

О ДВИЖЕНИИ СИЛЬНО ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ ЦАПФОЙ И ПОДШИПНИКОМ

И. М. Ф и ш м а н

(Запорожье)

Задача о движении цапфы в подшипнике была впервые научно поставлена Н. П. Петровым в 1883 г. Н. Е. Жуковский и С. А. Чаплыгин, а также А. Зоммерфельд дали решение стационарной задачи о движении цапфы в подшипнике. В 1920 г. В. Гаррисон дал приближенное решение нестационарной задачи Петрова при малом зазоре между цапфой и подшипником.

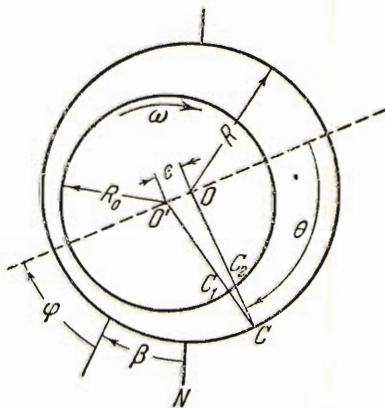
Во всех этих работах пренебрегают инерционными силами жидкости. В настоящей статье рассмотрен случай нестационарного движения цапфы в подшипнике, но с учетом инерционных сил жидкости.

При этом удается показать ошибочность результата В. Гаррисона и доказать устойчивость классического решения Жуковского и Чаплыгина. Рассмотрен также специальный случай периодической нагрузки на центр цапфы.

§ 1. Уравнения движения. Пусть сильно вязкая жидкость находится в узком канале между цилиндрической круговой цапфой радиуса R_0 и подшипником радиуса R бесконечной длины; подшипник находится в покое, а цапфа вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг своего центра O' , который в свою очередь движется по отношению к неподвижному центру O подшипника (фиг. 1).

Пусть P — величина нагрузки, приложенной к центру цапфы; β — угол между направлением нагрузки и фиксированным направлением ON , проходящим через центр подшипника; φ — угол между направлением нагрузки и концом линии центров, который соответствует наименьшей толщине смазочного слоя; θ — угол между прямой, соединяющей произвольную точку смазочного слоя с центром подшипника, и линией центров, измеряемый от конца линии центров, который соответствует наибольшей толщине смазочного слоя. Углы отсчитываются в направлении вращения цапфы, указанном стрелкой на чертеже.

Обозначим через e эксцентриситет — расстояние между центрами цапфы и подшипника, через $\rho = e/\delta$ — относительный эксцентриситет, где δ — зазор между цапфой и подшипником; $\delta = R - R_0$ предполагается малым по сравнению с R .



Фиг. 1

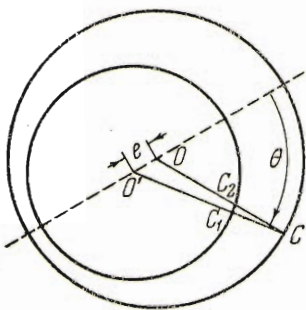
В дальнейшем предполагается, что смазывающий материал полностью заполняет пространство между цапфой и подшипником, причем течение смазки плоско-параллельное, ламинарное.

Будем пользоваться полярной системой координат r, ϑ , с началом O и полярной осью ON . Уравнения Навье-Стокса для плоского движения вязкой несжимаемой жидкости в полярных координатах имеют вид:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\vartheta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \vartheta} - \frac{v_\vartheta^2}{r} = \\ &= -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\vartheta}{\partial \vartheta} - \frac{v_r}{r^2} \right) \\ & \frac{\partial v_\vartheta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\vartheta}{\partial r} + \frac{v_\vartheta}{r} \frac{\partial v_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{v_r v_\vartheta}{r} = \\ &= -\frac{1}{\gamma r} \frac{\partial p}{\partial \vartheta} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_\vartheta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\vartheta}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\vartheta}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \vartheta} - \frac{v_\vartheta}{r^2} \right) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь v_r и v_ϑ — составляющие скорости произвольной точки смазочного слоя, p — избыток гидродинамического давления в произвольной точке

смазочного слоя над атмосферным, $\nu = \mu/\gamma$ — кинематический коэффициент вязкости смазочного материала, причем μ — коэффициент вязкости смазочного материала, γ — удельная плотность смазочного материала.



Фиг. 2

Если ввести функцию тока ψ , то получим

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial \vartheta} = \nu \Delta \Delta \psi \quad (1.2)$$

Обозначим через h отрезок CC_2 , указанный на фиг. 2. Тогда с точностью до малых величин порядка δ^2 будем иметь

$$h = \delta(1 + \rho \cos \theta) \quad (1.3)$$

Тогда уравнение цапфы будет $r = R - h$, а подшипника $r = R$.

Для составляющих скоростей v_r и v_ϑ произвольной точки цапфы получим

$$\begin{aligned} v_r &= \delta \left[\cos(\vartheta - \beta - \varphi) \frac{d\rho}{dt} + \rho \sin(\vartheta - \beta - \varphi) \frac{d}{dt}(\beta + \varphi) \right] \\ v_\vartheta &= (R - \alpha) \frac{d\alpha}{dt} - \delta \left[\sin(\vartheta - \beta - \varphi) \frac{d\rho}{dt} - \rho \cos(\vartheta - \beta - \varphi) \frac{d}{dt}(\beta + \varphi) \right] \end{aligned} \quad (1.4)$$

Для функции тока ψ , принимая во внимание, что $\vartheta = \pi + \beta + \varphi + \theta$, мы получим следующие граничные условия:

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} = 0 \quad \text{при } r = R \quad (1.5)$$

и с точностью до δ^2

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = - (R - \delta) \frac{d\alpha}{dt} - \delta \left[\sin \theta \frac{d\rho}{dt} - \rho \cos \theta \frac{d}{dt} (\beta + \varphi) \right]$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} = - R\delta \left[\cos \theta \frac{d\rho}{dt} + \rho \sin \theta \frac{d}{dt} (\beta + \varphi) \right] \quad \text{при } r = R - h \quad (1.6)$$

Таким образом, нужно проинтегрировать уравнение (1.2) при граничных условиях (1.5) и (1.6).

Рассмотрим приближенное решение уравнения (1.2), как это сделано и в классическом решении при малом зазоре между цапфой и подшипником. В первом приближении, пренебрегая левой частью (инерционными силами жидкости) в уравнении (1.2), имеем бигармоническое уравнение

$$\Delta \Delta \psi = 0$$

Далее из граничных условий (1.5) и (1.6) следует, что при изменении r от R до $R - h$ величина $\partial \psi / \partial r$ изменяется от нуля до величины порядка δ^2 , а $\partial \psi / \partial \vartheta$ — от нуля до величины порядка δ .

Поэтому в первом приближении можно пренебречь величиной $\partial \psi / \partial \vartheta$ в сравнении с $\partial \psi / \partial r$ и считать ψ функцией одного r . Таким образом, вместо бигармонического уравнения для функции тока ψ будем иметь уравнение

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0 \quad (1.7)$$

Отсюда, интегрируя, находим

$$\psi = \frac{a}{2} r^2 \ln r + (b - 2a) \frac{r^2}{4} + c \ln r + d \quad (1.8)$$

Определяя постоянные a, b, c и d из граничных условий (1.5) и (1.6), получим

$$2a = M + N, \quad \frac{4c}{R^2} = M - N, \quad b = -M \ln R + (1 - \ln R) N \quad (1.9)$$

где

$$M = -\frac{6R^2}{h^3} \left\{ h \frac{d\alpha}{dt} - h_0 + 2\delta \left[\sin \theta \frac{d\rho}{dt} - \rho \cos \theta \frac{d}{dt} (\beta + \varphi) \right] \right.$$

$$N = -\frac{R}{h^2} \left\{ 2h \frac{d\alpha}{dt} - 3h_0 + 6\delta \left[\sin \theta \frac{d\rho}{dt} - \rho \cos \theta \frac{d}{dt} (\beta + \varphi) \right] \right\} \quad (1.10)$$

Величина d определяется выбором значений ψ на цапфе и подшипнике, h_0 характеризует собой расход жидкости.

Проектируя действующие на цапфу силы: нормальное напряжение P_{rr} , касательное напряжение $P_{r\vartheta}$ и нагрузку P на направление линии центров и нормаль к ней, получим

$$-P \cos \varphi + R \int_0^{2\pi} P_{rr} \cos \theta d\theta - R \int_0^{2\pi} P_{r\vartheta} \sin \theta d\theta = 0$$

$$P \sin \varphi + R \int_0^{2\pi} P_{rr} \sin \theta d\theta + R \int_0^{2\pi} P_{r\vartheta} \cos \theta d\theta = 0 \quad (1.11)$$

При этом, как известно из гидродинамики:

$$p_{rr} = -p + \mu \frac{\partial v_r}{\partial r}, \quad p_{r\vartheta} = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \vartheta} + \frac{\partial v_\vartheta}{\partial r} - \frac{v_\vartheta}{r^2} \right) \quad (1.12)$$

Так как величина $\partial v_r / \partial r$ порядка δ и мала в сравнении с r , то будем считать $p_{rr} = -p$. Интегрирование по частям дает

$$\int_0^{2\pi} p_{rr} \cos \theta \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{\partial p}{\partial \theta} \sin \theta \, d\theta, \quad \int_0^{2\pi} p_{rr} \sin \theta \, d\theta = - \int_0^{2\pi} \frac{\partial p}{\partial \theta} \cos \theta \, d\theta$$

при этом использовано условие $p(0) = p(2\pi)$.

Уравнения (1.11) можно представить в виде

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial p}{\partial \theta} - p_{r\theta} \right) \cos \theta \, d\theta = \frac{1}{R} P \sin \varphi, \quad \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial p}{\partial \theta} - p_{r\theta} \right) \sin \theta \, d\theta = \frac{1}{R} P \cos \varphi \quad (1.13)$$

Здесь $\partial p / \partial \theta$ определяется через функцию ψ по формуле

$$\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = -\mu \frac{\partial \Delta \psi}{\partial r} \quad (1.14)$$

Мы берем производные по θ , а не по ϑ , так как они равны между собой. Подставив значение ψ из (1.8), получим

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = -2\mu a \quad (1.15)$$

Производная $\partial p / \partial \theta$, как и a , будет величиной порядка δ^{-2} .

Из (1.12) легко установить, что $p_{r\theta}$ порядка δ^{-1} . Пренебрегая в (1.13) величиной $p_{r\theta}$ в сравнении с $\partial p / \partial \theta$, в первом приближении получим

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial p}{\partial \theta} \cos \theta \, d\theta = \frac{1}{R} P \sin \varphi, \quad \int_0^{2\pi} \frac{\partial p}{\partial \theta} \sin \theta \, d\theta = \frac{1}{R} P \cos \varphi \quad (1.16)$$

В выражении для a из (1.9) можно также пренебречь величиной N в сравнении с M . Тогда для $\partial p / \partial \theta$ найдем

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = \frac{6\mu R^2}{h^3} \left\{ h \frac{d\alpha}{dt} - h_0 + 2\delta \left[\sin \theta \frac{d\rho}{dt} - \rho \cos \theta \frac{d}{dt} (\beta + \varphi) \right] \right\} \quad (1.17)$$

Прежде чем подставлять значение $\partial p / \partial \theta$ в (1.16), вычислим h_0 .

Так как p для каждого момента времени является периодической функцией θ с периодом 2π , то

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial p}{\partial \theta} \, d\theta = 0 \quad (1.18)$$

Подставив сюда значение $\partial p / \partial \theta$, найдем h_0 . Введем обозначения

$$J_k^{(m, n)} = \int_0^{2\pi} \frac{\sin^m \theta \cos^n \theta}{(1 + \rho \cos \theta)^k} \, d\theta \quad (1.19)$$

Тогда (1.18) запишется в виде

$$\delta \frac{d\alpha}{dt} J_2 - h_0 J_3 + 2\delta \frac{d\rho}{dt} J_3^{(1,0)} - 2\rho\delta \frac{d}{dt} (\beta + \varphi) J_3^{(0,1)} = 0$$

Здесь в интеграле $J_k^{(m,n)}$ при $m = n = 0$ верхние индексы опущены. Отсюда

$$h_0 = \frac{\delta}{J_3} \left[J_2 \frac{d\alpha}{dt} + 2J_3^{(0,1)} \frac{d\rho}{dt} - 2\rho J_3^{(0,1)} \frac{d}{dt} (\beta + \varphi) \right] \quad (1.20)$$

Проинтегрируем теперь уравнения (1.16), подставив найденное значение для h_0 в $\partial p / \partial \theta$. Получим

$$\frac{6\mu R^3}{\delta^2 J_3} \left[(J_3 J_2^{(0,1)} - J_2 J_3^{(0,1)}) \frac{d\alpha}{dt} + (J_3 J_3^{(1,1)} - J_3^{(1,0)} J_3^{(0,1)}) \frac{d\rho}{dt} - \right. \\ \left. - 2 (J_3 J_3^{(0,2)} - J_3^{(0,1)^2}) \rho \frac{d}{dt} (\beta + \varphi) \right] = P \sin \varphi \quad (1.21)$$

$$\frac{6\mu R^3}{\delta^2 J_3} \left[(J_3 J_2^{(1,0)} - J_2 J_3^{(1,0)}) \frac{d\alpha}{dt} + 2 (J_3 J_3^{(2,0)} - J_3^{(1,0)^2}) \frac{d\rho}{dt} - \right. \\ \left. - 2 (J_3 J_3^{(1,1)} - J_3^{(0,1)} J_3^{(1,0)}) \rho \frac{d}{dt} (\beta + \varphi) \right] = P \cos \varphi \quad (1.22)$$

Вычислив соответствующие интегралы, будем иметь

$$\frac{12\pi\mu R^3 \rho}{\delta^2 (2 + \rho^2) (1 - \rho^2)^{1/2}} \frac{d}{dt} (\alpha - 2\beta - 2\varphi) = P \sin \varphi \quad (1.23)$$

$$\frac{12\pi\mu R^3}{\delta^2 (1 - \rho^2)^{3/2}} \frac{d\rho}{dt} = P \cos \varphi \quad (1.24)$$

Эти уравнения получены В. Гаррисоном. Из них при

$$d\rho / dt = 0, \quad d\alpha / dt = 0, \quad d\beta / dt = 0,$$

т. е. в стационарном случае, будет

$$P = \frac{12\pi\mu R^3 \omega \rho}{\delta^2 (2 + \rho^2) (1 - \rho^2)^{1/2}}, \quad \varphi = \frac{\pi}{2} \quad (1.25)$$

Этот результат получается из решения Н. Е. Жуковского и С. А. Чаплыгина при малом зазоре между цапфой и подшипником.

Определим влияние инерционных сил жидкости. Для этого по значению ψ из (1.8) вычислим левую часть уравнения (1.2). Если в выражении для ψ заменить a , b и c их выражениями (1.10) через M и N , то после вычисления левой части (1.2) получим вместо (1.7) уравнение

$$\ln \frac{r}{R} \frac{\partial M}{\partial t} + \left(1 + \ln \frac{r}{R} \right) \frac{\partial N}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(M \frac{\partial M}{\partial \theta} - N \frac{\partial N}{\partial \theta} \right) \ln \frac{r}{R} + \\ + \frac{1}{2} \left(N \frac{\partial M}{\partial \theta} - M \frac{\partial N}{\partial \theta} \right) \frac{R^2}{r^2} \ln \frac{r}{R} - \frac{1}{2} (M + N) \left(\frac{\partial M}{\partial \theta} + \frac{\partial N}{\partial \theta} \right) \ln^2 \frac{r}{R} - \\ - \frac{1}{4} \left[(M + N) \frac{\partial M}{\partial \theta} - 2M \frac{\partial N}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{4} \left[(M + N) \frac{\partial M}{\partial \theta} - 2M \frac{\partial N}{\partial \theta} \right] \frac{R^2}{r^2} = \\ = \nu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (1.26)$$

В результате получим приближенное значение для функции тока ψ с учетом действия инерционных сил жидкости:

$$\begin{aligned} \psi = & \frac{1}{64} \frac{\partial}{\partial t} (M + N) r^4 \ln \frac{r}{R} - \frac{1}{128} \left(3 \frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial N}{\partial t} \right) r^4 + \\ & + \frac{1}{1024} \left[(7M + 5N) \frac{\partial M}{\partial \theta} + (5M + 3N) \frac{\partial N}{\partial \theta} \right] r^4 \left(4 \ln \frac{r}{R} - 1 \right) + \\ & + \frac{1}{96} \left(N \frac{\partial M}{\partial \theta} - M \frac{\partial N}{\partial \theta} \right) R^2 r^2 \left(2 \ln^3 \frac{r}{R} - 6 \ln^2 \frac{r}{R} + 9 \ln \frac{r}{R} - 6 \right) - \\ & - \frac{1}{1024} (M + N) \left(\frac{\partial M}{\partial \theta} + \frac{\partial N}{\partial \theta} \right) r^4 \left(8 \ln^2 \frac{r}{R} - 4 \ln \frac{r}{R} + 1 \right) + \\ & + \frac{1}{64} \left[(M + N) \frac{\partial M}{\partial \theta} - 2M \frac{\partial N}{\partial \theta} \right] R^2 r^2 (2 \ln^2 r - 4 \ln r + 3) - \\ & - \frac{1}{1024} \left[(31M + 21N) \frac{\partial M}{\partial \theta} + (9M + 7N) \frac{\partial N}{\partial \theta} \right] r^4 + \\ & + \frac{A}{2} r^2 (\ln r - 1) + \frac{B}{4} r^2 - \frac{C}{r^2} + D \end{aligned} \quad (1.27)$$

Здесь A, B, C, D не зависят от r и являются только функциями θ и $\dot{\theta}$. Эти величины определяются из граничных условий (1.5) и (1.6). Для A получим

$$\begin{aligned} 2A = & \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial t} (M - N) R^2 + \frac{1}{8} \left[(3M + 2N) \frac{\partial M}{\partial \theta} - M \frac{\partial N}{\partial \theta} \right] R^2 - \\ & - \frac{1}{4} \left[(M + N) \frac{\partial M}{\partial \theta} - 2M \frac{\partial N}{\partial \theta} \right] R^2 \ln R + \nu M \end{aligned} \quad (1.28)$$

Определим теперь $\partial p / \partial \theta$ на цапфе. Для этого воспользуемся формулой (1.14); подставим ψ и A согласно (1.27) и (1.28) и положим $r = R - h$. Получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma} \left[\frac{\partial p}{\partial \theta} \right]_{r=R-h} = & - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (M + N) (R - h)^2 \ln \left(1 - \frac{h}{R} \right) + \\ & + \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial t} (M - N) (R - h)^2 - \frac{1}{4} \left[(2M + N) \frac{\partial M}{\partial \theta} + \right. \\ & + \left. M \frac{\partial N}{\partial \theta} \right] (R - h)^2 \ln \left(1 - \frac{h}{R} \right) - \frac{R^2}{4} \left(N \frac{\partial M}{\partial \theta} - M \frac{\partial N}{\partial \theta} \right) \ln^2 \left(1 - \frac{h}{R} \right) + \\ & + \frac{1}{4} (M + N) \left(\frac{\partial M}{\partial \theta} + \frac{\partial N}{\partial \theta} \right) (R - h)^2 \ln^2 \left(1 - \frac{h}{R} \right) - \\ & - \frac{1}{8} \left[M \frac{\partial N}{\partial \theta} - (3M + 2N) \frac{\partial M}{\partial \theta} \right] (R - h)^2 - \\ & - \frac{1}{4} \left[(M + N) \frac{\partial M}{\partial \theta} - 2M \frac{\partial N}{\partial \theta} \right] R^2 \ln (R - h) - \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial t} (M - N) R^2 - \\ & - \frac{1}{8} \left[(3M + 2N) \frac{\partial M}{\partial \theta} - M \frac{\partial N}{\partial \theta} \right] R^2 + \\ & + \frac{1}{4} \left[(M + N) \frac{\partial N}{\partial \theta} - 2M \frac{\partial N}{\partial \theta} \right] R^2 \ln R - \nu M \end{aligned} \quad (1.29)$$

В этом выражении сохраним только слагаемые порядка δ^{-2} и δ^{-1} . При этом следует помнить, что производные по θ и t от M и N того же порядка относительно δ , что и M и N . Имеем

$$\left[\frac{\partial p}{\partial \theta} \right]_{r=R-h} = -\frac{1}{4} \gamma h^2 M \frac{\partial N}{\partial \theta} - \mu M \quad (1.30)$$

Пользуясь (1.20), для h_0 находим

$$h_0 = \frac{\delta}{2 + \rho^2} \left[2(1 - \rho^2) \frac{d\alpha}{dt} + 6\rho^2 \frac{d}{dt} (\beta + \varphi) \right] \quad (1.31)$$

Подставив это значение в (1.10), получим

$$M = -\frac{6R^2}{\delta^2(2 + \rho^2)} \frac{k_1 + k_2 \sin \theta + k_3 \cos \theta}{(1 + \rho \cos \theta)^3} \quad (1.32)$$

$$N = -\frac{R}{\delta(2 + \rho^2)} \frac{l_1 + l_2 \sin \theta + l_3 \cos \theta}{(1 + \rho \cos \theta)^2} \quad (1.33)$$

Здесь

$$k_1 = 3\rho^2 \left[\frac{d\alpha}{dt} - 2 \frac{d}{dt} (\beta + \varphi) \right], \quad l_1 = -2 \left[(1 - 4\rho^2) \frac{d\alpha}{dt} + 9\rho^2 \frac{d}{dt} (\beta + \varphi) \right]$$

$$k_2 = 2(2 + \rho^2) \frac{d\rho}{dt}, \quad l_2 = 6(2 + \rho^2) \frac{d\rho}{dt}$$

$$k_3 = 2(2 + \rho^2) \left[\frac{d\alpha}{dt} - 2 \frac{d}{dt} (\beta + \varphi) \right], \quad l_3 = 2\rho(2 + \rho^2) \left[\frac{d\alpha}{dt} - 3 \frac{d}{dt} (\beta + \varphi) \right]$$

Теперь из (1.30) имеем

$$\left[\frac{\partial p}{\partial \theta} \right]_{r=R-h} = -\frac{\gamma}{2\delta} \frac{3R^2}{(2 + \rho^2)^2} \frac{1}{(1 + \rho \cos \theta)^4} (L_1 + L_2 \sin \theta + L_3 \cos \theta + L_4 \sin^2 \theta + L_5 \sin \theta \cos \theta + L_6 \sin^3 \theta + L_7 \cos^3 \theta) - \mu M \quad (1.34)$$

Здесь

$$L_1 = (\rho k_1 + k_2) l_2, \quad L_5 = \rho k_1 l_3 + k_2 l_2 + 2\rho k_3 l_1 - k_3 l_3$$

$$L_2 = 2\rho k_1 l_1 + \rho k_2 l_2 - k_1 l_3 + \rho k_3 l_3, \quad L_6 = \rho(k_2 l_2 - k_3 l_3)$$

$$L_3 = k_1 l_2 + \rho k_2 l_2 + 2\rho k_3 l_2, \quad L_7 = -\rho(k_2 l_3 + k_3 l_2)$$

$$L_4 = \rho k_1 l_2 + 2\rho k_2 l_1 - k_2 l_3 - k_3 l_2,$$

Подставив (1.30) в уравнения движения (1.16), получим

$$-\frac{3\gamma}{2\delta} \frac{R^2}{(2 + \rho^2)^2} (L_1 J_4^{(0,1)} + L_2 J_4^{(1,1)} + L_3 J_4^{(0,2)} + L_4 J_4^{(2,1)} + L_5 J_4^{(1,2)} + L_6 J_4^{(3,1)} + L_7 J_4^{(0,4)}) + \frac{6\mu R^2}{\delta^2(2 + \rho^2)} (k_1 J_3^{(0,1)} + k_2 J_3^{(1,1)} + k_3 J_3^{(0,2)}) = \frac{1}{R} P \sin \varphi \quad (1.35)$$

$$-\frac{3}{2} \frac{\gamma}{\delta} \frac{R^3}{(2 + \rho^2)^3} (L_1 J_4^{(1,0)} + L_2 J_4^{(2,0)} + L_3 J_4^{(1,1)} + L_4 J_4^{(3,0)} + L_5 J_4^{(2,1)} + L_6 J_4^{(4,0)} + L_7 J_4^{(1,3)}) + \frac{6\mu R^2}{\delta^2(2 + \rho^2)} (k_1 J_3^{(1,0)} + k_2 J_3^{(2,0)} + k_3 J_3^{(1,1)}) = \frac{1}{R} P \cos \varphi \quad (1.36)$$

Подставив значения соответствующих интегралов, получим

$$\frac{12\pi\mu R^3\rho}{\delta^2(2+\rho^2)(1-\rho^2)^{1/2}} \frac{d}{dt}(\alpha - 2\beta - 2\varphi) + \frac{E}{\delta} = P \sin \varphi \quad (1.37)$$

$$\frac{12\pi\mu R^3}{\delta^2(1-\rho^2)^{3/2}} \frac{d\rho}{dt} + \frac{G}{\delta} = P \cos \varphi \quad (1.38)$$

где

$$E = -\frac{6\pi R^4\gamma}{\rho^2(2+\rho^2)(1-\rho^2)^{3/2}} \left[10(1-\rho^2) \frac{d\alpha}{dt} - 3(8-8\rho^2-\rho^4) \frac{d}{dt}(\beta + \varphi) - \right. \\ \left. - (2+\rho^2)(1-\rho^2)^{3/2} \left(5 \frac{d\alpha}{dt} - 12 \frac{d\beta}{dt} - 12 \frac{d\varphi}{dt} \right) \right] \frac{d\rho}{dt} \quad (1.39)$$

$$G = -\frac{6\pi R^4\gamma}{\rho^3(2+\rho^2)^2(1-\rho^2)^{3/2}} \left\{ (4-2\rho^2-5\rho^4+3\rho^6) \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 - \right. \\ - 2(10-5\rho^2-11\rho^4+6\rho^6)\rho^2 \frac{d\alpha}{dt} \frac{d}{dt}(\beta + \varphi) + 12(2-\rho^2-2\rho^4+\rho^6)\rho^2 \times \\ \times \left[\frac{d}{dt}(\beta + \varphi) \right]^2 - 3(2+\rho^2)^2(2-3\rho^2) \left(\frac{d\rho}{dt} \right)^2 - \\ - (2+\rho^2)(1-\rho^2)^{3/2} \left[\rho^2 \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 - 5\rho^2(2+\rho^2) \frac{d\alpha}{dt} \frac{d}{dt}(\beta + \varphi) + \right. \\ \left. + 6\rho^2(2+\rho^2) \left[\frac{d}{dt}(\beta + \varphi) \right]^2 - 6(2+\rho^2) \left(\frac{d\rho}{dt} \right)^2 \right] \right\} \quad (1.40)$$

Вторые слагаемые в (1.37) и (1.38) определяют собой влияние инерционных сил смазки на движение центра цапфы.

При учете сил инерции следовало бы учесть и влияние сил инерции цапфы. Оказывается, что при этом в формулах (1.37) и (1.38) получили бы еще слагаемые порядка δ^0 . Поэтому в первом приближении можно не учитывать силы инерции цапфы.

§ 2. Исследование движения цапфы при постоянной нагрузке.

Предположим, что на центр цапфы действует нагрузка, постоянная по величине и направлению. Положим в уравнениях (1.24) и (1.25) $P=P_0$, $d\beta/dt=0$. Имеем

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\omega}{2} - \frac{1}{2} \sigma P_0 \frac{2+\rho^2}{\rho} (1-\rho^2)^{1/2} \sin \varphi \quad (2.1)$$

$$\frac{d\rho}{dt} = \sigma P_0 (1-\rho^2)^{3/2} \cos \varphi \quad \left(\sigma = \frac{\delta^2}{12\pi\mu R^3} \right)$$

Разделим первое уравнение на второе и проинтегрируем результат. Получим уравнения траекторий центра цапфы

$$\sin \varphi = \frac{\omega}{5\sigma P_0} \frac{1}{\rho(1-\rho^2)^{1/2}} - \frac{k}{\rho} (1-\rho^2)^{1/2} \quad (2.2)$$

где k — постоянная интегрирования.

Траекториями центра цапфы будут точка с координатами $\rho = \rho_0$, $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, где ρ_0 определяется из (1.25) при $P = P_0$, и семейство замкнутых кривых, внутри которых эта точка находится. Все траектории находятся внутри окружности $\rho = 1$.

Таким образом, если исходить из уравнений движения (1.24) и (1.25), то при постоянной нагрузке на центр цапфы последний движется по одной из кривых семейства (2.4) и в то же время цапфа вращается вокруг своего центра с постоянной угловой скоростью ω . Этот результат был известен В. Гаррисону.

Исследуем теперь уравнения движения центра цапфы при постоянной нагрузке, полученные с учетом инерционных сил жидкости, т. е. уравнения (1.39) и (1.40). При $P = P_0$ и $d\beta/dt = 0$ они преобразуются к виду

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\omega}{2} - \frac{1}{2} \sigma P_0 \frac{1}{\rho} (2 + \rho^2)(1 - \rho^2)^{1/2} \sin \varphi + \delta \frac{R}{4\nu\rho^3(1 - \rho^2)} f \quad (2.3)$$

$$\frac{d\rho}{dt} = \sigma P_0 (1 - \rho^2)^{1/2} \cos \varphi - \delta \frac{R}{2\nu\rho^3(2 + \rho^2)^2} F \quad (2.4)$$

где

$$f = -5 [2(1 - \rho^2) - (2 + \rho^2)(1 - \rho^2)^{3/2}] \omega \frac{d\rho}{dt} + \\ + 3 [8 - 8\rho^2 - \rho^4 - 4(2 + \rho^2)(1 - \rho^2)^{3/2}] \frac{d\rho}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \quad (2.5)$$

$$F = [4 - 2\rho^2 - 5\rho^4 + 3\rho^6 - (2 + \rho^2)^2(1 - \rho^2)^{3/2}] \rho^2 \omega^2 - \\ - [2(10 - 5\rho^2 - 11\rho^4 + 6\rho^6) - 5(2 + \rho^2)^2(1 - \rho^2)^{3/2}] \rho^2 \omega \frac{d\varphi}{dt} + \\ + 6\rho^2 [2(2 - \rho^2 - 2\rho^4 + \rho^6) - (2 + \rho^2)^2(1 - \rho^2)^{3/2}] \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - \\ - 3(2 + \rho^2)^2 [2 - 3\rho^2 - 2(1 - \rho^2)^{3/2}] \left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 \quad (2.6)$$

Так как в общем виде найти решения уравнений (2.3) и (2.4) мы не можем, то приведем некоторые результаты качественного исследования. Для удобства введем декартовы координаты с центром в точке с координатами $\rho = \rho_0$, $\varphi = \frac{1}{2}\pi$. При этом

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi - \rho_0$$

Уравнения движения (2.3) и (2.4) примут вид:

$$\frac{dx}{dt} = X(x, y) + \delta X_1(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Y(x, y) + \delta Y_1(x, y) \quad (2.7)$$

где (2.8)

$$X(x, y) = \sigma P_0 (1 - \rho^2)^{1/2} \frac{x^2}{\rho^2} - \frac{1}{2} \left[\omega - \sigma P_0 (2 + \rho^2) \frac{y + \rho_0}{\rho^2} (1 - \rho^2)^{1/2} \right] (y + \rho_0)$$

$$Y(x, y) = \sigma P_0 x (y + \rho_0) \frac{1}{\rho^2} (1 - \rho^2)^{1/2} + \frac{x}{2} \left[\omega - \sigma P_0 \frac{2 + \rho^2}{\rho^2} (y + \rho_0) (1 - \rho^2)^{1/2} \right]$$

$$X_1(x, y) = - \frac{R}{4\nu\rho^4(2 + \rho^2)^2(1 - \rho^2)} [2x(1 - \rho^2)F + \rho(y + \rho_0)(2 + \rho^2)^2f] \quad (2.9)$$

$$Y_1(x, y) = - \frac{R}{4\nu\rho^4(2 + \rho^2)^2(1 - \rho^2)} [2(y + \rho_0)(1 - \rho^2)F - x\rho(2 + \rho^2)^2f]$$

Здесь производные $d\rho/dt$ и $d\varphi/dt$, входящие в X_1 и Y_1 через F и f , предполагаются согласно (2.1); $\rho^2 = x^2 + (y + \rho_0)^2$.

В дальнейшем будем заниматься следующей задачей: пусть известны траектории невозмущенной системы уравнений

$$\frac{dx}{dt} = X(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Y(x, y) \quad (2.10)$$

Требуется определить вид траекторий возмущенной системы уравнений (2.7) при условии, что параметр δ мал.

Поставленную задачу мы будем решать методом, изложенным в книге Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова [3].

Пусть решение системы (2.10) дано в виде

$$x = x(\tau, A), \quad y = y(\tau, A) \quad (\tau = \lambda t + \varphi_0) \quad (2.11)$$

где A , λ и φ_0 — постоянные, x и y — периодические функции τ периода 2π .

Будем считать A и φ_0 функциями t и подберем их таким образом, чтобы выражения (2.11) были решениями системы (2.7). При этом A и φ_0 определяются из системы

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= -\frac{\delta}{\Delta} \left(X_1 \frac{\partial y}{\partial \tau} - Y_1 \frac{\partial x}{\partial \tau} \right) \\ \frac{d\varphi_0}{dt} &= \frac{\delta}{\Delta} \left(X_1 \frac{\partial y}{\partial A} - Y_1 \frac{\partial x}{\partial A} \right) \end{aligned} \quad \Delta = \frac{\partial x}{\partial \tau} \frac{\partial y}{\partial A} - \frac{\partial y}{\partial \tau} \frac{\partial x}{\partial A} \quad (2.12)$$

Найти решение системы (2.12) не менее трудно, чем системы (2.7). Известно [3], что с точностью до δ^2 система уравнений (2.12) может быть заменена так называемой усредненной системой, полученной из (2.12) интегрированием по τ в пределах от нуля до 2π . Полученный результат следует затем разделить на 2π . Получим

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= -\frac{\delta}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\Delta} \left(X_1 \frac{\partial y}{\partial \tau} - Y_1 \frac{\partial x}{\partial \tau} \right) d\tau \\ \frac{d\varphi_0}{dt} &= \frac{\delta}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\Delta} \left(X_1 \frac{\partial y}{\partial A} - Y_1 \frac{\partial x}{\partial A} \right) d\tau \end{aligned} \quad (2.13)$$

Решение системы (2.13) можно найти при помощи одних только квадратур. Пусть точка с координатами $x = x_0$, $y = y_0$ — единственная стационарная точка системы (2.10). Пусть, кроме того, $X_1(x_0, y_0) = 0$, $Y_1(x_0, y_0) = 0$. Тогда эта точка будет единственной устойчивой по Ляпунову стационарной точкой системы уравнений (2.7), если в (2.13) $dA/dt < 0$, и неустойчивой, если $dA/dt > 0$. Причем, если стационарная точка окажется устойчивой, то траектории системы (2.7) асимптотически приближаются к этой точке.

Для рассматриваемой задачи найти решение системы (2.10) в виде (2.11) мы не можем. Поэтому займемся исследованием решений этой системы в окрестности начала координат $x = 0$, $y = 0$.

Разложим правые части системы (2.10) в ряды по степеням x и y . Ограничиваясь вторыми степенями координат, вместо (2.10) рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = -a_1^2 y + a_2 x^2 + a_3 y^2, \quad \frac{dy}{dt} = b_1^2 x + b_2 xy \quad (2.14)$$

где

$$a_1^2 = \frac{(2 - \rho_0^2 + 2\rho_0^4)\omega}{2(2 + \rho_0^2)(1 - \rho_0^2)}, \quad b_1^2 = \frac{(1 - \rho_0^2)\omega}{2 + \rho_0^2} \quad (2.15)$$

$$a_2 = -\frac{3}{4} \frac{\rho_0(2 - \rho_0^2)\omega}{(2 + \rho_0^2)(1 - \rho_0^2)}, \quad a_3 = -\frac{3}{4} \frac{\rho_0^3(3 - 2\rho_0^2)\omega}{(2 + \rho_0^2)(1 - \rho_0^2)^2}$$

$$b_2 = -\frac{3}{2} \frac{\rho_0(1 - 2\rho_0^2)\omega}{(2 + \rho_0^2)(2 - \rho_0^2)}$$

Решением системы (2.14) будут

$$x(t) = -A \sin a_1 b_1 t + \frac{A^2}{3a_1 b_1} (2b_1^2 a_3 - 2a_1^2 a_2 - a_1^2 b_2) \sin a_1 b_1 t \cos a_1 b_1 t$$

$$y(t) = A \frac{b_1}{a_1} \cos a_1 b_1 t + \frac{A^2}{3a_1^4} [(2a_1^2 a_2 + b_1^2 a_3 + a_1^2 b_2) \cos^2 a_1 b_1 t +$$

$$+ (a_1^2 a_2 + 2b_1^2 a_3 - a_1^2 b_2) \sin^2 a_1 b_1 t]$$
(2.16)

где $A < 1$. Решения выбраны таким образом, что $x = 0$ при $t = 0$.

Ограничиваясь первыми и вторыми степенями координат для функций X_1 и Y_1 , получим

$$X_1(x, y) = Kx + K_1 xy, \quad Y_1(x, y) = H_0 + Hy + H_1 x^2 + H_2 y^2 \quad (2.17)$$

где

$$K = -\frac{3}{4} \frac{R(1 - \rho_0^2)\omega^2}{\nu\rho_0^2(2 + \rho_0^2)^2} [2(2 + \rho_0^2 + \rho_0^4) - (2 + \rho_0^2)^2(1 - \rho_0^2)^{1/2}] \quad (2.18)$$

$$H_0 = \frac{R(1 - \rho_0^2)\omega^2}{2\nu\rho_0^2(2 + \rho_0^2)} [4 + 2\rho_0^2 - 3\rho_0^4 - (2 + \rho_0^2)^2(1 - \rho_0^2)^{1/2}] \quad (2.19)$$

$$H = -\frac{R\omega^2}{4\nu\rho_0^2(2 + \rho_0^2)^2} [2(28 + 24\rho_0^2 + 27\rho_0^4 - 19\rho_0^6 - 15\rho_0^8 -$$

$$- (2 + \rho_0^2)^2(14 + 5\rho_0^2 + 14\rho_0^4)(1 - \rho_0^2)^{1/2}] \quad (2.20)$$

Явные выражения для K_1 , H_1 и H_2 в дальнейшем не понадобятся. Теперь вместо (2.7) будем рассматривать систему

$$\frac{dx}{dt} = -a_1^2 y + a_2 x^2 + a_3 y^2 + \delta(Kx + K_1 xy)$$

$$\frac{dy}{dt} = b_1^2 x + b_2 xy + \delta(H_0 + Hy + H_1 x^2 + H_2 y^2) \quad (2.21)$$

Стационарной точкой этой системы будет точка с координатами x^* , y^* , где с точностью до δ^2

$$x^* = -\delta \frac{H_0}{b_1^2}, \quad y^* = 0 \quad (2.22)$$

Эти значения x^* и y^* определяют собой координаты центра цапфы при стационарном движении при условии учета в уравнениях гидродинамической теории смазки влияния инерционных сил смазки.

Перенесем начало координат в эту точку, сохранив при этом направление осей. Новые координаты снова обозначим через x и y . Система (2.21) при этом будет вида

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -a_1^2 y + a_2 x^2 + a_3 y^2 + \delta (K^* x + K_1 xy) \\ \frac{dy}{dt} &= b_1^2 x + b_2 xy + \delta (H^* y + H_1 x^2 + H_2 y^2) \end{aligned} \quad (2.23)$$

где

$$K^* = K - \frac{2a_2 H_0}{b_1^2}, \quad H^* = H - \frac{b_2 H_0}{b_1^2} \quad (2.24)$$

Для исследования решения системы (2.23) воспользуемся методом Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова [3]. Решение невозмущенной системы дано в виде (2.16). Усредненное уравнение для dA/dt для нашей задачи будет согласно (2.13) вида

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{\delta}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\Delta} \left[(K^* x + K_1 xy) \frac{\partial y}{\partial \tau} - (H^* y + H_1 x^2 + H_2 y^2) \frac{\partial x}{\partial \tau} \right] d\tau$$

где x и y заменены их выражениями из (2.16),

$$\tau = a_1 b_1 t, \quad \Delta = \frac{\partial x}{\partial \tau} \frac{\partial y}{\partial A} - \frac{\partial x}{\partial A} \frac{\partial y}{\partial \tau}$$

Проделав соответствующие вычисления, получим, что с точностью до A^3

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\delta}{2} \frac{A}{a_1} (K^* + H^*) \quad (2.25)$$

Знак dA/dt определится знаком $K^* + H^*$, так как $A > 0$ (амплитуда), $a_1 > 0$ как арифметическое значение $\sqrt{a_1^2}$. Из (2.24)

$$K^* + H^* = K + H - (2a_2 + b_2) \frac{H_0}{b_1^2} \quad (2.26)$$

Подставив значения всех коэффициентов, входящих в (2.26), получим

$$\begin{aligned} K^* + H^* &= -\frac{R\omega^2}{4\nu\rho_0^2(2 + \rho_0^2)^2} [80 - 24\rho_0^2 - 24\rho_0^4 - 14\rho_0^6 - 9\rho_0^8 - \\ &\quad - 2(10 - 8\rho_0^2 + \rho_0^4)(2 + \rho_0^2)^2(1 - \rho_0^2)^{1/2}] \end{aligned} \quad (2.27)$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках, при $0 \leq \rho_0 \leq 1$ положительно. Таким образом, $dA/dt < 1$.

Полученный результат показывает, что центр цапфы будет двигаться не по замкнутым кривым, как у В. Гаррисона, а будет асимптотически приближаться к точке с координатами x^* , y^* . Вместо центра, который получается у В. Гаррисона, имеет место устойчивый фокус. Этим же доказана устойчивость классического решения Н. Е. Жуковского и С. А. Чаплыгина [4] при малом зазоре между цапфой и подшипником.

§ 3. Исследование движения цапфы при нагрузке, равной по величине $P_0 + \delta P_0 \cos \nu_0 t$ и постоянной по направлению. Уравнения движения центра цапфы для этого случая мы получим, если в уравнениях (2.7) заменим P_0 на $P_0 + \delta P_0 \cos \nu_0 t$.

Так как членами порядка δ^2 мы пренебрегаем, то замену нужно будет произвести только в функциях $X(x, y)$ и $Y(x, y)$.

При этом получим следующую систему уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = X(x, y) + \delta X_1^\circ(x, y, t), \quad \frac{dy}{dt} = Y(x, y) + \delta Y_1^\circ(x, y, t) \quad (3.1)$$

где $X_1^\circ(x, y, t)$, $Y_1^\circ(x, y, t)$ соответственно равны:

$$\begin{aligned} X_1^\circ(x, y, t) &= X_1(x, y) + \\ &+ \sigma P_0 \frac{1}{\rho^2} (1 - \rho^2)^{1/2} \left[(1 - \rho^2) x^2 + \frac{1}{2} (2 + \rho^2) (y + \rho_0)^2 \right] \cos \nu_0 t \\ Y_1^\circ(x, y, t) &= Y_1(x, y) - \frac{3}{2} \sigma P_0 (1 - \rho^2)^{1/2} x (y + \rho_0) \cos \nu_0 t \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь, как и в § 2, будем решать следующую задачу: известно решение системы (2.10) в виде (2.11). Определить решение системы (3.1). Как и в § 2, будем считать A и φ_0 функциями t и подберем их так, чтобы (2.11) было решением системы (3.1).

A и φ_0 определятся при этом из системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= - \frac{\delta}{\Delta} \left(X_1^\circ[x(\tau, A), y(\tau, A), t] \frac{\partial y}{\partial \tau} - Y_1^\circ[x(\tau, A), y(\tau, A), t] \frac{\partial x}{\partial \tau} \right) \\ \frac{d\varphi_0}{dt} &= \frac{\delta}{\Delta} \left(X_1^\circ[x(\tau, A), y(\tau, A), t] \frac{\partial y}{\partial A} - Y_1^\circ[x(\tau, A), y(\tau, A), t] \frac{\partial x}{\partial A} \right) \end{aligned} \quad (3.3)$$

где Δ согласно (2.12).

Разложим функции $x(\tau, A)$, $y(\tau, A)$ в ряды Фурье. Функции $X_1^\circ(x, y, t)$ и $Y_1^\circ(x, y, t)$ разложим в ряды по степеням x и y . Если затем вместо x и y подставить их ряды, то функции $X_1^\circ(x, y, t)$ и $Y_1^\circ(x, y, t)$ окажутся разложенными в ряды, содержащие слагаемые вида

$$\begin{aligned} \cos(\lambda t + \varphi_0), & \quad \sin(\lambda t + \varphi_0), & \quad \sin[(n\lambda + \nu_0)t + n\varphi_0] \\ \cos[(n\lambda + \nu_0)t + n\varphi_0], & \quad \sin[(n\lambda - \nu_0)t + n\varphi_0], & \quad \cos[(n\lambda - \nu_0)t + n\varphi_0] \end{aligned}$$

где n — произвольное целое число.

Известно^[3], что и в этом случае с точностью до δ^2 можно получить решение системы (3.1), если усреднить уравнения (3.3) по t . Интегрировать мы теперь будем по t в пределах от нуля до $2\pi/\lambda$ и результат разделим на $2\pi/\lambda$.

При этом возможны два принципиально различных случая: нерезонансный и резонансный. В первом случае ни одно из чисел $n\lambda + \nu_0$, $n\lambda - \nu_0$ ни при каком n не равно нулю. При этом после усреднения слагаемые, отличные от нуля, дадут только функции $X_1(x, y)$, $Y_1(x, y)$.

Усредненная система при этом будет такая же, как и в § 2. Для dA/dt снова получится уравнение (2.25).

Таким образом, в нерезонансном случае качественная картина движения центра цапфы при нагрузке $P_0 + \delta P_0 \cos \nu_0 t$ такая же, как и при постоянной нагрузке P_0 , т. е. центр цапфы будет асимптотически приближаться к точке с координатами x^* , y^* .

В резонансном случае хотя бы одно из чисел $n\lambda + \nu_0$, $n\lambda - \nu_0$ равно нулю (или достаточно близко к нулю). Теперь при усреднении не только слагаемые $X_1(x, y)$ и $Y_1(x, y)$ дадут слагаемые, отличные от нуля. После усреднения правые части окажутся функциями не только A , но и φ_0 , т. е. для dA/dt и $d\varphi_0/dt$ после усреднения мы получим систему вида

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{\delta\lambda}{2\pi} \Phi_1(A, \varphi_0), \quad \frac{d\varphi_0}{dt} = \frac{\delta\lambda}{2\pi} \Phi_2(A, \varphi_0) \quad (3.4)$$

Нас будет интересовать поведение решения системы (3.4) при $t \rightarrow \infty$. Как известно, при этом решение системы (3.4) асимптотически приближается либо к стационарной точке, либо к предельному циклу. Н. Н. Боголюбов показал, что усредненная система не имеет предельных циклов. Остается, таким образом, исследовать на устойчивость только стационарные точки системы (3.4). Определив устойчивые стационарные точки, подставим значения A и φ_0 , соответствующие этим точкам, в (2.11). При этом, если значение A окажется равным нулю, то при $t \rightarrow \infty$ в плоскости xy мы получим точку, если же $A \neq 0$, то — предельный цикл.

Для рассматриваемой задачи в резонансном случае будем считать, что частота соизмерима с частотой λ . Представим λ в таком виде:

$$\lambda = \frac{r_1}{r_2} \nu_0 + \delta\Omega \quad (3.5)$$

где r_1 и r_2 — целые взаимно простые числа, а $\delta\Omega$ характеризует собой расстройку резонанса. При $\Omega = 0$ имеем полный резонанс.

Сначала исследуем наши уравнения, ограничиваясь только первыми степенями координат. При этом система (3.1) примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -a_1^2 y + \delta K^* x + \delta(a_0 - a^{\circ 2} y) \cos \nu_0 t \\ \frac{dy}{dt} &= b_1^2 x + \delta H^* y - \delta b^{\circ 2} x \cos \nu_0 t \end{aligned} \quad (3.6)$$

где a , b , K^* , H^* определены в § 2, и

$$a_0 = \frac{\omega}{2} \rho_0, \quad a^{\circ 2} = \frac{3}{2} \frac{\omega \rho_0^4}{(2 + \rho_0^2)(1 - \rho_0^2)}, \quad b^{\circ 2} = \frac{3}{2} \frac{\omega \rho_0^2}{2 + \rho_0^2}$$

Решение системы (3.6) при $\delta = 0$ будет

$$x = -A \sin(a_1 b_1 t + \varphi_0), \quad y = A \frac{b_1}{a_1} \cos(a_1 b_1 t + \varphi_0) \quad (3.7)$$

Равенство (3.5) можно представить в виде

$$a_1 b_1 = \frac{r_1}{r_2} \nu_0 + \delta\Omega$$

При $\delta = 0$ (3.7) можно еще записать так:

$$x = -A \sin\left(\frac{r_1}{r_2} \nu_0 t + \varphi_0\right), \quad y = A \frac{b_1}{a_1} \cos\left(\frac{r_1}{r_2} \nu_0 t + \varphi_0\right) \quad (3.8)$$

Будем теперь считать A и φ_0 функциями t и выберем их так, чтобы выражения (3.8) были решениями системы (3.6).

Для dA/dt и $d\varphi_0/dt$ получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} = & \frac{\delta}{b_1} \left[b_1 H^* A \cos^2 \left(\frac{r_1}{r_2} \nu_0 t + \varphi_0 \right) + \right. \\ & + b^{\circ 2} a_1 A \cos \left(\frac{r_1}{r_2} \nu_0 t + \varphi_0 \right) \sin \left(\frac{r_1}{r_2} \nu_0 t + \varphi_0 \right) \cos \nu_0 t + \\ & + b_1 K^* A \sin^2 \left(\frac{r_1}{r_2} \nu_0 t + \varphi_0 \right) - a_0 b_1 \sin \left(\frac{r_1}{r_2} \nu_0 t + \varphi_0 \right) \cos \nu_0 t + \\ & \left. + a^{\circ 2} \frac{b_1^2}{a_1} A \cos \left(\frac{r_1}{r_2} \nu_0 t + \varphi_0 \right) \sin \left(\frac{r_1}{r_2} \nu_0 t + \varphi_0 \right) \cos \nu_0 t \right] \quad (3.9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_0}{dt} = & - \frac{\delta}{b_1 A} \left[- b_1 A \Omega + b_1 H^* A \sin \left(\frac{r_1}{r_2} \nu_0 t + \varphi_0 \right) \cos \left(\frac{r_1}{r_2} \nu_0 t + \varphi_0 \right) + \right. \\ & + b^{\circ 2} a_1 A \sin^2 \left(\frac{r_1}{r_2} \nu_0 t + \varphi_0 \right) \cos \nu_0 t - \\ & - b_1 K^* A \cos \left(\frac{r_1}{r_2} \nu_0 t + \varphi_0 \right) \sin \left(\frac{r_1}{r_2} \nu_0 t + \varphi_0 \right) + \\ & \left. + a_0 b_1 \cos \left(\frac{r_1}{r_2} \nu_0 t + \varphi_0 \right) \cos \nu_0 t - a^{\circ 2} \frac{b_1^2}{a_1} A \cos^2 \left(\frac{r_1}{r_2} \nu_0 t + \varphi_0 \right) \cos \nu_0 t \right] \quad (3.10) \end{aligned}$$

Усредненную систему получим, проинтегрировав правые части (3.9) и (3.10) по t в пределах от нуля до $2\pi r_2/\nu_0$ и разделив результат на $2\pi r_2/\nu_0$. Для удобства введем вместо t новую переменную $r_2 t/\nu_0$, которую мы снова обозначим через t . Тогда усредненная система примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} = & \frac{\delta}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[AH^* \cos^2 (r_1 t + \varphi_0) + \frac{b^{\circ 2} a_1}{b_1} A \cos (r_1 t + \varphi_0) \sin (r_1 t + \varphi_0) \cos r_2 t + \right. \\ & + AK^* \sin^2 (r_1 t + \varphi_0) - a_0 \sin (r_1 t + \varphi_0) \cos r_2 t + \\ & \left. + \frac{a^{\circ 2} b_1}{a_1} \cos (r_1 t + \varphi_0) \sin (r_1 t + \varphi_0) \cos r_2 t \right] dt \quad (3.11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_0}{dt} = & \frac{\delta}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\Omega - H^* \sin (r_1 t + \varphi_0) \cos (r_1 t + \varphi_0) - \frac{b^{\circ 2} a_1}{b_1} \sin^2 (r_1 t + \varphi_0) \cos r_2 t + \right. \\ & + K^* \cos (r_1 t + \varphi_0) \sin (r_1 t + \varphi_0) - \frac{a_0}{A} \cos (r_1 t + \varphi_0) \cos r_2 t + \\ & \left. + \frac{a^{\circ 2} b_1}{a_1} \cos^2 (r_1 t + \varphi_0) \cos r_2 t \right] dt \quad (3.12) \end{aligned}$$

В зависимости от r_1 и r_2 получим следующие системы уравнений:

1) $r_1 = 1, r_2 = 1$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\delta}{2} (K^* + H^*) A - \frac{\delta}{2} a_0 \sin \varphi_0, \quad \frac{d\varphi_0}{dt} = a_1 b_1 - \nu_0 - \frac{\delta}{2} \frac{a_0}{A} \cos \varphi_0 \quad (3.13)$$

2) $r_1 = 1, r_2 = 2$

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} = & \frac{\delta}{2} (K^* + H^*) A + \frac{\delta}{4} \frac{A}{a_1 b_1} (b^{\circ 2} a^2 + a^{\circ 2} b^2) \sin 2\varphi_0 \\ \frac{d\varphi_0}{dt} = & a_1 b_1 - \frac{\nu_0}{2} + \frac{\delta}{4} \frac{1}{a_1 b_1} (b^{\circ 2} a_1^2 + a^{\circ 2} b_1^2) \cos 2\varphi_0 \quad (3.14) \end{aligned}$$

3) во всех остальных случаях

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\delta}{2} (K^* + H^*) A, \quad \frac{d\varphi_0}{dt} = a_1 b_1 - \frac{r_1}{r_2} \nu_0 \quad (3.15)$$

Исследуем теперь решения систем (3.13), (3.14), (3.15). Решение системы (3.13) легко найти в явном виде. Сделаем замену переменных

$$\xi = A \cos \varphi_0, \quad \eta = A \sin \varphi_0 \quad (3.16)$$

Мы легко получим для ξ и η :

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{2 a_0 \Omega}{(K^* + H^*)^2 + 4 \Omega^2} + (C_1 \cos \delta \Omega t + C_2 \sin \delta \Omega t) \exp \left[\frac{\delta}{2} (K^* + H^*) t \right] \\ \eta &= \frac{a_0 (K^* + H^*)}{(K^* + H^*)^2 + 4 \Omega^2} + (C_1 \sin \delta \Omega t - C_2 \cos \delta \Omega t) \exp \left[\frac{\delta}{2} (K^* + H^*) t \right] \end{aligned} \quad (3.17)$$

В § 2 показано, что $K^* + H^* < 0$, откуда следует, что при $t \rightarrow \infty$

$$\xi \rightarrow \frac{2 a_0 \Omega}{(K^* + H^*)^2 + 4 \Omega^2}, \quad \eta \rightarrow \frac{a_0 (K^* + H^*)}{(K^* + H^*)^2 + 4 \Omega^2}$$

Предельные значения для A и φ_0 будут

$$A = \frac{a_0}{\sqrt{(K^* + H^*)^2 + 4 \Omega^2}}, \quad \sin \varphi_0 = \frac{K^* + H^*}{\sqrt{(K^* + H^*)^2 + 4 \Omega^2}} \quad (3.18)$$

В плоскости xu при $t \rightarrow \infty$ имеет место предельный цикл, уравнение которого определяется равенствами (3.8), в которых A и φ_0 заменены согласно (3.18). Кроме того, $r_1/r_2 = 1$. После подстановки найдем

$$\begin{aligned} x &= - \frac{a_0}{\sqrt{(K^* + H^*)^2 + 4 \Omega^2}} \sin (\nu_0 t + \varphi_0) \\ y &= \frac{a_0 b_1}{a_1 \sqrt{(K^* + H^*)^2 + 4 \Omega^2}} \cos (\nu_0 t + \varphi_0) \end{aligned} \quad (3.19)$$

или, исключив t , имеем

$$b_1^2 x^2 + a_1^2 y^2 = \frac{a_0^2 b_1^2}{(K^* + H^*)^2 + 4 \Omega^2} \quad (3.20)$$

Полученный результат позволяет сделать следующий вывод: учитывая первые степени координат x и y при совпадении частоты собственного колебания системы с частотой ν_0 силы P , центр цапфы при своем движении асимптотически приближается к эллипсу, уравнение которого выражается равенством (3.20). Причем, как и следовало ожидать, чем больше Ω (чем больше расстройка резонанса), тем меньше оси эллипса, т. е. с увеличением Ω эллипс все больше стягивается к своему центру — точке с координатами x^* , y^* . Исследуем теперь решение системы (3.14). Это решение также можно найти в явном виде, сделав снова замену переменных (3.16). При этом система (3.14) примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \frac{\delta}{2} (K^* + H^*) \xi + \frac{\delta}{4} \left[\frac{1}{a_1 b_1} (b^{\circ 2} a_1^2 + a^{\circ 2} b_1^2) - 4 \Omega \right] \eta \\ \frac{d\eta}{dt} &= \frac{\delta}{2} (K^* + H^*) \eta + \frac{\delta}{4} \left[\frac{1}{a_1 b_1} (b^{\circ 2} a_1^2 + a^{\circ 2} b_1^2) + 4 \Omega \right] \xi \\ &\quad \left(\delta \Omega = a_1 b_1 - \frac{\nu_0}{2} \right) \end{aligned} \quad (3.21)$$

Из (3.24) легко получить уравнение

$$\frac{d^2 \zeta}{dt^2} - \delta (K^* + H^*) \frac{d\zeta}{dt} + \left[(K^* + H^*) - \frac{1}{4 a_1^2 b_1^2} (b^{\circ 2} a_1^2 + a^{\circ 2} b_1^2) + 4\Omega^2 \right] \zeta = 0 \quad (3.22)$$

где под ζ нужно подразумевать либо ξ , либо η .

Интегрируя (3.22), получаем (3.23)

$$\zeta = c_1 \exp \left\{ \frac{\delta}{2} \left[K^* + H^* + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{a_1 b_1} (b^{\circ 2} a_1^2 + a^{\circ 2} b_1^2) - 16 \Omega^2} \right] t \right\} + c_2 \exp \left\{ \frac{\delta}{2} \left[K^* + H^* - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{a_1 b_1} (b^{\circ 2} a_1^2 + a^{\circ 2} b_1^2) - 16 \Omega^2} \right] t \right\}$$

Найдем предельное значение ζ при $t \rightarrow \infty$. При этом подкоренное выражение в (3.23) будем считать неотрицательным. Для Ω получим

$$|\Omega| \leq \frac{b^{\circ 2} a_1^2 + a^{\circ 2} b^2}{4 a_1 b_1}$$

Если же подкоренное выражение отрицательно (явление изучается вдали от резонанса), то мы для предельного значения ζ получим нуль, так как $K^* + H^* < 0$. Заметим, что предельное значение второго слагаемого, входящего в ζ , есть нуль.

Остается найти предельное значение первого слагаемого ζ при условии, что подкоренное значение положительно. Будем считать при этом $\Omega = 0$. Если окажется, что предельное значение при $\Omega = 0$ есть нуль, то при $\Omega \neq 0$ оно тем более будет равно нулю. Задача сводится к исследованию знака выражения

$$K^* + H^* + \frac{1}{2 a_1 b_1} (b^{\circ 2} a_1^2 + a^{\circ 2} b_1^2) \quad (3.24)$$

или после замены всех коэффициентов их значениями выражения

$$-\frac{R\omega^2}{4\nu\rho_0^2(2+\rho_0^2)^2} [80 - 24\rho_0^2 - 24\rho_0^4 - 14\rho_0^6 - 9\rho_0^8 - 2(10 - 8\rho_0^2 + \rho_0^4) \times \times (2 + \rho_0^2)(1 - \rho_0^2)^{1/2}] + \frac{3\sqrt{2}}{8} \frac{\omega\rho_0}{\sqrt{2 - \rho_0^2 + 2\rho_0^4}} \frac{1}{1 - \rho_0^2} \quad (3.25)$$

Величина $\omega R/\nu \gg 1$. По абсолютной величине первое слагаемое больше второго и выражение (3.25) отрицательно. Исключение будет при значениях ρ_0 , близких к единице, так как второе слагаемое в (3.25) содержит множитель $1/(1 - \rho_0^2)$. Этот множитель получается при разложении в ряд выражения

$$\sigma P_0 \frac{\sqrt{1 - \rho^2}}{\rho^2} \left[(1 - \rho^2) x^2 + \frac{2 + \rho^2}{2} (y + \rho_0)^2 \right] \quad (3.26)$$

Заметим, что

$$\rho \approx 1, \quad \sqrt{1 - \rho^2} \approx 0$$

а также, что

$$\sqrt{1 - \rho^2} = \sqrt{1 - \rho_0^2} \left(1 - \frac{y\rho_0}{1 - \rho_0^2} + \dots \right)$$

а также учтем, что через $a^{\circ 2}$ мы обозначили коэффициент при y , который и содержит множитель $(1 - \rho_0^2)^{-1}$. В действительности же при $\rho \approx 1$ нужно считать $a^{\circ 2} \approx 0$.

Следовательно, выражение (3.24) отрицательно и предельное значение для ζ равно нулю. А это значит, что и предельное значение для A равно нулю. Таким образом, при частоте внешней силы, равной удвоенной частоте собственных колебаний системы, центр цапфы при своем движении приближается асимптотически к точке с координатами x^* , y^* .

Рассмотрим, наконец, систему уравнений (3.15). Первое уравнение непосредственно интегрируется, и так как $K^* + H^* < 0$, то предельное значение для A равно нулю. И в этом случае центр цапфы при своем движении асимптотически приближается к точке с координатами x^* , y^* .

Точно таким же путем можно исследовать и уравнение движения, принимая во внимание и вторые степени координат x , y .

Не выписывая всех полученных в этом случае уравнений, укажем, что задача сведется к исследованию четырех систем уравнений, соответствующих следующим случаям:

- 1) $r_1 = 1$, $r_2 = 1$; 2) $r_1 = 1$, $r_2 = 2$; 3) $r_1 = 1$, $r_2 = 3$
4) все остальные значения для r_1 и r_2

Оказывается, что и в этом случае только при совпадении частоты внешней силы с частотой собственных колебаний системы стационарная точка в плоскости A , φ будет иметь координату $A \neq 0$. Это значение будет близко к значению A из (3.18). Во всех остальных случаях для устойчивых стационарных точек будет $A = 0$. В плоскости xy при совпадении частот внешней силы и собственных колебаний системы имеет место предельный цикл, близкий к эллипсу, уравнение которого определяется (3.20). В остальных же случаях центр цапфы будет асимптотически приближаться к точке с координатами x^* , y^* .

Таким образом, показано, что при учете первых и вторых степеней координат x и y в уравнениях гидродинамической теории смазки, полученных с учетом сил инерции, при нагрузке на центр цапфы $P_0 + \delta P_0 \cos \nu_0 t$ при произвольной частоте ν_0 за исключением случая, когда $\nu_0 = a_1 b_1$, т. е. ν_0 совпадает с частотой собственных колебаний системы, центр цапфы асимптотически приближается к точке с координатами x^* , y^* . При $\nu_0 = a_1 b_1$ в плоскости xy получается предельный цикл — кривая, близкая к эллипсу, уравнение которого определяется равенством (3.20).

Поступила 3 VI 1950

ЛИТЕРАТУРА

1. Сборник «Гидродинамическая теория смазки». Под ред. Л. С. Лейбензона. 1934.
2. Harrison W. J. The Hydrodynamical Theory of the Lubrication of a Cylindrical Bearing Under Variable Load, and of a Pivot Bearing. Trans. Cambridge Philosophical Society. 1920. Vol. 22. P. 373—378.
3. Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н. Введение в нелинейную механику. Изд. АН УССР. 1937.