Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XIV, 1950

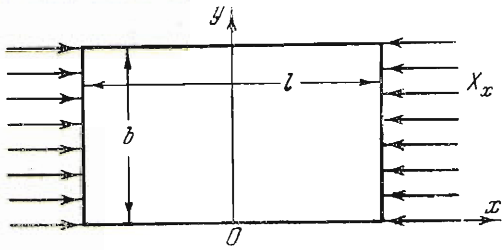
ДВА ЗАМЕЧАНИЯ К ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛАСТИНОК ЗА ПРЕДЕЛОМ УПРУГОСТИ С УЧЕТОМ СЖИМАЕМОСТИ МАТЕРИАЛА

Ю. Р. Лепик

(Тарту)

I. О цилиндрической форме потери устойчивости прямоугольной упруго-пластической пластинки при плоской деформации. Этот вопрос рассматривался А. А. Ильюшиным [1] для несжимаемого материала ($\nu = 0.5$). В своей работе [2] Л. А. Толоконников развил результаты А. А. Ильюшина для реальных материалов $0 < \nu < 0.5$; при этом он рассматривал особый случай, когда перед потерей устойчивости пластические деформации малы сравнительно с упругими. Можно показать, что последнее предположение является излишним.

1. Пусть прямоугольная пластинка (фиг. 1) длиной l и шириной b равномерно сжимается в направлении оси x. Тогда



Фиг. 1

$$X_x = -p, \qquad X_y = 0$$

Основные уравнения теории малых упруго-пластических деформаций можно для случая плоского напряженного состояния представить в виде

$$X_x = \frac{2G'}{1+4g'}\left[2(1+g')\,e_{xx} + (1-2g')\,e_{yy}\right]$$

$$Y_y = \frac{2G'}{1+4g'}\left[(1-2g')\,e_{xx} + 2(1+g')\,e_{yy}\right] \qquad (1.1)$$

$$X_y = G'\,e_{xy} \qquad \left(G' = \frac{1}{3}\frac{\sigma_i}{e_i}, \quad g' = \frac{G'}{3K}\right)$$

Здесь σ_i и e_i — интенсивности напряжений и деформаций, K — модуль объемного сжатия. Согласно условию плоской деформации $e_{yy} = 0$; в этом случае из (1.1) находим

$$Y_y = \frac{1-2g'}{2(1+g')}X_x = -\frac{1-2g'}{2(1+g')}p \qquad (1.2)$$

Зная выражения для X_x и Y_y, можно вычислить интенсивность напряжения:

$$\sigma_i = \frac{p\sqrt{3}}{2(1+g')}\sqrt{1+2g'+4g'^2} \qquad (1.3)$$

Из уравнения равновесия $\partial\delta T_1 / \partial x + \partial\delta S / \partial y = 0$ следует, что при цилиндрической форме потери устойчивости $\delta T_1 = \mathrm{const}$.

На краях пластинки, когда $x = \pm l/2$, имеем $\delta T_1 = 0$. Следовательно, и внутри пластинки $\delta T_1 = 0$.

Следуя А. А. Ильюшину [1], из уравнения (1.1) путем варьирования компонент напряжении получаем

$$\frac{1}{h}\,\delta T_1 = [\alpha + (\alpha' - \alpha)\zeta]\,\varepsilon_1 - (\alpha' - \alpha)\,\zeta\,(1-\zeta)\,\varkappa_1{}^* + \frac{3\,(G' - G'')\,F_1{}^{*2}}{(1+4g')\,F^*}\,\zeta^2\,\varkappa_1{}^* \tag{1.4}$$

Здесь h — толщина пластинки, ζ — относительная толщина пластического слоя, ε_1 и $\varkappa_1$ — дополнительные удлинение и искривление серединной плоскости пластинки, остальные величины определяются формулами

$$\alpha' = \frac{4G'\,(1+g')}{1+4g'}, \qquad \alpha = \frac{4G\,(1+g)}{1+4g}, \qquad G'' = \frac{1}{3}\,\frac{d\sigma_i}{de_i}, \qquad g = \frac{G}{3K}, \qquad g'' = \frac{G''}{3K}$$

$$F_1{}^* = (1+2g')\,X_x{}^* - 2g'Y_y{}^*, \qquad F^* = 1 + 4g' - (g' - g'')\,(X_x{}^* + Y_y{}^*)^2$$

$$\varkappa_1{}^* = \frac{h}{2}\,\varkappa_1, \qquad X_x{}^* = \frac{X_x}{\sigma_i}, \qquad Y_y{}^* = \frac{Y_y}{\sigma_i}$$

Кроме того, для определения ζ получим уравнение

$$\varepsilon_1 = (1 - 2\zeta)\,\varkappa_1{}^* \tag{1.5}$$

Исключая ε_1 из (1.4) и (1.5), при этом принимая во внимание граничное условие $\delta T_1 = 0$, после несложных вычислений найдем

$$1 - 2\zeta + \Lambda\zeta^2 = 0 \quad \text{или} \quad \zeta = \frac{1 - \sqrt{1-\Lambda}}{\Lambda} \tag{1.6}$$

где

$$\Lambda = 1 - \frac{1+4g}{g\,(1+g)\,(1+4g')}\,\frac{(12+16g'')\,g'^4 + (3+16g'')\,g'^3 + 15g''g'^2 + 7g''g' + g''}{16g'^3 + 12g'^2 + 3g' + 3g'' + 1} \tag{1.7}$$

Таким образом, относительная толщина пластического слоя ζ для всей пластинки постоянна.

Необходимо еще удовлетворить уравнению типа Брайана, которое для нашего случая имеет вид:

$$\frac{d^2\delta M_1}{dx^2} - hp\varkappa_1 = 0 \tag{1.8}$$

Варьируя в (1.1) компоненты напряжения, можно получить для δM_1 следующее выражение:

$$\frac{6}{h^2}\,\delta M_1 = 3\,(\alpha' - \alpha)\,\zeta\,(1-\zeta)\,\varepsilon_1 - [\alpha + (\alpha' - \alpha)\,\zeta\,(3 - 6\zeta + 4\zeta^2)]\,\varkappa_1{}^* +$$

$$+ \frac{3\,(G' - G'')\,F_1{}^{*2}}{(1+4g')\,F^*}\,\zeta^2\,(3 - 2\zeta)\,\varkappa_1{}^* \tag{1.9}$$

Принимая в расчет, что $\varkappa_1 = d^2w\,/\,dx^2$, где w — прогиб пластинки, и используя (1.4), (1.5) и (1.9), из уравнения (1.8) после упрощений получим

$$\frac{d^4w}{dx^4} + \frac{hp}{4D\,(1-\zeta)^2}\,\frac{d^2w}{dx^2} = 0 \qquad \left(D = \frac{Gh^3}{6\,(1-\nu)}\right) \tag{1.10}$$

Общий интеграл этого уравнения имеет вид:

$$w = c_1 + c_2x + c_3\cos\gamma x + c_4\sin\gamma x \qquad \left(\gamma = \frac{1}{2\,(1-\zeta)}\sqrt{\frac{hp}{D}}\right) \tag{1.11}$$

Рассматривая для конкретности только случай, когда края $x = \pm\, l\,/\,2$ свободно оперты, можем считать $\gamma = \pi\,/\,l$.

Учитывая это, введем в выражение (1.11) для γ гибкость пластинки

$$i = l\,\sqrt{\frac{2G\,(1+\nu)\,h}{D}}$$

Окончательно получим

$$i = 2\pi (1 - \zeta) \sqrt{\frac{2G(1+\nu)}{p}} \tag{1.12}$$

Полученные результаты упрощаются для несжимаемого материала ($K \to \infty$, $g \to 0$, $g' \to 0$, $g'' \to 0$). Обозначим

$$\frac{g''}{g} = \frac{G''}{G} = 1 - \lambda$$

Из уравнений (1.7) и (1.6) найдем, что

$$\Lambda = \lambda, \qquad \zeta = \frac{1 - \sqrt{1-\lambda}}{\lambda}$$

При этом формулы (1.10) и (1.12) совпадут с результатами А. А. Ильюшина [1] (стр. 298—299).

2. Для численного примера можно принять (некоторые сорта стали)

$$G = 0.8 \times 10^6 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}, \qquad \sigma_s = 4000 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}, \qquad \nu = 0.3, \qquad \lambda = 1 - \frac{g''}{g} = 0.95$$

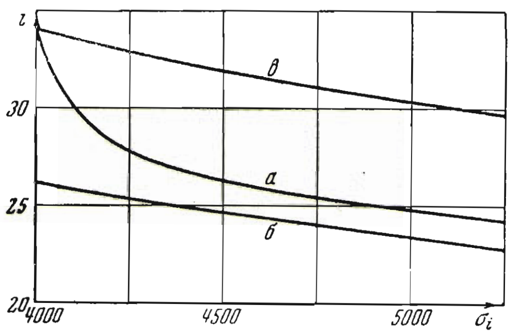
В таком случае

$$g = \frac{G}{3K} = \frac{1-2\nu}{2(1+\nu)} = 0.1538, \qquad g'' = g(1-\lambda) = 0.00769$$

и g' определяется по формуле

$$g' = \frac{g''\sigma_i}{\sigma_i - \lambda\sigma_s} = \frac{0.00769\sigma_i}{\sigma_i - 3800}$$

Для вычисления величин ζ и i используем формулы (1.7), (1.6) и (1.12). Зависимость $i = i(\sigma_i)$ изображена на фиг. 2. Кривая *а* представляет точное решение, кривая *б* решение для несжимаемого материала, кривая *в* — решение для мало



Фиг. 2

развитых пластических деформаций (при этом $g' = g$). Из сравнения кривых *а* и *б* следует, что, считая материал несжимаемым, делаем ошибку, которая постепенно уменьшается с возрастанием σ_i; например, при $\sigma_i = 4000$ эта ошибка около 23%, а при $\sigma_i = 5400$ только 5.4%. Из фиг. 2 следует еще, что использование решения *в* оправдывается только для σ_i, превосходящего предел текучести σ_s не более, чем на 3%. Уже при $\sigma_i = 4125$ решение *б* является более точным, чем *в*.

Принципиальное различие между решениями *а* и *б* проявляется при материале, который имеет площадку текучести. Тогда $\lambda = 1$ и, считая материал несжимаемым, получим $\zeta = 1$, $i = 0$. Такая полная потеря несущей способности пластинки при точном решении не имеет места. Например, считая, как прежде, $G = 0.8 \times 10^6$, $= 0.3$; $\sigma_s = 4000$, получим в начальный момент текучести $i = 26.8$.

II. О приближенном решении задачи устойчивости упруго-пластических пластинок. Приближенным решением задачи устойчивости упруго-пластических пластинок А. А. Ильюшин называет такое, при котором вариации сил δT_1, δT_2, δS тождественно равны нулю [1] (стр. 296). Если напряженное состояние пластинки перед потерей устойчивости является однородным, то для несжимаемых материалов из этого приближенного решения, как показано А. А. Ильюшиным, следует, что величина относительной толщины пластического слоя ζ постоянна.

Можно показать, что для реальных материалов (т. е. при $0 < \nu < 0.5$) такое постоянство величины ζ в общем случае не имеет места.

3. Будем исходить из основных уравнений (1.1). Следуя А. А. Ильюшину [1] (стр. 282—291), из (1.1) путем варьирования компонент напряжений получаем

$$\frac{1}{h}\,\delta T_1 = [\alpha + (\alpha' - \alpha)\,\zeta]\,\varepsilon_1 + [\beta + (\beta' - \beta)\,\zeta]\,\varepsilon_2 - \tag{3.1}$$
$$- [(\alpha' - \alpha)\,\varkappa_1^* + (\beta' - \beta)\,\varkappa_2^*]\,\zeta\,(1 - \zeta) + \frac{3\,(G' - G'')}{1 + 4g'}\,F_1^*\,\zeta^2\,\varkappa^*$$

$$\frac{1}{h}\,\delta T_2 = [\beta + (\beta' - \beta)\,\zeta]\,\varepsilon_1 + [\alpha + (\alpha' - \alpha)\,\zeta]\,\varepsilon_2 -$$
$$- [(\beta' - \beta)\,\varkappa_1^* + (\alpha' - \alpha)\varkappa_2^*]\,\zeta\,(1 - \zeta) + \frac{3\,(G' - G'')}{1 + 4g'}\,F_2^*\,\zeta^2\,\varkappa^*$$

$$\frac{1}{h}\,\delta S = 2\,[G + (G' - G)\,\zeta]\,\varepsilon_3 - 2\,(G' - G)\,\zeta\,(1 - \zeta)\,\varkappa_3^* + 3\,(G' - G'')\,X_y^*\,\zeta^2\varkappa^*$$

Здесь h — толщина пластинки, ε_1, ε_2, ε_3 и $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ — дополнительные удлинения и искривления серединной плоскости. Остальные обозначения таковы:

$$G'' = \frac{1}{3}\,\frac{d\sigma_i}{de_i}, \quad g = \frac{G}{3K}, \quad g'' = \frac{G''}{3K}, \quad \omega = 1 - \frac{g'}{g}, \quad \lambda = 1 - \frac{g''}{g} \tag{3.2}$$

$$\alpha' = \frac{4G'\,(1 + g')}{1 + 4g'}, \quad \alpha = \frac{4G\,(1 + g)}{1 + 4g}, \quad \beta' = \frac{2G'\,(1 - 2g')}{1 + 4g'}, \quad \beta = \frac{2G\,(1 - 2g)}{1 + 4g}$$

$$F_1^* = (1 + 2g')\,X_x^* - 2g'\,Y_y^*, \qquad F_2^* = -2g'\,X_x^* + (1 + 2g')\,Y_y^*$$

$$F_3^* = (1 + 4g')\,X_y^*, \qquad F^* = 1 + 4g' - 9\,(g' - g'')\,\sigma^{*2}$$

$$X_x^* = \frac{X_x}{\sigma_i}, \quad Y_y^* = \frac{Y_y}{\sigma_i}, \quad X_y^* = \frac{X_y}{\sigma_i}, \quad \sigma^* = \frac{1}{3}\,(X_x^* + Y_y^*)$$

$$\varkappa_1^* = \frac{h}{2}\,\varkappa_1, \quad \varkappa_2^* = \frac{h}{2}\,\varkappa_2, \quad \varkappa_3^* = \frac{h}{2}\,\varkappa_3, \quad \varkappa^* = \frac{1}{F^*}(F_1^*\varkappa_1^* + F_2^*\varkappa_2^* + 2F_3^*\varkappa_3^*)$$

Кроме того, для определения ζ получим уравнение

$$F_1^*\,\varepsilon_1 + F_2^*\,\varepsilon_2 + 2F_3^*\,\varepsilon_3 = (1 - 2\zeta)\,F^*\,\varkappa^* \tag{3.3}$$

Заменяя в уравнении (3.3) величины ε_1, ε_2, ε_3 из уравнения (3.1), считая при этом $\delta T_1 = \delta T_2 = \delta S = 0$, после упрощений получим

$$\{-(\alpha^2 - \beta^2) + [-\alpha\alpha' + \beta\beta' + 3\,(\alpha^2 - \beta^2)]\,\zeta + 3\,[\alpha\alpha' - \beta\beta' - \alpha^2 + \beta^2]\,\zeta^2 +$$
$$+ [(\alpha' - \alpha)^2 - (\beta' - \beta)^2]\,\zeta^3\}\,F^*\,\varkappa^* + (\alpha\beta' - \alpha'\beta)\,(F_1^*\,\varkappa_2^* + F_2^*\,\varkappa_1^* -$$
$$- 2F_3^*\,\varkappa_3^*)\,\zeta\,(1 - \zeta) - \frac{3\,(G' - G'')}{1 + 4g'}\,\{[\alpha + (\alpha' - \alpha)\,\zeta](F_1^{*2} + F_2^{*2} + 2F_3^{*2}) +$$
$$+ 2\,[\beta + (\beta' - \beta)\,\zeta]\,(F_3^{*2} - F_1^*\,F_2^*)\}\,\zeta^2\,\varkappa^* = 0 \tag{3.4}$$

Так как уравнение (3.4) содержит искривления $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$, то в общем случае ζ зависит от прогиба пластинки w. Из уравнения (3.4) следует еще, что независимость ζ от w имеет место, если выражение

$$(\alpha\beta' - \alpha'\beta)(F_1^* \varkappa_2^* + F_2^* \varkappa_1^* - 2F_3^* \varkappa_3^*) \tag{3.5}$$

равно нулю или пропорционально $\varkappa^*$. В этом случае уравнение (3.4) можно на величину $\varkappa^*$ сократить, и ζ оказывается постоянной.

Согласно этому нетрудно видеть, что $\zeta = \text{const}$ в следующих четырех случаях.

а) Если $F_1^* = F_2^*$, $F_3^* = 0$ или, учитывая введенные обозначения, $X_x^* = Y_y^*$, $X_y^* = 0$ (эта задача устойчивости равномерно сжатых пластинок).

б) Если $\varkappa_2^* = \varkappa_3^* = 0$ (цилиндрическая форма потери устойчивости).

в) Если $\alpha' = \alpha$, $\beta' = \beta$; это имеет место при $g' = g$ (случай, когда пластические деформации малы сравнительно с упругими).

г) Если $g' = g = 0$ или $\nu = 0.5$ (случай несжимаемого материала).

4. Пользуясь (3.4), дадим формулы для ζ во всех четырех случаях.

а) При равномерно сжатых пластинках, когда $X_x^* = Y_y^* = -1$, $X_y^* = 0$, после упрощений и деления уравнения (3.4) на член $g - (g - g')\zeta$ получим

$$\frac{\lambda}{1 + 4g''}\zeta^2 - 2\zeta + 1 = 0 \tag{4.1}$$

Из этого квадратного уравнения находим

$$\zeta = \frac{1 - \sqrt{1 - \Lambda}}{\Lambda} \qquad \left(\Lambda = \frac{\lambda}{1 + 4g''}\right) \tag{4.2}$$

б) При цилиндрической форме потери устойчивости прямоугольной, сжатой в одном направлении пластинки, когда $X_x^* = -1$, $Y_y^* = X_y^* = 0$ и $\varkappa_2 = \varkappa_3 = 0$, нахождение ζ сводится к решению кубического уравнения

$$P_0 + P_1\zeta + P_2\zeta^2 + P_3\zeta^3 = 0 \tag{4.3}$$

где

$$P_0 = 1, \qquad P_1 = \frac{-3g - 4gg' + g'}{g(1 + 2g')} \tag{4.4}$$

$$P_2 = \omega\,\frac{3 + 12g' + 8g'^2}{(1 + 4g')(1 + 2g')} + (\lambda - \omega)\,\frac{1 + g + 6g' + 12g'^2}{(1 + 4g')(1 + 3g' + g'')}, \quad P_3 = -\frac{\lambda\omega}{1 + 3g' + g''}$$

в) При мало развитых пластических деформациях $g' = g$ и уравнение (3.4) принимает вид:

$$\lambda\,\frac{1 + 4g - 9g\sigma^{*2}}{1 + g(4 - 9\lambda\sigma^{*2})}\zeta^2 - 2\zeta + 1 = 0 \tag{4.5}$$

Отсюда

$$\zeta = \frac{1 - \sqrt{1 - \Lambda}}{\Lambda} \qquad \left(\Lambda = \lambda\,\frac{1 + 4g - 9g\sigma^{*2}}{1 + g(4 - 9\lambda\sigma^{*2})}\right) \tag{4.6}$$

г) Для несжимаемого материала из уравнения (3.4) получаем формулу, указанную А. А. Ильюшиным:

$$\zeta = \frac{1 - \sqrt{1 - \lambda}}{\lambda} \tag{4.7}$$

Так как функция $\zeta = \zeta(\lambda)$, определенная формулой (4.7), монотонно возрастающая и $\Lambda \leqslant \lambda$, что следует из (4.6), приходим к выводу, что формула (4.7) дает бо́льшие значения для ζ, чем формула (4.6). Таким образом, пренебрежение сжимаемостью материала приводит к завышению относительной толщины пластического слоя, как уже отметил Л. А. Толоконников [2].

Поступила 13 V 1950

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильюшин А. А. Пластичность. М.— Л. 1948.
2. Толоконников Л. А. О влиянии сжимаемости материала на устойчивость пластин и оболочек за пределом упругости. Вестник Московского государственного университета. М. 1949.