К ЗАДАЧЕ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

П. В. Бромберг (Москва)

В работах [1,2] А. И. Лурье дал метод построения функции Ляпунова, решающий вопрос об устойчивости *в большом* одного класса нелинейных систем, при помощи которого был решен ряд весьма важных задач автоматического регулирования. Однако в некоторых случаях применение этого метода наталкивается на затруднение следующего характера.

Согласно уравнению (4.13) [1]

$$\left(\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{a_\alpha}{\rho_\alpha} + \sqrt{r}\right)^2 + \left(\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\beta_\alpha}{\rho_\alpha} - r\right) = 0$$

необходимым условием абсолютной устойчивости по А. И. Лурье [2] является

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\beta_\alpha}{\rho_\alpha} - r < 0 \tag{1}$$

В случае, когда все корни $\lambda_\alpha = -\rho_\alpha$ характеристического уравнения (1.5) отличны от нуля, из формул (1.22) и (1.24) следует равенство

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\beta_\alpha}{\rho_\alpha} - r = 0 \tag{2}$$

Таким образом, в указанном случае одно из необходимых условий абсолютной устойчивости А. И. Лурье заведомо не выполняется. Однако это затруднение легко преодолеть. Перепишем канонические уравнения А. И. Лурье (1.21) и (1.23) при учете (1.22) и (1.24) в виде

$$\dot{x}_s = \lambda_s x_s + f(\sigma) \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{3}$$

$$\sigma = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\beta_\alpha}{\lambda_\alpha} x_\alpha, \qquad \dot{\sigma} = \sum_{\alpha=1}^{n} \beta_\alpha x_\alpha - rf(\sigma) \tag{4}$$

Далее пусть $\lambda = -\rho$ — произвольное отрицательное число, которое в общем случае следует выбирать достаточно малым.

Умножая первое из уравнений (4) на λ и вычитая результат из второго, получим уравнение

$$\dot{\sigma} = \lambda\sigma + \sum_{\alpha=1}^{n} \beta_\alpha' x_\alpha - rf(\sigma) \tag{5}$$

$$\beta_\alpha' = \beta_\alpha\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_\alpha}\right) \qquad (\alpha = 1, \ldots, n) \tag{6}$$

Таким образом, получаем систему канонических уравнений

$$\dot{x}_s = \lambda_s x_s + f(\sigma) \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{7}$$

$$\dot{\sigma} = \lambda\sigma + \sum_{\alpha=1}^{n} \beta_\alpha' x_\alpha - rf(\sigma) \tag{8}$$

---

[1] Здесь и в дальнейшей двойной нумерацией обозначаются соответствующие формулы работы [2].

[2] Под этим термином здесь понимается асимптотическая устойчивость вне зависимости от вида однозначной функции $f(\sigma)$, обладающей свойством $\sigma f(\sigma) > 0$.

для которых необходимое условие (1), вообще говоря, выполнимо. При этом во всех условиях А. И. Лурье вместо β_α всюду следует брать β_α' согласно формуле (6). В конечных результатах для получения симметричной записи лучше переходить к исходным параметрам β_α, использовав формулы (2) и (6).

Так, например, условие (1) сводится к неравенству

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\beta_\alpha}{\rho_\alpha^2} > 0 \tag{9}$$

Второе необходимое условие

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \beta_\alpha' < 0 \tag{10}$$

вытекающее из уравнения (4.14), при $r=0$ посредством тех же соображений приводится к виду

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \beta_\alpha < 0 \tag{11}$$

Указанный прием позволяет применить метод А. И. Лурье также в тех случаях, когда функция $f(\sigma)$ обладает свойством $\sigma\{f(\sigma)-h^*\sigma\}>0$, т. е. для получения условий абсолютной устойчивости вне зависимости от вида функции, находящейся внутри угла, образованного осью ординат и лучом $h^*\sigma$. Причем здесь, конечно, предполагается, что линейная система, получаемая из (1.1) заменой $f(\sigma)$ на $h\sigma$, устойчива в интервале $h^* \leqslant h < \infty$.

Для этой цели достаточно переписать исходные уравнения (1.1)

$$\dot{\eta}_k = \sum_{\alpha=1}^{n} b_{k\alpha}\eta_\alpha + h_k f(\sigma) \qquad (k=1,\ldots,n), \qquad \sigma = \sum_{\alpha=1}^{n} j_\alpha \eta_\alpha \tag{12}$$

в виде

$$\begin{gathered} \dot{\eta}_k = \sum_{\alpha=1}^{n} b_{k\alpha}\eta_\alpha + h_k h^* \sum_{\alpha=1}^{n} j_\alpha\eta_\alpha + h_k F(\sigma) \qquad (k=1.\ldots,n) \\ \sigma = \sum_{\alpha=1}^{n} j_\alpha\eta_\alpha, \qquad F(\sigma) = f(\sigma) - h^*\sigma \end{gathered} \tag{13}$$

и к полученной системе уравнений применить метод А. И. Лурье с добавлением указанного в настоящей заметке приема, так как теперь заведомо все корни λ_α характеристического уравнения линейной части системы (12)

$$\dot{\eta}_k = \sum_{\alpha=1}^{n} b_{k\alpha}\eta_\alpha + h_k h^* \sum_{\alpha=1}^{n} j_\alpha\eta_\alpha \qquad (k=1,\ldots,n) \tag{14}$$

отличны от нуля и имеют отрицательные вещественные части.

Поступила 1 VI 1950

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А. И. Об устойчивости одного класса регулируемых систем. ПММ. 1945. Т. IX. Вып. 5.
2. Лурье А. И. О канонической форме уравнений теорий автоматического регулирования. ПММ. 1948, Т. XII. Вып. 5.