Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XIV, 1950

УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ТЯЖЕЛОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ВЕРТИКАЛЬНЫМ ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ ВЫРЕЗОМ

К. Н. Шевченко
(Москва)

В работе определяются напряжения и деформации в полупространстве с вертикальным цилиндрическим вырезом, вызванные действием собственного веса полупространства.

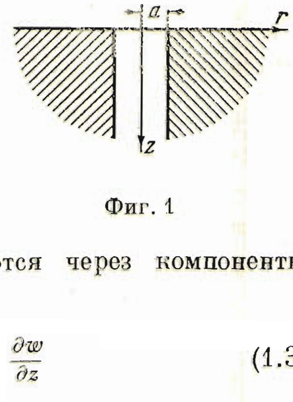
Материал предполагается изотропным, обадающим упруго-пластическими свойствами. Решение строим без учета сжимаемости материала при условии упрочнения материала.

§ 1. Основные уравнения. Постановка задачи. Разрез полупространства по диаметру круглого цилиндрического выреза и выбранная цилиндрическая система координат показаны на фиг. 1.

Из условия осевой симметрии следует, что $\tau_{r\varphi}=0$ и $\tau_{\varphi z}=0$. Кроме того, положим $\tau_{rz}=0$; тогда система уравнений равновесия примет следующий вид:

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial\rho}+\frac{\sigma_r-\sigma_\varphi}{\rho}=0, \qquad \frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\gamma=0 \qquad (1.1)$$

где $\tau_{r\varphi}$, $\tau_{\varphi z}$, τ_{rz}, σ_r, σ_φ и σ_z — компоненты напряжения, γ — удельный вес материала.



Фиг. 1

Компоненты деформации ε_r, ε_φ связаны следующим уравнением совместности:

$$\frac{\partial\varepsilon_\varphi}{\partial\rho}+\frac{\varepsilon_\varphi-\varepsilon_r}{\rho}=0 \qquad (1.2)$$

Компоненты деформации ε_r, ε_φ и ε_z выражаются через компоненты смещения u и w следующим образом:

$$\varepsilon_r=\frac{\partial u}{\partial\rho}, \qquad \varepsilon_\varphi=\frac{u}{\rho}, \qquad \varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z} \qquad (1.3)$$

Уравнения пластичности в предположении несжимаемости материала $\left(\nu=\frac{1}{2}\right)$ имеют следующий вид:

$$\varepsilon_r=\frac{\Psi}{2G}(\sigma_r-\sigma), \qquad \varepsilon_\varphi=\frac{\Psi}{2G}(\sigma_\varphi-\sigma), \qquad \varepsilon_z=\frac{\Psi}{2G}(\sigma_z-\sigma) \qquad (1.4)$$

где Ψ — неизвестная функция, подлежащая в дальнейшем определению, G — модуль сдвига, $3\sigma=\sigma_r+\sigma_\varphi+\sigma_z$.

Так как в рассматриваемой задаче имеет место напряжение сжатия, то для удобства вычислений будем считать компоненты сжатия положительными величинами.

Условие пластичности с упрочнением примем в виде линейной зависимости между интенсивностью напряжения сдвига S и интенсивностью деформации сдвига E:

$$S = k(mE + \mu) \tag{1.5}$$

где k — пластическая константа, m и μ — постоянные, определяющие наклон прямой упрочнения.

Если не учитывать площадки текучести, то между m и μ существует следующая линейная зависимость:

$$n + \mu = 1 \qquad \left(n = \frac{km}{G}\right) \tag{1.6}$$

В дальнейшем нами будет использовано следующее равенство:

$$E = \frac{\Psi}{G} S \tag{1.7}$$

получаемое из уравнений пластичности (1.4).

При построении решения будем пользоваться безразмерными величинами — компоненты напряжения отнесем к величине k, а в качестве независимых переменных примем

$$\rho = \frac{r}{a}, \qquad \zeta = \frac{\gamma z}{k} \tag{1.8}$$

где a — радиус кругового цилиндрического выреза.

Радиус распространения пластической зоны обозначим через ρ_s.

Искомое решение должно удовлетворять краевым условиям:

$$\begin{aligned} &\sigma_r = \sigma_\varphi = \sigma_z = 0 && \text{при } \zeta = 0 \\ &\sigma_r = 0 && \text{при } \rho = 1 \\ &\sigma_r = \sigma_\varphi = \sigma_z && \text{при } \zeta \gg 0, \quad \rho \to \infty \end{aligned} \tag{1.9}$$

(гидростатическое сжатие).

На границе пластической и упругой областей ($\rho = \rho_s$) должно выполняться условие непрерывности компонент напряжения и деформации и, кроме того,

$$\Psi(\rho_s) = 1 \tag{1.10}$$

Упростим выражение для интенсивности напряжения S. Для этого решим третье уравнение пластичности (1.4) относительно σ_z; получим

$$\sigma_z = \frac{\sigma_r + \sigma_\varphi}{2} + \frac{3\delta}{\Psi} \qquad \left(\delta = \frac{G}{k}\varepsilon_z\right) \tag{1.11}$$

Подставим найденное значение σ_z в выражение для S; будем иметь

$$S = \frac{\sigma_\varphi - \sigma_r}{2}\sqrt{1 + \frac{12\delta^2}{(\sigma_\varphi - \sigma_r)^2\Psi^2}} \tag{1.12}$$

Можно показать (см., например, [1]), что дробь, стоящая под радикалом (1.12), мала по сравнению с единицей и, следовательно, ею можно пренебречь. Поэтому в дальнейшем для S воспользуемся выражением:

$$S = \frac{\sigma_\varphi - \sigma_r}{2} \tag{1.13}$$

Пользуясь уравнениями (1.5), (1.7) и (1.13), найдем

$$\Psi = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{2\mu}{\sigma_\varphi - \sigma_r}\right) \tag{1.14}$$

Таким образом, решение задачи пластичности сводится к совместному решению систем (1.1), (1.2), (1.4) и (1.14) при условиях (1.9) и (1.10).

§ 2. Построение решения. Начиная с поверхности ($\zeta = 0$) и до некоторой глубины (ζ_s), весь пласт находится в упругом состоянии. Для такого рода толстой плиты с круговым отверстием упругое решение известно и имеет следующий вид:

$$\sigma_r = \zeta(1 - \rho^{-2}), \qquad \sigma_\varphi = \zeta(1 + \rho^{-2}), \qquad \sigma_z = \zeta \tag{2.1}$$

Пластическая зона должна возникнуть на внутренней поверхности выреза на глубине ζ_s. Границу возникновения пластической области по глубине определим согласно уравнению (1.13) из условия

$$\sigma_\varphi - \sigma_r = 2 \qquad \text{при } \rho = 1 \tag{2.2}$$

Подставляя в (2.2) значения компонент (2.1), находим

$$\zeta = 1 \tag{2.3}$$

Ниже этого уровня ($\zeta > 1$) вблизи ствола шахты будет существовать пластическая зона, ограниченная круговым кольцом, внешний радиус которого есть ρ_s.

Таким образом, при $\zeta > 1$ имеет место смешанная задача: для $1 \leqslant \rho \leqslant \rho_s$ имеет место пластическое состояние материала, при $\rho_s \leqslant \rho < \infty$ — упругая деформация. Граница, отделяющая пластическую область от упругой, очевидно, является функцией координаты ζ. Вид этой функции определим ниже.

В упругой области при $\zeta > 1$ решение имеет вид:

$$\sigma_r = \zeta\left(1 - \frac{C_1}{\rho^2}\right), \quad \sigma_\varphi = \zeta\left(1 + \frac{C_1}{\rho^2}\right), \quad \sigma_z = \zeta \tag{2.4}$$

Произвольную постоянную C_1 определим ниже. Построим решение для пластической области $\zeta > 1$, $1 \leqslant \rho \leqslant \rho_s$. Напишем первое уравнение пластичности (1.4), принимая во внимание (1.14), в таком виде:

$$\varepsilon_\varphi - \varepsilon_r = \frac{1}{2Gn}(\sigma_\varphi - \sigma_r - 2\mu) \tag{2.5}$$

Далее разделим первое уравнение (1.1) на $2Gn$ и сложим его с уравнением совместности (1.2); получим

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\varepsilon_\varphi + \frac{\sigma_r}{2Gn}\right) + \frac{1}{\rho}\left(\varepsilon_\varphi - \varepsilon_r + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{2Gn}\right) = 0$$

Подставим во второй член полученного уравнения его выражение согласно (2.5). Интеграл полученного уравнения будет

$$\varepsilon_\varphi + \frac{\sigma_r}{2Gn} = \frac{\mu}{Gn}(\ln\rho + C_2) \tag{2.6}$$

где C_2 — произвольная постоянная.

Второе дифференциальное уравнение получим, исключая из уравнений (1.1), второго уравнения (1.4) и (2.6) компоненты σ_φ и ε_φ. Имеем

$$\left(\rho\frac{\partial\sigma_r}{\partial\rho}\right)^2-2\left[\mu+\frac{\sigma_z}{4}+\frac{3}{2}\mu(\ln\rho+C_2)-\sigma_r\right]\rho\frac{\partial\sigma_r}{\partial\rho}-\mu(\sigma_r-\sigma_z)=0 \tag{2.7}$$

Подстановка $\ln\rho=t$ приводит уравнение (2.7) к виду

$$\left(\frac{\partial\sigma_r}{\partial t}\right)^2-2\left[\mu+\frac{\sigma_z}{4}+\frac{3}{2}\mu(t+C_2)-\sigma_r\right]\frac{\partial\sigma_r}{\partial t}-\mu(\sigma_r-\sigma_z)=0 \tag{2.8}$$

Уравнение (2.8) линейно относительно σ_r и t и, следовательно, принадлежит к типу уравнений Лагранжа. Последнее приводится к линейному и интегрируется в квадратурах. Решим уравнение (2.8) относительно σ_r

$$\sigma_r=\varphi(p)\,t+\psi(p) \tag{2.9}$$

где

$$p=\frac{\partial\sigma_r}{\partial t},\qquad \varphi(p)=3\mu\frac{p}{2p-\mu},\qquad \psi(p)=\frac{[\mu(3C_2+2)+\sigma_z/2]\,p-\mu\sigma_z-p^2}{2p-\mu}$$

Дифференцируя (2.9) по p и решая полученное уравнение относительно dt/dp, получим линейное уравнение относительно t

$$\frac{dt}{dp}+\frac{\varphi'(p)}{\varphi(p)-p}\,t=\frac{\psi'(p)}{p-\varphi(p)} \tag{2.10}$$

Подставляя вместо $\varphi(p)$ и $\psi(p)$, $\varphi'(p)$ и $\psi'(p)$ их значения согласно (2.9), окончательно получим

$$\frac{dt}{dp}+\frac{3\mu^3}{2p(2p-\mu)(p-2\mu)}\,t=\frac{\alpha+\mu p-p^2}{p(2p-\mu)(p-2\mu)} \tag{2.11}$$

где обозначено $\frac{3}{2}\mu\sigma_z-\mu^2(3C_2+2)=2\alpha$. Произведем замену переменного p по формуле

$$\left(1-\frac{2\mu}{p}\right)^{1/4}=z \tag{2.12}$$

Уравнение (2.11) примет следующий вид:

$$\frac{dt}{dz}+\frac{3(1-z^4)}{z(3+z^4)}\,t=\frac{2[\alpha(1-z^4)^2-2\mu(1+z^4)]}{\mu^2z(3+z^4)(1-z^4)} \tag{2.13}$$

Уравнение (2.13) интегрируется в конечном виде. Имеем

$$t=\frac{3+z^4}{z}\left[\frac{4Az}{3+z^4}-6\operatorname{arc\,tg} z+3\ln\frac{1-z}{1+z}+C_3\right] \tag{2.14}$$

где C_3 — произвольная постоянная, а $A=4\alpha/\mu^2+1$.

Выразим функции $\varphi(p)$ и $\psi(p)$ (2.9) через переменную z. Имеем

$$\varphi(z)=\frac{6\mu}{3+z^4},\qquad \psi(z)=\frac{\beta(1-z^4)-\sigma_z(1-z^4)^2-4\mu}{(3+z^4)(1-z^4)} \tag{2.15}$$

где

$$\beta=\sigma_z+2\mu(3C_2+2) \tag{2.16}$$

Найденные значения t, $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ подставим в уравнение (2.9). Решение уравнения (2.8) представится в параметричной форме

$$\sigma_r = \frac{6\mu}{z}\left[\frac{4Az}{3+z^4} - 6\,\mathrm{arc\,tg}\,z + 3\ln\frac{1-z}{1+z} + C_3\right] + \frac{\beta(1-z^4) - \sigma_z(1-z^4)^2 - 4\mu}{(3+z^4)(1-z^4)}$$

$$t = \frac{3+z^4}{z}\left[\frac{4Az}{3+z^4} - 6\,\mathrm{arc\,tg}\,z + 3\ln\frac{1-z}{1+z} + C_3\right] \tag{2.17}$$

Компоненту напряжения σ_φ определим из уравнения равновесия (1.1), которое можно представить в виде $\sigma_\varphi = \sigma_r + p$. Подставляя σ_r согласно (2.17), получим

$$\sigma_\varphi = \frac{6\mu}{z}\left[\frac{4Az}{3+z^4} - 6\,\mathrm{arc\,tg}\,z + 3\ln\frac{1-z}{1+z} + C_3\right] + \frac{\beta - \sigma_z(1-z^4)}{3+z^4} + \frac{2\mu(1+z^4)}{(3+z^4)(1-z^4)} \tag{2.18}$$

Компоненту напряжения σ_z определим из второго уравнения (1.1). Она не зависит от ρ и имеет тот же вид, как и в упругой задаче:

$$\sigma_z = \zeta \tag{2.19}$$

Значение параметра z вдоль границы упругой и пластической области известно — вдоль границы ($\rho = \rho_s$), $p = 2$, следовательно, значение z вдоль границы пластичности равно:

$$z_s^4 = n \tag{2.20}$$

Значение $z = z_0$ на внутренней поверхности выреза ($\rho = 1$) неизвестно и подлежит определению из граничных условий.

Таким образом, необходимо определить из граничных условий следующие пять величин: C_1, C_2, C_3, ρ_s и z_0.

Из условий (1.9), непрерывности σ_r и σ_φ на границе пластичности и равенства нулю t на внутренней поверхности выреза ($\rho = 1$) и $t_s = \ln\rho_s$ вдоль границы пластичности получим систему пяти уравнений:

$$\beta(1 - z_0^4) - \zeta(1 - z_0^4)^4 - 4\mu = 0 \tag{2.21}$$

$$\frac{4Az_0}{3+z_0^4} - 6\,\mathrm{arc\,tg}\,z_0 + 3\ln\frac{1-z_0}{1+z_0} + C_3 = 0$$

$$\ln\rho_s = \frac{3+n}{n^{1/4}}\left[\frac{4An^{1/4}}{3+n} - 6\,\mathrm{arc\,tg}\,n^{1/4} + 3\ln\frac{1-n^{1/4}}{1+n^{1/4}} + C_3\right]$$

$$\zeta - \frac{C_1\zeta}{\rho_s^2} = \frac{6\mu\ln\rho_s}{3+n} + \frac{\beta - \zeta\mu - 4}{3+n}, \qquad \zeta + \frac{C_1\zeta}{\rho_s^2} = \frac{6\mu\ln\rho_s}{3+n} + \frac{\beta - \zeta\mu}{3+n} + \frac{2(1+n)}{3+n}$$

В точке возникновения пластической зоны ($\zeta = 1$)

$$C_2 = \frac{n}{2\mu}, \quad C_3 = 6\,\mathrm{arc\,tg}\,n^{1/4} - 3\ln\frac{1-n^{1/4}}{1+n^{1/4}}, \quad C_1 = 1 \tag{2.22}$$

Решая систему (2.21), находим уравнение для определения C_2:

$$\frac{4A(1-Z)^{1/4}}{4-Z} - 6\,\mathrm{arc\,tg}\,(1-Z)^{1/4} + 3\ln\frac{1-(1-Z)^{1/4}}{1+(1-Z)^{1/4}} - \frac{4An^{1/4}}{3+n} + \frac{n^{1/4}}{2\mu(3+n)}\zeta -$$

$$- \frac{(2C_2' - 1)n^{1/4}}{6(3+n)} + 6\,\mathrm{arc\,tg}\,n^{1/4} - 3\ln\frac{1-n^{1/4}}{1+n^{1/4}} = 0 \tag{2.23}$$

Здесь

$$Z = \frac{1}{2\zeta}(\beta - \sqrt{\beta^2 - 16\mu\zeta}), \qquad C_2' = 3C_2 + 2 \tag{2.24}$$

Знак перед квадратным радикалом выбирается таким образом, чтобы при предельном переходе, полагая $\zeta = 1$ (а следовательно, согласно (2.22) и (2.24) $C_2' = (3n + 4\mu)/2\mu$), уравнение (2.23) обращалось тождественно в нуль. Остальные искомые величины C_1, C_3, ρ_s и z_0 определяются через ζ и C_2 следующими уравнениями:

$$C_3 = 6\,\mathrm{arc\,tg}\,n^{1/4} - 3\ln\frac{1 - n^{1/4}}{1 + n^{1/4}} - \frac{4An^{1/4}}{3 + n} + \frac{n^{1/4}}{2\mu(3+n)}\zeta - \frac{(2C_2' - 1)\,n^{1/4}}{6(3+n)}$$

$$C_1 = \frac{1}{\zeta}\exp\frac{3\zeta - \mu(2C_2' - 1)}{3\mu}, \qquad \rho_s = \exp\frac{3\zeta - \mu(2C_2' - 1)}{6\mu}, \qquad z_0 = (1 - Z)^{1/4}$$

Значения A и β определяются из уравнений (2.14) и (2.16),

Приводим значения C_1, C_2', C_3, ρ_s и z_0, вычисленые для различных значений ζ при $n = 0.2$, $\mu = 0.8$.

ζ	1	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4
C_2'	2.375	2.320	2.270	2.230	2.180	2.140	2.100
C_3	8.339	6.756	5.168	3.605	2.041	0.434	—1.101
C_1	1	1.292	1.902	2.874	4.625	7.616	12.762
z_0	0.668	0.672	0.677	0.689	0.700	0.716	0.737
ρ_s	1	1.392	1.946	2.680	3.725	5.160	7.147

Компоненты деформаций ε_r и ε_φ в пластической области определяются из уравнений (2.6) и (2.5) и имеют вид:

$$\begin{gathered}
\varepsilon_r = \frac{\mu}{Gn}\left\{\left[\frac{4Az}{3+z^4} - 6\,\mathrm{arc\,tg}\,z + 3\ln\frac{1-z}{1+z} + C_3\right]z^3 - \right. \\
\left. - \frac{\beta(1-z^4) - \zeta(1-z^4)^2 - 4\mu}{2\mu(3+z^4)(1-z^4)} - \frac{z^4}{1-z^4} + C_2\right\} \\
\varepsilon_\varphi = \frac{\mu}{Gn}\left\{\left[\frac{4Az}{3+z^4} - 6\,\mathrm{arc\,tg}\,z + 3\ln\frac{1-z}{1+z} + C_3\right]z^3 - \right. \\
\left. - \frac{\beta(1-z^4) - \zeta(1-z^4)^2 - 4\mu}{2\mu(3+z^4)(1-z^4)} + C_2\right\}
\end{gathered} \tag{2.25}$$

Компоненту ε_z для пластической области находим из третьего уравнения пластичности (1.4). Выражение для функции ψ, входящей в уравнения пластичности (1.4) через параметр z, имеет вид:

$$\psi(z) = \frac{z^4}{n} \tag{2.26}$$

Подставляя в третье уравнение пластичности значения функции ψ и компонент напряжения σ_r, σ_φ и σ_z, окончательно получим (2.27)

$$\varepsilon_z = \frac{z^4}{3Gn}\left\{\zeta - \frac{6\mu}{z}\left[\frac{4Az}{3+z^4} - 6\,\mathrm{arc\,tg}\,z + 3\ln\frac{1-z}{1+z} + C_3\right] - \frac{\beta - \mu - \zeta(1-z^4)}{3+z^4}\right\}$$

При этом необходимо иметь в виду, что параметр z изменяется в пределах $n^{1/4} \leqslant z \leqslant z_0$, где z_0 определяется из первого уравнения (2.24).

Поступила 27 IX 1949

Институт механики
Академии Наук СССР