ОБ УРАВНЕНИЯХ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК

А. И. Лурье (Ленинград)

1. В классической теории упругих оболочек при приведении трехмерной задачи к двумерной напряженное состояние задается восемью усилиями и моментами, представляющими систему сил, статически эквивалентную распределению нормальных напряжений σ_1 и σ_2 и касательных напряжений $\tau_{12}=\tau_{21}$ в сечениях оболочки $\alpha_1=\text{const}$ и $\alpha_2=\text{const}$[1]. При этом каждое из распределений нормальных напряжений заменяется ему статически эквивалентной совокупностью растягивающего усилия и изгибающего момента, тогда как четыре величины S_1, S_2, H_1, H_2 (касательные усилия и крутящие моменты), связанные одним соотношением

$$S_1 - S_2 + \frac{H_1}{R_1} - \frac{H_2}{R_2} = 0 \tag{1.1}$$

вводятся для учета распределения одного лишь касательного напряжения τ_{12}. Это положение вещей является, без сомнения, причиной затруднений, возникающих при формулировании зависимостей между величинами S_1, S_2, H_2, H_2 и соответствующими составляющими деформации срединной поверхности оболочки — сдвигом γ и кручением ω^*.

В этой заметке будет показано, что указанные четыре величины могут быть заменены во всех уравнениях теории оболочек двумя величинами S и H. И с той степенью точности, на которую может претендовать последовательно построенная теория оболочек, основанная на известных кинематических гипотезах, зависимости между величинами S и H и деформациями γ и ω^* будут максимально простыми: S пропорционально γ, H пропорционально ω^*.

Сказанное следует непосредственно из структуры выражения вариации δU потенциальной энергии деформации, отнесенной к единице площади срединной поверхности оболочки. Поскольку на основании указанных кинематических гипотез составляющие деформации e_{13}, e_{23}, e_{33} принимаются равными нулю, выражение δU будет

$$\delta U = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_1 \delta e_{11} + \sigma_2 \delta e_{22} + \tau_{12}\delta e_{12})\left(1+\frac{z}{R_1}\right)\left(1+\frac{z}{R_2}\right)dz \tag{1.2}$$

Заменяя здесь деформации e_{11}, e_{22}, e_{12} их известными выражениями [1] через величины, характеризующие деформацию срединной поверхности (относительные удлинения ε_i, изменения кривизн $\varkappa_i$, сдвиг γ и кручение ω^*), и воспользовавшись определениями усилий и моментов по формулам

$$T_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_1 \left(1+\frac{z}{R_2}\right)dz, \qquad S_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{12}\left(1+\frac{z}{R_2}\right)dz \qquad \text{и т. д.}$$

получим

$$\delta U = T_1 \delta\varepsilon_1 + T_2\delta\varepsilon_2 + \frac{1}{2}\left(S_1 + S_2 - \frac{H_1}{R_1} - \frac{H_2}{R_2}\right)\delta\gamma -$$

$$- G_1\delta\varkappa_1 - G_2\delta\varkappa_2 - (H_1+H_2)\,\delta\omega^* \tag{1.3}$$

Таким образом, в выражение δU касательные усилия и крутящие моменты входят лишь в комбинациях

$$2S = S_1 + S_2 - \frac{H_1}{R_1} - \frac{H_2}{R_2}, \qquad 2H = H_1 + H_2$$

---

[1] За координатные линии приняты линии кривизны на срединной поверхности оболочки.

Поэтому уравнения равновесия оболочки, выводимые с помощью принципа возможных перемещений, будут содержать лишь эти две величины S и H.

Опуская промежуточные выкладки, ход которых общеизвестен, приведем результативные формулы; поверхностные уравнения равновесия будут

$$\begin{gathered}
\frac{\partial (T_1A_2)}{\partial\alpha_1} - T_2\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial}{\partial\alpha_2}A_1\left(S + \frac{H}{R_1}\right) + \frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\left(S + \frac{H}{R_2}\right) + \\
+ A_1A_2\frac{N_1}{R_1} + A_1A_2F_1 = 0 \\
\frac{\partial (T_2A_1)}{\partial\alpha_2} - T_1\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2} + \frac{\partial}{\partial\alpha_1}A_2\left(S + \frac{H}{R_2}\right) + \frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\left(S + \frac{H}{R_1}\right) + \\
+ A_1A_2\frac{N_2}{R_2} + A_1A_2F_2 = 0 \\
\frac{\partial (N_1A_2)}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial (N_2A_1)}{\partial\alpha_2} - A_1A_2\left(\frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2}\right) + A_1A_2F_3 = 0
\end{gathered} \tag{1.5}$$

К ним присоединяются условия равновесия на краях $\alpha_1 = \mathrm{const}$ и $\alpha_2 = \mathrm{const}$:

$$t_1 = T_1, \quad s_1 = S + \frac{2H}{R_2}, \quad n_1 = N_1 + \frac{1}{A_2}\frac{\partial H}{\partial\alpha_2}, \qquad g_1 = G_1 \tag{1.6}$$

$$t_2 = T_2, \quad s_2 = S + \frac{2H}{R_1}, \quad n_2 = N_2 + \frac{1}{A_1}\frac{\partial H}{\partial\alpha_1}, \qquad g_2 = G_2 \tag{1.7}$$

Здесь через N_1 и N_2 обозначены вспомогательные величины, играющие роль перерезывающих сил:

$$\begin{aligned}
A_1A_2N_1 &= \frac{\partial (A_2G_1)}{\partial\alpha_1} - G_2\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1} + H\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2} + \frac{\partial (HA_1)}{\partial\alpha_2} \\
A_1A_2N_2 &= \frac{\partial (A_1G_2)}{\partial\alpha_2} - G_1\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2} + H\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial (HA_2)}{\partial\alpha_1}
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Они отличны от выражений перерезывающих сил в теории оболочек. Через t_1, s_1, n_1, g_1 обозначены составляющие внешнего усилия и изгибающий момент, отнесенные к единице длины края $\alpha_1 = \mathrm{const}$, аналогичное значение имеют s_2, t_2, n_D, g_2 для края $\alpha_2 = \mathrm{const}$; наконец, F_1, F_2, F_3 — проекции внешней поверхностной силы на координатные линии срединной поверхности и нормаль к ней.

Приводимые во всех курсах уравнения равновесия оболочек (поверхностные и краевые) могут быть приведены к виду (1.5)—(1.7), если учесть непосредственно следующие из (1.1) и (1.4) соотношения

$$S = S_1 - \frac{H_2}{R_2} = S_2 - \frac{H_1}{R_1}, \qquad 2H = H_1 + H_2 \tag{1.9}$$

и воспользоваться при преобразовании соотношениями Кодацци.

2. Из выражения (1.3) имеем

$$S = \frac{\partial U}{\partial\gamma}, \qquad 2H = -\frac{\partial U}{\partial\omega^*} \tag{2.1}$$

В. В. Новожилов [2] привел соображения, убедительно доказывающие, что при сохранении кинематических гипотез теории оболочек было бы непоследовательно сохранять в выражении U через составляющие деформации слагаемые, отличающие его от классической формы:

$$\begin{gathered}
U = \frac{Eh}{2(1-\nu^2)}\left[(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 - 2(1-\nu)\left(\varepsilon_1\varepsilon_2 - \frac{\gamma^2}{4}\right)\right] + \\
+ \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)}\left[(\varkappa_1 + \varkappa_2)^2 - 2(1-\nu)(\varkappa_1\varkappa_2 - \omega^{*2})\right]
\end{gathered} \tag{2.2}$$

Искомые соотношения (2.1) получают, таким образом, весьма простой вид:

$$S = \frac{Eh}{2(1+\nu)}\gamma, \qquad H = -\frac{Eh^3}{12(1+\nu)}\omega^* \tag{2.3}$$

Присоединив сюда известные выражения растягивающих усилий и изгибающих моментов через остальные составляющие деформации, а также выражения деформаций через перемещения точек срединной поверхности оболочки, получим полную систему уравнений теории оболочек; это показывает, что при построении теории оболочек введение четырех величин S_1, S_2, H_1, H_2 является излишним и вызывает лишь осложнения, не содержащиеся в природе задачи. Нетрудно понять и причину возникновения этих затруднений: указанные четыре величины связаны тремя уравнениями (1.1), (1.4) и любые значения их, удовлетворяющие этим уравнениям, приводят к тем же самым уравнениям равновесия (поверхностным и краевым) в перемещениях, если определить S и H по формулам (2.3). Так например, формулы В. В. Новожилова [2]

$$S_1 = \frac{Eh}{2(1+\nu)}\left(\gamma - \frac{h^2}{6R_2}\omega^*\right), \qquad S_2 = \frac{Eh}{2(1+\nu)}\left(\gamma - \frac{h^2}{6R_1}\omega^*\right)$$

$$H_1 = H_2 = -\frac{Eh^3}{12(1+\nu)}\omega^* \tag{2.4}$$

приведут к тем же уравнениям равновесия в перемещениях, что и вышеприведенная система соотношений, использующая лишь две величины S и H. Но эти же уравнения можно получить, принимая, например, $S_1 = 0$ и находя три остальные величины S_2, H_1, H_2 из (1.1) и (1.4). Этим еще раз подчеркивается бесполезность рассмотрения общепринятых в теории оболочек четырех величин S_1, S_2, H_1, H_2 вместо двух величин S и H.

Разыскание по известным S и H касательного напряжения τ_{12} требует задания закона распределения его по толщине оболочки. Приняв его линейным

$$\tau_{12} = \tau_{12}^{\circ} + \tau_{12}'\frac{2z}{h} \tag{2.5}$$

и замечая, что

$$S = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{12}\left(1 - \frac{z^2}{R_1R_2}\right)dz, \qquad H = \int_{-h/2}^{h/2} z\tau_{12}\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\right]dz \tag{2.6}$$

получим после вычисления

$$\tau_{12}^{\circ} = \frac{S}{h}\frac{1}{1 - h^2/12R_1R_2} \approx \frac{S}{h}, \qquad \tau_{12}' \approx \frac{6H}{h^2} - \frac{1}{4}\left(\frac{S}{R_1} + \frac{S}{R_2}\right)$$

и подстановка в (2.5) после пренебрежения слагаемыми, сохранение которых в теории тонких оболочек было бы излишним, дает известную расчетную формулу

$$\tau_{12} = \frac{S}{h} + \frac{2z}{h}\frac{6H}{h^2} \tag{2.7}$$

Поступила 19 VI 1950

Ленинградский политехнический институт

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А. И. Общая теория упругих тонких оболочек. ПММ. 1940. Т. IV. Вып. 2.
2. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Л. 1947.