманову поверхность Q на такую же поверхность, которую можно, следовательно, отожествить с Q. Итак всякая аналитическая кривая имеет поверхность симметрии.

Легко доказать, что из существования одной поверхности симметрии следует существование бесконечного множества их.

4. Краевая задача о распределении линий векторного поля. Пусть плоскость комплексного переменного z разделена аналитической кривой L на две части D_1 и D_2, в каждой из которых определена аналитическая функция: $w_1(z)$ в D_1 и $w_2(z)$ в D_2, являющаяся характеристической функцией плоского векторного поля.

На граничной кривой имеют место условия:

$$\frac{w_1(z) + \overline{w_1(z)}}{\mu_1} = \frac{w_2(z) + \overline{w_2(z)}}{\mu_2}, \qquad w_1(z) - \overline{w_1(z)} = w_2(z) - \overline{w_2(z)} \tag{4.1}$$

где μ_1 и μ_2 — постоянные положительные числа.

Равенства (4.1) эквивалентны условиям, что нормальная составляющая вектора поля остается при переходе через граничную кривую непрерывной, а касательная составляющая терпит разрыв в отношении, равном отношению чисел μ_1 и μ_2.

Уравнения (4.1) могут быть заменены функциональными уравнениями, верными не только на граничной кривой, но и в некоторой содержащей ее области, а именно уравнениями [2]

$$\frac{w_1(z)+\overline{w_1(z^*)}}{\mu_1}=\frac{w_2(z)+\overline{w_2(z^*)}}{\mu_2}, \qquad w_1(z)-\overline{w_1(z^*)}=w_2(z)-\overline{w_2(z^*)} \tag{4.2}$$

где z^* есть точка, симметричная с z относительно кривой L.

Возможность такой замены следует из того, что на кривой L уравнения (4.2) обращаются в (4.1) и, следовательно, имеют место. В то же время левые и правые части (4.2) — аналитические функции и из равенства их на некоторой кривой следует равенство в некоторой содержащей ее области.

Из (4.2) следует аналитическая продолжимость функций $w_1(z)$ и $w_2(z)$ через любую точку линии L. В самом деле, около любой точки, принадлежащей L, можно выделить такую окрестность $D^{(1)}$, которая делится кривой L на две части $D_1^{(1)}$ и $D_2^{(1)}$, симметричные относительно L.

Пусть $w_1(z)$ определена по смыслу задачи в $D_1^{(1)}$, а $w_2(z)$ в $D_2^{(1)}$. Тогда функция $\overline{w_1(z^*)}$ определена в $D_2^{(1)}$, а функция $\overline{w_2(z^*)}$ в $D_1^{(1)}$.

Определим функции $\overline{w_1(z^*)}$ и $w_2(z)$ в $D_1^{(1)}$ как решения уравнений (4.2) относительно $\overline{w_1(z^*)}$ и $w_2(z)$. Аналогично определим $w_1(z)$ и $\overline{w_2(z^*)}$ в $D_2^{(1)}$. Определенные таким образом функции будут аналитическими в $D_1^{(1)}$ и $D_2^{(1)}$ и непрерывными в $D^{(1)}$. Этого достаточно, чтобы утверждать, что они аналитические в $D^{(1)}$. Если линия L есть прямолинейный отрезок или дуга окружности, то всякой точке z соответствует одна и только одна точка z^*, так как в этих случаях линия L есть линия симметрии плоскости.

Это не будет так ни для какой другой кривой, так как прямые и окружности — единственные линии симметрии плоскости. В этих случаях будем искать поверхность симметрии Q кривой L и рассматривать задачу о распределении векторного поля не на плоскости, а на этой римановой поверхности. Последнее может быть сделано следующим образом.

Обозначим через P_1 совокупность всех точек Q, имеющих комплексные координаты, принадлежащие области D_1, т. е. области, где $w_1(z)$ интерпретирует векторное поле. Если область P_1 связна, то определим в P_1 аналитическую функцию, приписывая каждой ее точке с комплексной координатой z значение $w_1(z)$ в области D_1. Если P_1 не связна, то найдем такую ее связную часть $P_1^{(1)}$, которая не является частью связной области, принадлежащей P, и сделаем то же самое для $P_1^{(1)}$.

Аналогично поступим с областью D_2 Если случится, что P_1 и аналогичная область P_2 для D_2 не связны и, таким образом, окажется много возможностей выбора, то нужно позаботиться о том, чтобы при замене областей D_1 и D_2 построенными областями $P_1^{(1)}$ и $P_2^{(1)}$ их общая граничная линия L не была утрачена.

Таким образом, на римановой поверхности Q или на некоторой ее части определены аналитические функции. Они могут удовлетворять на этой поверхности функциональным уравнениям, выражающим условие, что в различных точках римановой поверхности, имеющих одну и ту же комплексную координату, значения функции одни и те же.

Все условия перенесенной, таким образом, на риманову поверхность задачи инвариантны относительно всякого конформного отображения.

В самом деле, условия эти следующие:

(А) Функциональные уравнения, полученные из граничных условий.

(В) Функциональные уравнения, возникшие при перенесении задачи на риманову поверхность, выражающие равенство значений функции на разных листах римановой поверхности в точках с одинаковой комплексной координатой.

(С) Условия об особых точках функций $w_1(z)$ и $w_2(z)$, состоящие в том, что функции эти не могут иметь особенностей в тех областях, где они интерпретируют векторное поле, кроме особенностей, вытекающих из физических условий задачи (например, полюс первого порядка в бесконечно удаленной точке для однородного векторного поля).

Условия (А) инвариантны в силу инвариантности симметрии при конформном отображении. Условия (В) инвариантны в силу того, что всякое уравнение вида $f(z_1) = f(z_2)$ переходит при конформном отображении в такое же уравнение для образов точек z_1 и z_2. Наконец, условия (C) инвариантны потому, что при конформном отображении всякой особой точке z_0 функции $f(z)$ отвечает особая точка того же типа в точке, соответствующей z_0. Можно искать отображение, упрощающее задачу.

Если построенная поверхность симметрии граничной линии L односвязна, то она может быть отображена либо на плоскость, либо на плоскость с исключенной точкой, либо на круг. Во всех трех случаях граничная кривая перейдет или в прямую или в окружность.

Таким образом, во всех тех случаях, когда граничная кривая имеет односвязную поверхность симметрии, задача может быть приведена к задаче с граничной кривой в форме окружности или прямой линии.

5. Задача об эллипсе. В качестве примера рассмотрим случай, когда граничная кривая L есть эллипс с фокусами $\pm c$, $c > 0$, и полуосями a и b, $a > b > 0$. Положим, что функция, интерпретирующая векторное поле, не имеет особенностей внутри эллипса. Тогда

$$\varphi(t) = \frac{a+b}{2} e^{it} + \frac{a-b}{2} e^{it}, \qquad \psi(z) = \frac{1}{i} \log \frac{z + \sqrt{z^2 - c^2}}{a+b}$$

$$\left(\sqrt{z^2 - c^2} > 0 \text{ при } z > c, \ \log 1 = 0 \right)$$

Подставляя эти значения в (3.1), получаем

$$f(z) = \frac{a^2 + b^2}{c^2} z - \frac{2ab}{c^2} \sqrt{z^2 - c^2} \qquad \left(\sqrt{z^2 - c^2} > 0 \text{ при } z > c \right)$$

Риманова поверхность Q этой функции, являющаяся поверхностью симметрии эллипса, двулистна и имеет точки ветвления $\pm c$. Оговорка о знаке $\sqrt{z^2 - c^2}$ относится к тому листу поверхности на котором расположен эллипс L. Его считаем первым листом.

Функцию $w_1(z)$ будем рассматривать как заданную на первом листе этой римановой поверхности, вне эллипса. Функцию $w_2(z)$ будем рассматривать как заданную на обоих листах римановой поверхности и имеющую одни и те же значения на обоих ее листах.

Таким образом, при перенесении задачи на риманову поверхность в данном случае возникает добавочное функциальное уравнение для $w_2(z)$, но не для $w_1(z)$. Полученная поверхность симметрии может быть конформно отображена на плоскость τ.

Отображающая функция дается уравнением

$$z = \frac{c}{2}\left(\frac{\tau}{c} + \frac{c}{\tau}\right)$$

При этом отображении внешности D_1 эллипса на первом листе поверхности, т. е. той области, где функция $w_1(z)$ интерпретирует векторное поле, отвечает область $D_1^{(\tau)}$, определенная неравенством

$$|\tau| > r = c\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$$

Самый эллипс переходит в окружность $|\tau| = r$. Внутренности D_2 эллипса на первом листе, разрезанной по прямолинейному отрезку, соединяющему фокусы эллипса, отвечает кольцо $D_2^{(\tau)}$

$$c < |\tau| < r$$

Разрез переходит в окружность $|\tau| = c$. Остальная часть римановой поверхности переходит во внутренность круга $|\tau| < c$.

Функция $w_2(z)$ голоморфна и однозначна в D_2. Поэтому функция $w_2[z(\tau)]$ голоморфна и однозначна в кольце $D_2^{(\tau)}$ и, следовательно, разлагается в $D_2^{(\tau)}$ в ряд Лорана

$$w_2[z(\tau)] = \sum_{k=-\infty}^{k+\infty} a_k \tau^k \tag{5.1}$$

Этот ряд сходится как внутри кольца, так и на его границе.

На окружности $|\tau| = r$ он сходится в силу аналитической продолжимости функции $w_2(z)$ через любую точку эллипса L.

На окружности $|\tau| = c$ он сходится в силу того, что ни одна точка окружности не является особой точкой $w_2[z(\tau)]$.

Для точек $|\tau| = c$, $\tau \neq \pm c$ это следует из условий задачи: функция $w_2(z)$ не имеет особенностей внутри эллипса.

Из этого же обстоятельства следует, что $w_2[z(\tau)]$ однозначна и ограничена вблизи точек $\tau = \pm c$ и эти точки могут быть лишь устранимыми особыми точками.

Точки, симметричные относительно эллипса, переходят при отображении z на τ в точки, симметричные относительно окружности $|\tau| = r$, т. е. в точки, связанные равенством $\tau_1\bar{\tau}_2 = r^2$.

Точки с одной и той же комплексной координатой переходят в точки, связанные равенством $\tau_1\tau_2 = c^2$.

Теперь выберем $|\tau|$ настолько близким к c, чтобы точка c^2/τ принадлежала области сходимости ряда (5.1). Тогда в силу равенства значений $w_2(z)$ на двух листах Q можем написать

$$w_2\left[z\left(\frac{c^2}{\tau}\right)\right]=\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} a_k\frac{c^{2k}}{\tau^k}=\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} a_k\tau^k$$

Следовательно,

$$a_{-k}=a_k c^{2k}$$

Подставляя в (5.1), получаем

$$w_2[z(\tau)]=a_0+\sum_{k=1}^{\infty} a_k c^k\left(\frac{\tau^k}{c^k}+\frac{c^k}{\tau^k}\right) \tag{5.2}$$

Выберем $|\tau|$ настолько близким к r, чтобы точка $r^2/\bar{\tau}$ принадлежала области сходимости ряда (5.2); это дает возможность по формулам (4.2) найти ряд Лорана для $w_1[z(\tau)]$.

В самом деле, исключая $\overline{w_1(z^*)}$ из (4.2) и решая полученное уравнение относительно $w_1(z)$, получаем

$$w_1(z)=\lambda_1 w_2(z)+\lambda_2\overline{w_2(z^*)} \qquad \left(\lambda_1=\frac{\mu_1+\mu_2}{2\mu_1},\quad \lambda_2=\frac{\mu_1-\mu_2}{2\mu_1}\right)$$

или в плоскости τ

$$w_1[z(\tau)]=\lambda_1 w_2[z(\tau)]+\lambda_2\overline{w_2[z(r^2/\bar{\tau})]}$$

Подставляя (5.2) в это равенство, получаем

$$w_1[z(\tau)]=\lambda_1 a_0+\lambda_2\bar{a}_0+\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_1 a_k+\lambda_2\bar{a}_k c^{2k}/r^{2k})\tau^k+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_1 a_k c^{2k}+\lambda_2\bar{a}_k r^{2k})\tau^{-k} \tag{5.3}$$

Для решения задачи остается подчинить функцию $w_1(z)$ условиям об ее особенностях, которые могут быть различны в зависимости от физических условий задачи. Положим сначала, что имеем эллипс в бесконечном однородном векторном поле. Тогда при $|\tau|\geqslant r$ функция $w_1[(\tau)]$ имеет единственную особую точку: полюс первого порядка при $\tau=\infty$.

Поэтому ряд (5.3) сходится при сколь угодно больших значениях τ и является рядом Лорана функции в окрестности бесконечно удаленной точки. Она есть полюс первого порядка. Следовательно,

$$\lambda_1 a_k+\lambda_2\bar{a}_k\frac{c^{2k}}{r^{2k}}=0 \quad \text{при} \quad k>1$$

Это возможно лишь при условии $a_k=0$, так как $|\lambda_2|<\lambda_1$ и $c<r$. Из (5.3) имеем

$$w_1[z(\tau)]=\lambda_1 a_0+\lambda_2\bar{a}_0+\left(\lambda_1 a_1+\lambda_2\bar{a}_1\frac{c^2}{r^2}\right)\tau+(\lambda_1 a_1 c^2+\lambda_2\bar{a}_1 r^2)\frac{1}{\tau}$$

$$w_2[z(\tau)]=a_0+a_1 c\left(\frac{\tau}{c}+\frac{c}{\tau}\right)=a_0+a_1 z$$

Получили известный результат, что при поставленных условиях поле внутри эллипса однородно[3].

Для вычисления $w_1(z)$ нужно заменить τ его выражением через z $\tau = z + \sqrt{z^2 - c^2}$. Здесь из двух значений корня выбирается то, при котором $|\tau|$ имеет большее значение.

Рассмотрим другой случай, когда вне эллипса находится диполь, а на бесконечности поле исчезает, т. е. $w_1(z)$ имеет вне эллипса один и только один полюс, расположенный на конечной части плоскости.

Тогда $w_1[z(\tau)]$ имеет полюс первого порядка в некоторой точке τ_0, $|\tau_0| > r$, а при $\tau = \infty$ не имеет особенности. В этом случае ряд Лорана (5.3) уже не является сходящимся при сколь угодно больших значениях τ, но этим свойством обладает ряд Лорана функции

$$w_1[z(\tau)] - \frac{A}{\tau - \tau_0}$$

Этот ряд следующий:

$$w_1[z(\tau)] - \frac{A}{\tau - \tau_0} = \lambda_1 a_0 + \lambda_2 \bar{a}_0 - \frac{A}{\tau_0} +$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_1 a_k + \lambda_2 \bar{a}_k \frac{c^{2k}}{r^{2k}} - \frac{A}{\tau_0^{k+1}} \right) \tau^k + \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_1 a_k c^{2k} + \lambda_2 \bar{a}_k r^{2k}) \frac{1}{\tau^k} \qquad (5.4)$$

Рассуждая аналогично предыдущему, получим

$$\lambda_1 a_k + \lambda_2 \bar{a}_k \frac{c^{2k}}{\tau^{2k}} - \frac{A}{\tau_0^{k+1}} = 0 \qquad \text{при} \quad k \geqslant 1$$

Отделяя в этих равенствах действительную и мнимую части, получаем для действительной и мнимой частей каждого коэффициента a_k два уравнения с двумя неизвестными с детерминантом

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 c^{2k} / r^{2k} \\ \lambda_1 & -\lambda_2 c^{2k} / r^{2k} \end{vmatrix} \neq 0$$

Подставляя найденные значения в (5.4) и (5.2), получаем решение задачи.

Задача принципиально не усложняется, если число диполей больше единицы.

Поступила 27 VII 1950

ЛИТЕРАТУРА

1. Привалов И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного ОГИЗ. 1948.
2. Ламбин Н. В. Пластинка с отверстиями в плоском магнитном поле. ПММ. 1939. Т. III. Вып. 3.
Лукомская М. А. Решение некоторых задач о притоке жидкости к скважинам. ПММ. 1947. Т. XI. Вып. 6.
3. Стрэттон Дж. А. Теория электромагнетизма. ОГИЗ. 1948.