

О НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУТОГО РАВНОВЕСИЯ ТОНКОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННОГО НОРМАЛЬНОГО ВНЕШНЕГО ДАВЛЕНИЯ

Х. М. Муштари и Р. Г. Суркин

(Казань)

Классическая теория потери устойчивости тонких оболочек основана на предположении, что выпучивание оболочки, появляющееся при некотором критическом значении внешней нагрузки, бесконечно мало и что поэтому можно пренебречь квадратами и высшими степенями добавочных перемещений точек срединной поверхности оболочки, характеризующих переход от первой формы равновесия ко второй. Пользуясь такой линеаризованной теорией устойчивости оболочек Л. С. Лейбензон [1] и Р. Цолли [2] независимо друг от друга и почти одновременно вывели следующую формулу для определения критического напряжения при нормальном внешнем давлении на сферическую оболочку:

$$\sigma_E = \frac{p_E R}{2t} = \frac{Et}{RV\sqrt{3(1-\nu^2)}} \quad (0.1)$$

где p_E — критическое давление по этой теории, t — толщина, R — радиус оболочки, ν — коэффициент поперечного сжатия и E — модуль Юнга.

Однако критические напряжения, найденные из опыта, оказываются в три-четыре раза меньшими этой величины. При этом предсказываемое линеаризованной теорией волнообразование по всей поверхности оболочки не наблюдается.

В действительности оболочка «предпочитает» выпучиваться внутрь, и образуется ямка, опирающаяся на малый телесный угол 2γ . Глубина этой ямки δ не мала и иногда в десяток раз превышает толщину оболочки. Например, по опытам Е. Зехлера и В. Болле в Калифорнийском технологическом институте было найдено: при $R/t = 900$

$$\sigma_R = 0.154 \frac{Et}{R}, \quad \gamma = 8^\circ, \quad \frac{\delta}{t} = 12.5 \quad (0.2)$$

Т. Карман и Хсуе-Шен-Тзян дали объяснение этому расхождению между опытом и классической теорией [3]. Они показали, что при давлениях, значительно меньших p_E , наряду с состоянием устойчивого равновесия оболочки при сохранении ее сферической формы, возможно устойчивое равновесие оболочки с образованием ямки и что «прыжок» или «хлопок» в это выпученное состояние возможен, если форма оболочки несовершенна или приложенное во время опыта давление имеет пульсации. Так как эти обстоятельства почти всегда имеют место, то больший интерес представляет знание нижнего предела давления, при котором может произойти хлопок, чем нахождение верхнего предела давления по формуле (0.1).

Однако «решение» этой задачи, данное в статье [3], является ошибочным, о чем будет подробнее сказано ниже. К. О. Фридрихс в конце своей работы [4], посвященной этой же теме, также вынужден был признать, что вопрос о минимуме критического значения давления остается открытым. Исследование В. И. Феодосьева [5] по теории хлопка относится к расчету хлопающих полых сферических мембран и его выводы не могут быть применены к явлению выпучивания полной сферической оболочки или значительной части ее. Поэтому мы сочли уместным снова вернуться к рассматриваемому вопросу с полутным рассмотрением некоторых вопросов общей теории хлопка.

1. Некоторые вопросы общей теории хлопания оболочек. Отнесем срединную поверхность оболочки к линиям кривизны и воспользуемся обозначениями работы [6].

В случае малых деформаций при произвольных перемещениях, пренебрегая ε_1^2 , ε_2^2 , ω^2 по сравнению с их первыми степенями, аналогично формулам (16) указанной работы (стр. 75) имеем

$$\varepsilon_1 = e_{11} + \frac{1}{2} (e_{11}^2 + e_{12}^2 + e_{13}^2), \quad \varepsilon_2 = e_{22} + \frac{1}{2} (e_{22}^2 + e_{21}^2 + e_{23}^2) \\ \omega = (1 + e_{11}) e_{21} + (1 + e_{22}) e_{12} + e_{13} e_{23} \quad (1.1)$$

$$e_{11} = \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{v}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} - \frac{w}{R_1}, \quad e_{21} = \frac{1}{B} \frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{v}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \\ e_{12} = \frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{u}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta}, \quad e_{22} = \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{u}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} - \frac{w}{R_2} \\ e_{13} = \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{u}{R_1}, \quad e_{23} = \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} + \frac{v}{R_2} \quad (1.2)$$

К сожалению, выражения (1.1) содержат квадраты как нормальной, так и тангенциальной проекции перемещения. Их можно несколько упростить, если проекции перемещения сравнимы с толщиной оболочки, но малы по сравнению с другими ее линейными размерами. Пусть оболочка тонкая, т. е.

$$\frac{t}{R} \sim \varepsilon_p \quad (1.3)$$

где символ \sim указывает одинаковость порядка сравниваемых величин, ε_p — максимальное удлинение в пределах пропорциональности.

Как видно из (0.2):

$$\frac{\delta}{t} \sim \varepsilon_p^{-1/3}, \quad \gamma \sim \varepsilon_p^{1/3} \quad (1.4)$$

Так как в явлении хлопка мы имеем дело с перемещениями и усилиями, быстро затухающими от центра области хлопка к его краям, причем величина этой области мала по (1.4), то

$$\frac{\partial w}{\partial \alpha} \sim \frac{w}{\gamma} \sim w \varepsilon_p^{-1/3}$$

Следовательно,

$$\frac{w}{R} \ll \frac{\delta}{R} = \frac{\delta}{t} \frac{t}{R} \sim \varepsilon_p^{2/3}, \quad \frac{1}{A^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^2 \sim \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^2 \sim \varepsilon_p^{2/3}$$

Совершенно так же, например,

$$\frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} \ll \varepsilon_p^{2/3}, \quad \frac{u}{A} \ll \varepsilon_p$$

Таким образом, ε_1 , ε_2 , ω могут быть разностями величин порядка $\varepsilon_p^{2/3}$. Поэтому при определении удлинений может произойти потеря точности, если не позаботиться о сохранении величин высшего порядка малости.

Из (1.1) следует, что

$$e_{11} = -\frac{1}{2} e_{13}^2 - \frac{1}{2} e_{12}^2 + \varepsilon_1 - \frac{1}{2} e_{11}^2$$

Следовательно, так как

$$\varepsilon_1 \sim \varepsilon_p, \quad e_{12} \sim \varepsilon_p^{2/3} \sim e_{11}, \quad e_{13} \sim \varepsilon_p^{1/3}$$

то, пренебрегая ε_p по сравнению с единицей, находим

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &\approx e_{11} + \frac{1}{2} e_{12}^2 + \frac{1}{2} e_{13}^2 + \frac{1}{8} e_{13}^4 \\ \varepsilon_2 &\approx e_{22} + \frac{1}{2} e_{21}^2 + \frac{1}{2} e_{23}^2 + \frac{1}{8} e_{23}^4 \\ \omega &\approx e_{12} + e_{21} - e_{11}e_{12} - e_{22}e_{21} + e_{13}e_{23} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Если в области хлопка ни одна из величин A и B не равна нулю, то

$$e_{22} \approx \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} - \frac{w}{R_2}, \quad \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} \approx \frac{w}{R_2} + \varepsilon_2 - \frac{1}{2} e_{21}^2 - \frac{1}{2} e_{23}^2 - \frac{1}{8} e_{23}^4$$

В первом приближении имеем

$$\frac{\partial v}{\partial \beta} \approx \frac{Bw}{R_2} \quad \text{или} \quad v \approx \int_0^\beta \frac{Bw}{R_2} d\beta$$

если $v = 0$ при $\beta = 0$. Следовательно, с принятой точностью

$$e_{23} \approx \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} + \frac{1}{R_2} \int_0^\beta \frac{Bw d\beta}{R_2}, \quad e_{13} \approx \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{1}{R_1} \int_0^\alpha \frac{Aw}{R_1} d\alpha \quad (1.6)$$

Здесь вторая формула находится аналогично, если $u = 0$ при $\alpha = 0$. Теперь имеем

$$e_{23}^2 \approx \left(\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right)^2 + \frac{2}{BR_2} \frac{\partial w}{\partial \beta} \int_0^\beta \frac{Bw}{R_2} d\beta, \quad e_{23}^4 \approx \left(\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right)^4, \dots \quad (1.7)$$

Пусть $e_{11}^\circ, \dots, e_{23}^\circ$ — соответствующие величины для состояния оболочки до хлопка, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \omega$ — удлинения для состояния после хлопка и u, v, w — дополнительные перемещения. Тогда

$$\bar{\varepsilon}_1 = e_{11}^\circ + e_{11} + \frac{1}{2} (e_{12}^\circ + e_{12})^2 + \frac{1}{2} (e_{13}^\circ + e_{13})^2 + \frac{1}{8} (e_{13}^\circ + e_{13})^4$$

Предполагая, что в области выпучивания первое состояние можно считать близким к безмоментному, имеем

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_1 &= \varepsilon_1^\circ + \varepsilon_1 = \varepsilon_1^\circ + e_{11} + \frac{1}{2} e_{12}^2 + \frac{1}{2} e_{13}^2 + \frac{1}{8} e_{13}^4 \\ \bar{\varepsilon}_2 &= \varepsilon_2^\circ + \varepsilon_2, \quad \bar{\omega} = \omega^\circ + \omega \end{aligned}$$

Если, кроме основного состояния равновесия, возможно при той же внешней нагрузке устойчивое положение равновесия после хлопания, то полная энергия должна быть минимальной и в этом последнем положении. Таким образом, задача приводится к минимизации функционала:

$$\begin{aligned} \Phi = \iint_{(s)} \left\{ \frac{K}{2} \left[(\varepsilon_1^\circ + \varepsilon_1)^2 + (\varepsilon_2^\circ + \varepsilon_2)^2 + 2\nu(\varepsilon_1^\circ + \varepsilon_1)(\varepsilon_2^\circ + \varepsilon_2) + \frac{(1-\nu)}{2} (\omega^\circ + \omega)^2 \right] + \right. \\ \left. + \frac{D}{2} [\chi_1^2 + \chi_2^2 + 2\nu\chi_1\chi_2 + 2(1-\nu)\chi_{12}^2] - W \right\} AB d\alpha d\beta \quad (1.8) \end{aligned}$$

Здесь интегрирование берется по всей срединной поверхности оболочки, W — удельная работа внешних сил,

$$K = \frac{Et}{1-\nu^2}, \quad D = \frac{Et^3}{1-\nu^2} \quad (1.9)$$

а изменения кривизны следует определять по формулам

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} e_{23} + \frac{1}{A} \frac{\partial e_{13}}{\partial \alpha}, & \kappa_2 &= \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} e_{13} + \frac{1}{B} \frac{\partial e_{23}}{\partial \beta} \\ \kappa_{12} &= -\frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} e_{13} + \frac{1}{A} \frac{\partial e_{23}}{\partial \alpha} \end{aligned}$$

При определении этих последних можно ограничиться первыми приближениями

$$e_{13} \approx \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha}, \quad e_{23} \approx \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta}$$

если пренебрегать $\varepsilon_p^{2/3}$ по сравнению с единицей.

В частности, в случае хлопка сферической оболочки, находящейся под действием равномерно распределенного нормального внешнего давления, принимая за полюс центр области хлопка и за координатные линии меридианы и параллели, имеем

$$A = R, \quad B = R \sin \alpha, \quad \varepsilon_0 = \varepsilon_1^\circ = \varepsilon_2^\circ = -\frac{w^\circ}{R}, \quad \omega^\circ = 0, \quad T_1^\circ = T_2^\circ = T^\circ$$

Пусть хлопок симметричен относительно полюса. Тогда

$$\begin{aligned} \nu &= 0, \quad \omega = 0, \quad \kappa_{12} = 0, \quad e_{23} = 0, \quad e_{12} = e_{21} = 0, \quad e_{11} = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} - w \right) \\ \varepsilon_2 = e_{22} &= \frac{1}{R} (u \operatorname{ctg} \alpha - w), \quad u = (R\varepsilon_2 + w) \operatorname{tg} \alpha, \quad \kappa_1 \approx \frac{1}{R^2} \frac{d^2 w}{d\alpha^2}, \\ \varepsilon_{13} &= \frac{1}{R} \left(\frac{dw}{d\alpha} + u \right) \approx \frac{1}{R} \left(\frac{dw}{d\alpha} + w\alpha \right), \quad \kappa_2 = \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{R} e_{13} \approx \frac{1}{R^2 \alpha} \frac{dw}{d\alpha} \end{aligned} \quad (1.10)$$

Потеря точности не может происходить при определении работы внешних сил. Поэтому, ограничиваясь первым приближением и полагая $\sin \alpha \approx \alpha$, $\cos \alpha \approx 1$, имеем

$$W \approx p(w + w_0) = -\frac{2T_0}{R} (w + w_0) = -\frac{2K(1+\nu)\varepsilon_0}{R} (w - \varepsilon^\circ R)$$

Для величин, зависящих лишь от равномерного сжатия, α меняется от $\alpha = 0$ до $\alpha = \pi$. Величины, характеризующие хлопок, могут быть отличны от нуля лишь в области $0 \leq \alpha \leq \gamma$. Поэтому по формуле (1.8)

$$\begin{aligned} \frac{\Phi}{2\pi} &= -\int_0^\pi K(1+\nu)\varepsilon_0^2 R^2 \sin \alpha d\alpha + \int_0^\gamma \left\{ \frac{K}{2} (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + 2\nu\varepsilon_1\varepsilon_2) + \right. \\ &+ K(1+\nu)\varepsilon^\circ (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + 2K(1+\nu)\varepsilon_0 \frac{w}{R} + \frac{D}{2R^4} \left[\left(\frac{d^2 w}{d\alpha^2} \right)^2 + \right. \\ &\left. \left. + \frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{dw}{d\alpha} \right)^2 + \frac{2\nu}{\alpha} \frac{d^2 w}{d\alpha^2} \frac{dw}{d\alpha} \right] \right\} R^2 \alpha d\alpha \end{aligned}$$

Полагаем

$$u = 0, \quad w = 0, \quad \frac{dw}{d\alpha} = 0 \quad \text{при} \quad \alpha = \gamma \quad (1.11)$$

По условиям симметрии имеем

$$u = 0, \quad \frac{dw}{dx} = 0 \quad \text{при } \alpha = 0 \quad (1.12)$$

Кроме того, можно положить

$$\epsilon_0 \left(\frac{1}{2} \epsilon_{13}^2 + \frac{1}{8} \epsilon_{13}^4 \right) \approx \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_{13}^2$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{\Phi}{2\pi} = & -2K(1+\nu)R^2\epsilon_0^2 + \int_0^\gamma \left\{ \frac{K}{2}(\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + 2\nu\epsilon_1\epsilon_2) + \right. \\ & \left. + K(1+\nu)\frac{\epsilon_0}{2R^2}\left(\frac{dw}{d\alpha}\right)^2 + \frac{D}{2R^4}\left[\left(\frac{d^2w}{d\alpha^2}\right)^2 + \frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{dw}{d\alpha}\right)^2\right] \right\} R^2\alpha d\alpha \quad (1.13) \end{aligned}$$

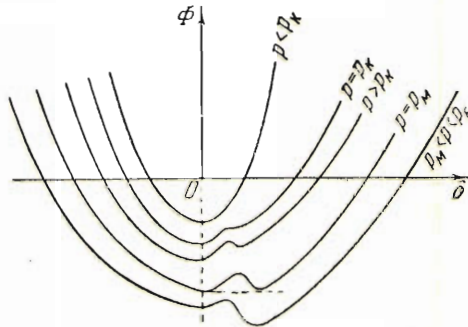
Очевидно, полная энергия в первой форме равновесия будет

$$\frac{\Phi_0}{2\pi} = -2K(1+\nu)R^2\epsilon_0^2$$

и задача приводится к минимизации функционала $\Phi' = \Phi - \Phi_0$.

Состояние равновесия устойчиво, если функционал энергии Φ в этом состоянии имеет минимум. Состояние равновесия до хлопка (нулевое состояние) устойчиво, если $p < p_E$. Как показано в работе [3], имеются и другие устойчивые состояния равновесия, если давление больше некоторого минимального значения p_K , причем $p_K < p_E$.

Очевидно, при $p > p_K$ возможны по крайней мере три состояния равновесия: устойчивое «нулевое состояние», устойчивое «нелинейное состояние» и неустойчивое состояние, в котором Φ имеет седлообразную точку (фиг. 1).



Фиг. 1

При $p = p_K$ устойчивое и неустойчивое состояния равновесия сливаются в одно состояние, в котором Φ имеет параболическую точку, т. е. первая и вторая вариации Φ равны нулю. Уровень полной энергии в этом состоянии выше, чем в нулевом состоянии. Следовательно, если p лишь немного больше p_K , уровень энергии нелинейного устойчивого состояния выше, чем в состоянии до хлопка.

При некотором значении p , большем p_K , полная энергия «нелинейного состояния» становится равной энергии «нулевого состояния». Это значение давления будем обозначать через p_M . Оно является нижним пределом всех тех значений p , при которых энергия нелинейного состояния меньше энергии «нулевого состояния». Как оказывается, p_M в случае оболочек мало отличается от p_K . Вычисление же p_M проще, чем p_K . Поэтому в дальнейшем мы нередко будем ограничиваться определением p_M .

2. Определение p_M и p_K по методу Ритца в предположении жесткой заделки границы области хлопка. В соответствии с намеченным планом решения составляем выражение Φ' , сохраняя в нем, наряду с главными членами, и члены порядка w_2^6 . При этом предполагаем, что u и w подбираются так, чтобы удовлетворялись условия (1.11) и (1.12). После несложных, но довольно длинных вычислений, вводя обозначения

$$\xi = \frac{\alpha}{\gamma}, \quad \zeta = \xi^2, \quad \gamma^2 = b \quad (2.1)$$

и полагая

$$u = c\gamma\xi R h(\zeta), \quad w = aRg(\zeta), \quad h(1) = g(1) = g_\zeta(1) = 0 \quad (2.2)$$

находим

$$\begin{aligned} \frac{\Phi'}{2\pi R^2 K} = & A_0 b c^2 - A_1 a b c + A_{22} a^2 b + A_{23} a^2 c + A_3 a^3 + A_4 \frac{a^4}{b} + \\ & + B_0 b^2 c^2 + B_1 a b^2 c + B_2 a^2 b c + B_3 a^3 b + B_{43} \frac{a^4 c}{b} + B_4 a^4 + \\ & + B_5 \frac{a^5}{b} + B_6 \frac{a^6}{b^2} - A e_0 a^2 + \frac{B a^2 \tau^2}{b} = 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

где

$$e_0 = -\frac{T_0}{K} = -\frac{\sigma_0}{E} (1 - \nu^2), \quad \tau^2 = \frac{t^2}{12R^2} \quad (2.4)$$

$$A_0 = \int_0^1 \zeta^2 h_\zeta^2 d\zeta, \quad A_1 = -(1 + \nu) \int_0^1 \zeta h g_\zeta d\zeta, \quad A_{22} = \frac{1}{2} (1 + \nu) \int_0^1 g^2 d\zeta \quad (2.5)$$

$$A_{23} = \int_0^1 [2\zeta^2 h_\zeta g_\zeta^2 + (1 + \nu) \zeta h g_\zeta^2] d\zeta, \quad A_3 = -(1 + \nu) \int_0^1 \zeta g g_\zeta^2 d\zeta$$

$$A_4 = \int_0^1 \zeta^2 g_\zeta^4 d\zeta, \quad B_0 = -\frac{1}{6} (1 - \nu) \int_0^1 \zeta h^2 d\zeta, \quad B_1 = \frac{1}{6} (1 + \nu) \int_0^1 g h \zeta d\zeta$$

$$B_2 = \int_0^1 \left[2\zeta^2 h_\zeta g g_\zeta + (1 + \nu) g h g_\zeta \zeta - \frac{1}{3} \zeta^2 h g_\zeta^2 \right] d\zeta$$

$$B_3 = \int_0^1 \zeta g_\zeta g^2 d\zeta = -\frac{1}{3} \int_0^1 g^3 d\zeta, \quad B_{43} = \int_0^1 [2\zeta^3 h_\zeta + (1 + \nu) \zeta^2 h] g_\zeta^4 d\zeta$$

$$B_4 = \int_0^1 2\zeta^2 g g_\zeta^3 d\zeta, \quad B_5 = -(1 + \nu) \int_0^1 g \zeta^2 g_\zeta^4 d\zeta, \quad B_6 = \int_0^1 2\zeta^3 g_\zeta^6 d\zeta$$

$$A = \int_0^1 \zeta g_\zeta^2 d\zeta, \quad B = \frac{1}{4} \int_0^1 \zeta^2 g_\zeta^2 d\zeta$$

В первом приближении, полагая $\sin \alpha \approx \alpha$, $\cos \alpha \approx 1$ и пренебрегая w_2^6 , $u w_2^4$, ..., членами, содержащие коэффициенты B_0 , B_1 , ..., B_6 , можно положить равными нулю.

Введем новые параметры

$$\lambda = \frac{a}{b} \sqrt{\frac{A_1}{A_0}}, \quad \mu = \frac{\tau}{b} \sqrt{\frac{B}{A_4}}, \quad \rho = \frac{c}{a} \quad (2.6)$$

и обозначения

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \frac{A_1}{A_0}, & \theta_2 &= \frac{A_{22}}{A_0}, & \theta_3 &= \frac{A_{23}}{\sqrt{A_0 A_1}}, & \theta_4 &= \frac{A_3}{\sqrt{A_0 A_1}}, & \theta_5 &= \frac{A_4}{A_1} \\ \Gamma_1 &= \frac{B_0 \sqrt{B}}{\sqrt{A_0^3}}, & \Gamma_2 &= \frac{B_1 \sqrt{B}}{\sqrt{A_0^3}}, & \Gamma_3 &= \frac{B_2 \sqrt{B}}{A_0 \sqrt{A_1}}, & \Gamma_4 &= \frac{B_3 \sqrt{B}}{A_0 \sqrt{A_1}} \\ \Gamma_5 &= \frac{B_4 \sqrt{B}}{A_1 \sqrt{A_0}}, & \Gamma_6 &= \frac{B_{43} \sqrt{B}}{\sqrt{A_1^3}}, & \Gamma_7 &= \frac{B_5 \sqrt{B}}{\sqrt{A_1^3}}, & \Gamma_8 &= \frac{B_6 \sqrt{A_0 B}}{A_1^2} \\ e^* &= \frac{e_0}{\tau} \frac{A}{\sqrt{A_0 B}} \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\varphi = \varphi(\lambda, \rho) = \Gamma_1 \rho^2 + \Gamma_2 \rho + \Gamma_3 \rho \lambda + \Gamma_4 \lambda + \Gamma_5 \lambda^2 + \Gamma_6 \rho \lambda^3 + \Gamma_7 \lambda^3 + \Gamma_8 \lambda^4$$

Тогда функционал приведет к виду

$$\begin{aligned} \Phi^* &= \frac{\Phi'}{2\pi R^2 K} \frac{A_1}{B^{3/2} A_0^{1/2} \tau^3} = \\ &= \frac{1}{\mu^3} (\lambda^2 \rho^2 - \lambda^2 \rho \theta_1 + \lambda^2 \theta_2 + \rho \lambda^3 \theta_3 + \lambda^3 \theta_4 + \lambda^4 \theta_5) - \frac{\lambda^2}{\mu^2} e^* + \frac{\lambda^2}{\mu} + \frac{\tau}{\mu^4} \lambda^2 \varphi \end{aligned} \quad (2.8)$$

Параметры λ , ρ , μ , характеризующие область хлопка, и величину ρ_M определяем из уравнений

$$\Phi^* = 0, \quad \frac{\partial \Phi^*}{\partial \lambda} = 0, \quad \frac{\partial \Phi^*}{\partial \rho} = 0, \quad \frac{\partial \Phi^*}{\partial \mu} = 0$$

или

$$\frac{1}{\mu^2} [\rho^2 - \rho \theta_1 + \theta_2 + \lambda (\rho \theta_3 + \theta_4) + \lambda^2 \theta_5] - \frac{e^*}{\mu} + 1 + \frac{\tau}{\mu^3} \varphi = 0 \quad (2.9)$$

$$\frac{1}{\mu^2} (\rho^2 - \rho \theta_1 + \theta_2 + \frac{3}{2} \rho \lambda \theta_3 + \frac{3}{2} \lambda \theta_4 + 2 \lambda^2 \theta_5) - \frac{e^*}{\mu} + 1 + \frac{\tau}{\mu^3} \left(\varphi + \frac{\lambda \varphi_\lambda}{2} \right) = 0 \quad (2.10)$$

$$2\rho - \theta_1 + \lambda \theta_3 + \frac{\tau}{\mu} \varphi_\rho = 0 \quad (2.11)$$

$$\frac{3}{\mu^2} (\rho^2 - \rho \theta_1 + \theta_2 + \rho \lambda \theta_3 + \lambda \theta_4 + \lambda^2 \theta_5) - \frac{2e^*}{\mu} + 1 + \frac{4\tau}{\mu^3} \varphi = 0 \quad (2.12)$$

Вычитая (2.9) из (2.10), имеем

$$\rho \theta_3 + \theta_4 + 2\lambda \theta_5 + \frac{\tau}{\mu} \varphi_\lambda = 0 \quad (2.13)$$

Вычитая (2.10) из (2.12), имеем

$$\frac{1}{\mu^2} (\rho^2 - \rho \theta_1 + \theta_2 - \lambda^2 \theta_5) - 1 + \frac{\tau}{\mu^3} (2\varphi - \lambda \varphi_\lambda) = 0 \quad (2.14)$$

Из уравнений (2.11) и (2.13) имеем

$$\rho = \rho_I + \frac{\tau}{\mu} \frac{(\theta_3 \varphi_\lambda - 2\theta_5 \varphi_\rho)}{4\theta_5 - \theta_3^2}, \quad \lambda = \lambda_I + \frac{\tau}{\mu} \frac{(\theta_3 \varphi_\rho - 2\varphi_\lambda)}{4\theta_5 - \theta_3^2} \quad (2.15)$$

Здесь

$$\lambda_I = \frac{-\theta_1 \theta_3 - \theta_4}{4\theta_5 - \theta_3^2}, \quad \rho_I = \frac{\theta_3 \theta_4 + 2\theta_1 \theta_5}{4\theta_5 - \theta_3^2} \quad (2.16)$$

суть величины параметров в первом приближении, соответствующем пренебрежению членами, содержащими множитель τ/μ .

С этой же точностью из (2.14) и (2.9) следует

$$\mu_I^2 = \rho_I^2 - \rho_I \theta_1 + \theta_2 - \lambda_I^2 \theta_5, \quad e_I^* = 2\mu_I \quad (2.17)$$

Уточненное значение μ находим из (2.14), подставляя в него вместо ρ и λ выражения (2.15), в которых в членах, содержащих τ/μ , λ и ρ заменены их приближенными значениями λ_I и ρ_I .

Пренебрегая в нем членами, содержащими τ^2 , приходим к уравнению

$$\mu^3 - \mu\mu_I^2 - 2\tau\varphi_I = 0, \quad \varphi_I = \varphi(\lambda_I, \rho_I) \quad (2.18)$$

Пусть уточненное значение есть $\mu = \mu_I(1 + m)$. Тогда, если

$$\frac{9}{2} \left(\frac{\tau\varphi_I}{\mu_I^3} \right)^2 \ll 1 \quad (2.19)$$

то

$$m \approx \frac{\tau\varphi_I}{\mu_I^3}, \quad e^* \approx 2\mu_I + \frac{\tau}{\mu_I^2} \varphi_I \quad (2.20)$$

Для численного определения p_M были использованы различные выражения для h и g при $\nu = 0.3$. Приводим окончательные результаты

$$\text{Если } h = g = (1 - \zeta)^2, \text{ то } \begin{cases} e_0^I = 0.4051 t / R & (\text{первое приближение}) \\ e_0 = 0.3799 t / R & (\text{второе приближение}) \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{l} \lambda_I = 0.7968, \quad \rho_I = 0.7691, \quad \mu_1 = 0.2693 \quad (\text{первое приближение}) \\ \lambda = 0.7993, \quad \rho = 0.7760, \quad \mu = 0.2511 \quad (\text{второе приближение}) \end{array} \right)$$

В этом случае разница между e_0 и e_0^I составляет всего 6.2%.

$$\text{Если } h = 1 - \zeta, \quad g = (1 - \zeta)^2, \quad \text{то } e_0^I = 0.8380 t / R$$

$$\text{Если } h = g = (1 - \zeta^2)^2, \quad \text{то } e_0^I = 0.5468 t / R$$

$$\text{Если } h = g = \frac{1}{2}(1 + \cos \pi\zeta), \quad \text{то } e_0^I = 0.5132 t / R$$

$$\text{Если } h = (1 - \zeta)(1 - k\zeta), \quad g = (1 - \zeta)^2, \quad \text{то } e_0^I = 0.3410 t / R$$

В последнем случае минимальное значение e_0^I достигается для $k = 1.2$. При этом

$$\lambda_I = 0.8274, \quad \rho_I = 0.8352, \quad \mu_I = 0.2410$$

Во втором приближении

$$\lambda = 0.8308, \quad \rho = 0.8377, \quad \mu = 0.2042, \quad e_0 = 0.3154 t / R$$

Следовательно, разница составляет около 7.5%.

Нам удалось найти также наименьшее значение

$$e_0^I = 0.2200 \frac{t}{R} \quad \text{при } h = (1 - \zeta)(1 - 1.2\zeta), \quad g = (1 - \zeta)^2(1 + 0.5\zeta) \quad (2.21)$$

Таким образом, находим

$$|\sigma_0^M| = 0.2200 \frac{Et}{R\nu\sqrt{1-\nu^2}} \quad (2.22)$$

Далее определяем p_h из уравнений

$$\begin{array}{l} \frac{\partial \Phi_I^*}{\partial \lambda} = 0, \\ \frac{\partial \Phi_I^*}{\partial \mu} = 0, \\ \frac{\partial \Phi_I^*}{\partial \rho} = 0 \end{array} \quad \left| \begin{array}{ccc} \frac{\partial^2 \Phi_I^*}{\partial \lambda^2} & \frac{\partial^2 \Phi_I^*}{\partial \lambda \partial \rho} & \frac{\partial^2 \Phi_I^*}{\partial \lambda \partial \mu} \\ \frac{\partial^2 \Phi_I^*}{\partial \lambda \partial \rho} & \frac{\partial^2 \Phi_I^*}{\partial \rho^2} & \frac{\partial^2 \Phi_I^*}{\partial \rho \partial \mu} \\ \frac{\partial^2 \Phi_I^*}{\partial \lambda \partial \mu} & \frac{\partial^2 \Phi_I^*}{\partial \mu \partial \rho} & \frac{\partial^2 \Phi_I^*}{\partial \mu^2} \end{array} \right| = 0 \quad (2.23)$$

После некоторых преобразований для определения λ, ρ, μ, p_k приходим к уравнениям

$$\begin{aligned} \lambda^3 - 4 \left(\frac{4\theta_2 - \theta_1^2}{4\theta_5 - \theta_3^2} \right) \lambda - 3 \frac{(4\theta_2 - \theta_1^2)(\theta_1\theta_3 + 2\theta_4)}{(4\theta_5 - \theta_3^2)^2} &= 0 \\ \rho &= \frac{1}{2} (\theta_1 - \lambda\theta_3), \quad \mu^2 = \rho^2 - \rho\theta_1 + \theta_2 - \lambda^2\theta_5 \\ e_k^* &= \frac{1}{2\mu} [4\mu^2 + 6\lambda^2\theta_5 + 3\lambda(\rho\theta_3 + \theta_4)] \end{aligned} \tag{2.24}$$

Отсюда при задании области хлопка формулами (2.17) находим

$$|\sigma_0^k| = 0.1927 \frac{Et}{R \sqrt{1-\nu^2}} \tag{2.25}$$

Эта величина на 31% больше экспериментального значения согласно (0.2) и в три раза меньше теоретического значения (0.1), полученного по линеаризованной теории.

Такой результат следует считать вполне удовлетворительным, если учесть, что наше решение получено в предположении жесткого закрепления границы области хлопка.

3. Другой метод определения p_k и p_M . Выше указывалось, что необходимо возможно точнее определять энергию оболочки от добавочных удлинений:

$$\begin{aligned} \frac{\Phi_m}{2\pi} &= \frac{K}{2} \int_0^\gamma (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + 2\nu\varepsilon_1\varepsilon_2) \sin \alpha \, d\alpha = \\ &= \frac{1}{2Et} \int_0^\gamma [(T_1 + T_2)^2 - 2T_1T_2(1 + \nu)] \sin \alpha \, d\alpha \end{aligned}$$

Имеем уравнение равновесия

$$\frac{d}{d\alpha} (T_1 \sin \alpha) = T_2 \cos \alpha \tag{3.1}$$

а также условие совместности деформаций

$$\varepsilon_1 = \frac{d}{d\alpha} (\varepsilon_2 \operatorname{tg} \alpha) + f \tag{3.2}$$

где

$$f = \frac{1}{R} (w_\alpha \operatorname{tg} \alpha + w \operatorname{tg}^2 \alpha) + \frac{1}{2} e_{13}^2 + \frac{1}{8} e_{13}^4, \quad e_{13} \approx \frac{1}{R} (w_\alpha + w \operatorname{tg} \alpha)$$

При определении f возможна указанная выше потеря точности, поэтому при решении задачи во втором приближении пользуемся выражением (3.2), сохраняя в нем не только величины одного порядка с $\varepsilon_p^2/3$, но и величины порядка $\varepsilon_p^4/3$, пренебрегая, однако, величинами порядка ε_p^2 . Поэтому, вводя обозначение

$$x = \sin \alpha \tag{3.3}$$

и считая α настолько малым, что $\cos \alpha \approx 1 - \frac{1}{2} x^2$, имеем

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{R} \left(x \frac{dw}{dx} + wx^2 \right) + \frac{1}{2R^2} \left[(1 - x^2) \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 + 2xw \frac{dw}{dx} \right] + \frac{1}{8R^4} \left(\frac{dw}{dx} \right)^4 \\ \frac{d}{dx} (T_1 x) &= T_2, \quad \varepsilon_1 = \frac{d}{dx} (x\varepsilon_2) + f \end{aligned}$$

Из двух последних уравнений находим

$$x \frac{d}{dx}(T_1 + T_2) = -Etf, \quad T_1 + T_2 = -Et \int \frac{f dx}{x} + C$$

Пусть

$$T_1 + T_2 = 0 \quad \text{при} \quad x = x_h = \sin \gamma \quad (3.4)$$

Тогда

$$T_1 + T_2 = Et \int_x^{x_h} \frac{f dx}{x}$$

Но с принятой точностью

$$\int_0^\gamma T_1 T_2 \sin \alpha \, d\alpha \approx \int_0^\gamma T_1 \sin \alpha \frac{d}{d\alpha}(T_1 \sin \alpha) \, d\alpha = 0$$

Поэтому

$$\frac{\Phi_m}{2\pi} \approx \frac{Et}{2} \int_0^{x_h} \left\{ \int_0^{x_h} \frac{f dx}{x} \right\}^2 x \, dx$$

Введем далее независимую переменную

$$\zeta = \frac{x^2}{x_h^2} = \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \gamma} \quad (0 \leq \zeta \leq 1) \quad (3.5)$$

Пусть

$$w = aRg(\zeta), \quad \sin^2 \gamma = b \quad (3.6)$$

После довольно длинных вычислений находим

$$\begin{aligned} \Phi_1 = & C_{11}a^2b - 2C_{12}a^3 + C_{22}\frac{a^4}{b} + D_1a^3b + D_2a^4 + D_3a^2b^2 + \\ & + D_4\frac{a^5}{b} + D_5\frac{a^6}{b^2} + \frac{Aa^2\tau_1^2}{b} - eBa^2 \end{aligned} \quad (3.7)$$

где

$$\tau_1 = \frac{t}{RV\sqrt{12(1-\nu^2)}}, \quad e = \frac{|\sigma_n|}{E} \quad (3.8)$$

$$A = 16 \int_0^1 \zeta^2 g_{\zeta\zeta}^2 \, d\zeta, \quad B = 4 \int_0^1 \zeta g_{\zeta}^2 \, d\zeta$$

$$C_{11} = \int_0^1 g^2 \, d\zeta, \quad C_{12} = \int_0^1 gj \, d\zeta, \quad C_{22} = \int_0^1 j^2 \, d\zeta$$

$$D_1 = \int_0^1 (jh_1 - 2gh_2 + g^3) \, d\zeta, \quad D_2 = \int_0^1 (2jh_2 - g^2j) \, d\zeta$$

$$D_3 = - \int_0^1 gh_1 \, d\zeta, \quad D_4 = - 2 \int_0^1 gh_3 \, d\zeta, \quad D_5 = 2 \int_0^1 jh_3 \, d\zeta$$

$$j = \int_{\zeta}^1 g_{\zeta}^2 \, d\zeta, \quad h_1 = \int_{\zeta}^1 g \, d\zeta, \quad h_2 = - \int_{\zeta}^1 \zeta g_{\zeta}^2 \, d\zeta$$

Введем новые обозначения:

$$\lambda = \frac{a}{b} \sqrt{\frac{2C_{12}}{C_{11}}}, \quad \mu = \frac{\tau_1}{b} \sqrt{\frac{A}{C_{11}}} \quad (3.9)$$

$$\theta_1 = \sqrt{2 \frac{C_{12}}{C_{11}}}, \quad \theta_2 = \frac{C_{22}}{2C_{12}}, \quad e^* = \frac{e}{\tau_1} \sqrt{\frac{B}{AC_{11}}}$$

$$\Gamma_1 = \frac{D_1}{C_{11}} \sqrt{\frac{A}{2C_{12}}}, \quad \Gamma_2 = \frac{D_2}{2C_{12}} \sqrt{\frac{A}{C_{11}}}, \quad \Gamma_3 = \frac{D_3}{C_{11}} \sqrt{\frac{A}{C_{11}}}$$

$$\Gamma_4 = \frac{D_4}{2C_{12}} \sqrt{\frac{A}{2C_{12}}}, \quad \Gamma_5 = \frac{D_5}{4C_{12}^2} \sqrt{AC_{11}} \quad (3.10)$$

$$\psi = \Gamma_1 \lambda + \Gamma_2 \lambda^2 + \Gamma_3 + \Gamma_4 \lambda^3 + \Gamma_5 \lambda^4$$

Тогда функционал приведет к виду (3.11)

$$\Phi^* = \Phi_1 : \frac{A^{3/2} C_{11}^{1/2}}{2C_{12}} \tau_1^3 = \frac{1}{\mu^3} (\lambda^2 - \theta_1 \lambda^3 + \theta_2 \lambda^4) + \frac{\lambda^2}{\mu} - \frac{\lambda^2}{\mu^2} e^* + \frac{\tau_1}{\mu^4} \psi \lambda^2$$

Значение p_M определяем из уравнений $\Phi^* = \Phi_{\lambda^*} = \Phi_{\mu^*} = 0$ или их комбинаций

$$\theta_1 - 2\theta_2 \lambda - \frac{\tau_1}{\mu} \psi_{\lambda} = 0 \quad (3.12)$$

$$\frac{1}{\mu^2} (1 - \theta_2 \lambda^2) - 1 + \frac{\tau_1}{\mu^3} (2\psi - \lambda \psi_{\lambda}) = 0 \quad (3.13)$$

$$\frac{2}{\mu} (1 - \theta_1 \lambda + \theta_2 \lambda^2) - e^* + \frac{3\tau_1}{\mu^2} \psi = 0 \quad (3.14)$$

В первом приближении

$$\lambda_I = \frac{\theta_1}{2\theta_2}, \quad \mu_I = \left(1 - \frac{\theta_1^2}{4\theta_2}\right)^{1/2}, \quad e_{I^*} = 2\mu_I \quad (3.15)$$

Во втором приближении

$$\lambda = \lambda_I - \frac{\tau_1}{2\mu\theta_2} \psi_{\lambda}^I, \quad \psi^I = \psi(\lambda_I) \quad (3.16)$$

$$\mu^3 - \mu_I^2 \mu - 2\tau_1 \psi^I = 0, \quad \mu = \mu_I (1 + m)$$

и если

$$\frac{9}{2} \left(\frac{\tau_1 \psi^I}{\mu_I^3} \right)^2 \ll 1$$

то

$$m \approx \frac{\tau_1 \psi^I}{\mu_I^3}, \quad e^* = e_{M^*} \approx 2\mu_I + \frac{\tau_1}{\mu_I^2} \psi^I \quad (3.17)$$

Значение p_k определяем из уравнений

$$\frac{\partial \Phi^*}{\partial \lambda} = 0, \quad \frac{\partial \Phi^*}{\partial \mu} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial \lambda^2} \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial \mu^2} - \left(\frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial \lambda \partial \mu} \right)^2 = 0 \quad (3.18)$$

В первом приближении

$$\Phi_{I^*} = \frac{1}{\mu^3} (\lambda^2 - \theta_1 \lambda^3 + \theta_2 \lambda^4) + \frac{\lambda^2}{\mu} - \frac{\lambda^2}{\mu^2} e^*$$

Таким образом, после преобразований приходим к уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu^2} (2 - 3\theta_1\lambda + 4\theta_2\lambda^2) + 2 - \frac{2e^*}{\mu} &= 0 \\ \frac{3}{\mu^2} (1 - \theta_1\lambda + \theta_2\lambda^2) + 1 - \frac{2e^*}{\mu} &= 0 \\ \lambda^3 - \frac{1}{3} \frac{\theta_1}{\theta_2} \lambda^2 - \frac{4}{9} \frac{1}{\theta_2} (3 - 2\mu^2) \lambda + \frac{\theta_1}{6\theta_2^2} (3 - 2\mu^2) &= 0 \end{aligned}$$

из которых следует, что

$$\begin{aligned} \mu^2 &= 1 - \theta_2\lambda^2, & \lambda^3 - \frac{4}{\theta_2} \lambda + \frac{3}{2} \frac{\theta_1}{\theta_2^2} &= 0 \\ e^* &= e_{Ik}^* = \frac{1}{\mu} (2 - \frac{3}{2} \theta_1\lambda + \theta_2\lambda^2) \end{aligned} \quad (3.19)$$

Для численного определения p_M и p_k область хлопка будем задавать затухающей функцией

$$g = e^{-n\zeta} (1 - k\zeta) \quad (3.20)$$

Такой выбор объясняется тем, что в действительности влияние хлопка распространяется на всю оболочку и границы области хлопка являются условными в том смысле, что при $\alpha \geq \gamma$ или, что то же, при $\zeta \geq 1$ выпучивание становится малым и экспериментаторы его не отмечают. Мы будем предполагать, что в выражении (3.20) за n принято такое число, при котором для $\zeta = 1$ прогиб становится пренебрегаемо малым. При этом приближенно удовлетворяется существенное для данного метода условие (3.4) и в формулах (3.8) за верхние пределы интегралов вместо единицы можно взять бесконечность.

Наименьшее значение критического напряжения (3.15) получается при

$$k = 0.7n \quad (3.21)$$

При этом в первом приближении $e_{0I} = 0.623\tau_1$ и во втором приближении, если в малых членах по опытным данным (1.2) положить $R/t = 900$, будет $e_{0M} = 0.624\tau_1$.

Второе приближение и в данном случае, как и в § 2, мало отличается от первого приближения. Поэтому для тонких оболочек можно принять формулы первого приближения. Таким образом, при форме хлопка (3.20) имеем

$$\sigma_M = \frac{0.18030}{\sqrt{1 - \nu^2}} \frac{Et}{R} \quad (3.22)$$

Это дает значение, на 22% превышающее экспериментальное значение (0.2). Второе приближение по формуле (3.17) дает

$$\sigma_M = \frac{0.18023}{\sqrt{1 - \nu^2}} \frac{Et}{R}$$

Для этой формы хлопка критическое значение давления в соответствии с формулой (3.19) будет

$$\sigma_k = 0.15966 (1 - \nu^2)^{-1/2} \frac{E\zeta}{R} \quad (3.23)$$

Эта величина лишь на 8% больше экспериментального значения.

Как обычно, это имеет место при приближенных решениях по методу Ритца, и в рассматриваемом случае форма хлопка определяется с большей погрешностью, чем критическая нагрузка.

Для σ_M при $R/t = 900$ находим $\delta/t = 8.81$ (вместо экспериментального значения 12.5) и $\gamma = \sqrt{0.007559n}$.

Этот последний результат показывает, что величина области хлопка зависит от n . Можно полагать, что при $n = 5$ (или даже при $n = 4$) на границе в области хлопка выпучивание очень мало и не обнаруживается экспериментатором. Следовательно, можно принять $\gamma = 11^\circ 50'$ при $n = 5$ (или $\gamma = 9^\circ 50'$ при $n = 4$). Для σ_k находим

$$\frac{\delta}{t} = 5.44, \quad \gamma = 8^\circ 2' \text{ при } n = 4, \quad \gamma = 8^\circ 59' \text{ при } n = 5 \quad (3.24)$$

4. Критика решений Кармана и Тзяна и Фридрихса. Карман и Тзян при решении поставленной задачи [3], как это было отмечено и Фридрихсом [4], допустили две существенные ошибки. Во-первых, они произвольно приняли $\epsilon_2 = 0$, что должно было дать завышенное значение критического давления. Во-вторых, задачу определения формы хлопка и давления, при которых функционал полной энергии имеет минимальное значение, они подменили задачей определения наименьшего значения давления, не заботясь о минимизации энергии (вопреки принципу Лагранжа-Дирихле). Функционал энергии по (3.11) имеет вид

$$\Phi^* = f_1(\lambda, \mu) - p f_2(\lambda, \mu)$$

Поэтому согласно процедуре, примененной Карманом и Тзяном, находим последовательно

$$\frac{\partial \Phi^*}{\partial \lambda} = \frac{\partial f_1}{\partial \lambda} - p \frac{\partial f_2}{\partial \lambda} = 0, \quad p = \frac{\partial f_2}{\partial \lambda} : \frac{\partial f_1}{\partial \lambda} \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \lambda} = \left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial \lambda^2} \frac{\partial f_1}{\partial \lambda} - \frac{\partial f_2}{\partial \lambda} \frac{\partial^2 f_1}{\partial \lambda^2} \right) : \left(\frac{\partial f_1}{\partial \lambda} \right)^2 = 0 \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \mu} = \left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial \lambda \partial \mu} \frac{\partial f_1}{\partial \lambda} - \frac{\partial f_2}{\partial \lambda} \frac{\partial^2 f_1}{\partial \lambda \partial \mu} \right) : \left(\frac{\partial f_1}{\partial \lambda} \right)^2 = 0 \quad (4.3)$$

Получаемые при этом уравнения для определения λ , μ и p_k существенно отличаются от уравнений (3.18) или (3.12)–(3.14) за исключением уравнения (4.1). Оба метода приводят к одинаковым результатам, вообще говоря, лишь в случае малых перемещений, так как тогда из выражения энергии выпадают члены выше второго порядка. В этом случае имеем

$$\Phi^* = \lambda^2 \{ F_1(\mu) - p F_2(\mu) \}$$

и, следуя Карману, находим

$$\frac{\partial \Phi^*}{\partial \lambda} = 2\lambda (F_1 - p F_2) = 0, \quad p = \frac{F_1}{F_2}, \quad \frac{\partial p}{\partial \lambda} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial \mu} = \left(\frac{\partial F_1}{\partial \mu} F_2 - F_1 \frac{\partial F_2}{\partial \mu} \right) : F_2^2 = 0$$

или

$$\frac{\partial F_1}{\partial \mu} - p \frac{\partial F_2}{\partial \mu} = 0$$

Это последнее уравнение совпадает с уравнением $\partial\Phi^*/\partial\mu = 0$. Кроме того, выполняется и третье из уравнений (3.18), а также уравнение $\Phi^* = 0$. Таким образом, оказывается, что при определении верхнего предела критической нагрузки с одинаковым успехом можно пользоваться уравнениями (3.18), или (3.12)—(3.13), или (4.1)—(4.3), причем исчезает разница между p_M и p_k .

Возвращаясь к работе Кармана и Тзяна, следует отметить, что в результате наложения указанных выше двух ошибок эти авторы случайно получили теоретическое «решение», дающее слишком даже хорошее совпадение с экспериментальными данными. Если же, сохраняя допущение $\epsilon_2 = 0$ и форму хлопка $g(\zeta) = g(1 - \zeta)^2$, принятые Карманом и Тзяном, применять правильную процедуру минимизации энергии, то найденное значение критического напряжения оказывается, как и следовало ожидать, почти в три раза большим экспериментального значения. А именно, получается

$$\sigma_k = \frac{0.47}{\sqrt{1-\nu^2}} \frac{Et}{R}, \quad \sigma_M = \frac{0.52}{\sqrt{1-\nu^2}} \frac{Et}{R}$$

Ошибку иного рода допустил Фридрихс: при выводе формулы (7) он по существу опирался на условие (3.4), не заботясь о действительном удовлетворении этого условия. Неудивительно поэтому, что для формы хлопка, принятой Карманом, он получил значение

$$\sigma_k^{\circ} = \frac{0.13}{\sqrt{1-\nu^2}} \frac{Et}{R}$$

заниженное против экспериментального, что, конечно, неправоподобно. (По этой же причине неверен вывод Фридрихса о неудовлетворительности примененного им метода асимптотического решения.) Данное же нами в § 3 решение удовлетворяет и условию (3.4), так как при принятой нами форме хлопка все усилия и перемещения затухают.

Поступила 20 VI 1950

Физико-технический институт
Казанского филиала АН СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Лейбензон Л. С. О приложении метода гармонических функций Томсона к вопросу устойчивости сжатых сферической и цилиндрической упругих оболочек. Юрьев. 1917.
2. Zoelly R. Dissertation. Zürich. 1915.
3. Karman Th. and Hsue-Shen-Tsien. The Buckling of Spherical Shells by External Pressure. Journal of the Aeronautical Sciences. 1939. Vol. 7.
4. Friedrichs K. O. On the Minimum Buckling Load for Spherical Shells. Applied Mechanics. 1941. Th. von Karman Anniversary Volume.
5. Феодосьев В. И. К расчету хлопающей мембраны. ПММ. 1946. Т. X. Вып. 2.
6. Муштар Х. М. Некоторые обобщения теории тонких оболочек с приложениями к задаче устойчивости упругого равновесия. Известия Физико-математического общества при Казанском университете им. В. И. Ульянова-Ленина. 1938. Т. XI. Серия 3.