

## О ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ФОРМЕ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛАСТИНОК ЗА ПРЕДЕЛОМ УПРУГОСТИ

С. М. Попов

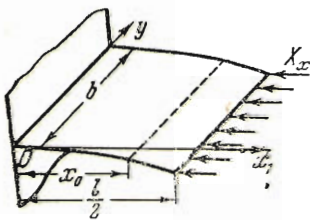
(Москва)

В работе рассматривается в точной постановке задача о цилиндрической форме потери устойчивости прямоугольной пластинки, достаточно длинной в одном направлении и равномерно сжатой в другом направлении.

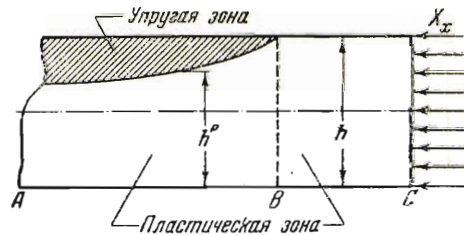
В работе А. А. Ильюшина<sup>[1]</sup> эта задача приведена к решению одного трансцендентного уравнения и к двум квадратурам. Из его решения практически определить гибкость (или критическую силу), границу областей и зону разгрузки весьма трудно, так как верхние пределы интегралов являются функцией отношения толщины пластического слоя к толщине пластинки в центре, которая должна быть определена из трансцендентного уравнения, зависящего от одной из указанных квадратур. А. А. Ильюшин дает верхнюю и нижнюю оценки для отношения толщины пластического слоя к толщине пластинки в центре и делает заключение, что критическая сила будет мало отличаться от значения, которое дает задача в приближенной постановке.

В настоящей работе показано, что указанные оценки не позволяют сделать этого заключения. Однако решение задачи в приближенной постановке действительно дает малую погрешность для значения критической силы (не более 6%). Определены границы между областями чисто пластических деформаций и найдена относительная толщина пластического слоя по середине длины пластинки.

**1. Постановка задачи. Основные соотношения.** На фиг. 1 представлена половина нагруженной пластинки и расположение осей координат.



Фиг. 1



Фиг. 2

Для дальнейшего нам необходимо будет иметь ряд формул и соотношений, которые приведем без вывода из цитированных выше работ А. А. Ильюшина. Условимся в определении областей: будем называть участок  $AB$  областью упруго-пластических деформаций (фиг. 2), а участок  $BC$  — областью чисто пластических деформаций. В задачах об устойчивости за пределом упругости имеем следующие соотношения.

*Для чисто пластической области.* В случае малых деформаций ( $\omega$  мала по сравнению с единицей) вариации усилий и моментов связа-

ны с деформациями и искривлениями срединной поверхности пластинки, формулами

$$\begin{aligned} \frac{1}{Eh} \left( \delta T_1 - \frac{1}{2} \delta T_2 \right) &= \varepsilon_1 - \lambda S_x^* \varepsilon, & \frac{4}{3D} \left( \delta M_1 - \frac{1}{2} \delta M_2 \right) &= -x_1 + \lambda S_x^* x \\ \frac{1}{Eh} \left( \delta T_2 - \frac{1}{2} \delta T_1 \right) &= \varepsilon_2 - \lambda S_y^* \varepsilon, & \frac{4}{3D} \left( \delta M_2 - \frac{1}{2} \delta M_1 \right) &= -x_2 + \lambda S_y^* x \\ \frac{1}{Eh} \delta S &= \frac{2}{3} \varepsilon_3 - 2X_y^* \varepsilon, & \frac{4}{3D} \delta H &= -\frac{2}{3} x_3 + \lambda X_y^* x \end{aligned} \quad (1.1)$$

где

$$\begin{aligned} X_x^* &= \frac{X_x}{\sigma_i}, & S_x^* &= X_x^* - \frac{1}{2} Y_y^*, & \varepsilon &= X_x^* \varepsilon_1 + Y_y^* \varepsilon_2 + 2X_y^* \varepsilon_3 \\ X_y^* &= \frac{X_y}{\sigma_i}, & S_y^* &= Y_y^* - \frac{1}{2} X_x^*, & x &= X_x^* x_1 + Y_y^* x_2 + 2X_y^* x_3 \\ Y_y^* &= \frac{Y_y}{\sigma_i}, & x^* &= \frac{h}{2} x, & \lambda &= 1 - \frac{1}{E} \frac{d\sigma_i}{d\varepsilon_i}, & \omega &= 1 - \frac{1}{E} \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Основное уравнение устойчивости имеет вид:

$$\Delta^4 w - \frac{h\sigma_i}{D} = \frac{3}{4} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} X_x^* + \frac{\partial^2}{\partial y^2} Y_y^* + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} X_y^* \right) \lambda x \quad (1.3)$$

где  $w$  — прогиб пластинки,  $D$  — цилиндрическая жесткость,  $h$  — толщина пластинки,

$$x = X_x^* \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + Y_y^* \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2X_y^* \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (1.4)$$

Условие совместности деформации

$$\begin{aligned} \Delta^4 F &= -\frac{\lambda}{1-\lambda} \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} S_x^* + \frac{\partial^2}{\partial y^2} S_y^* - 3 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} X_y^* \right) \times \\ &\times \left( S_x^* \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + S_y^* \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - 3Y_y^* \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right) \end{aligned} \quad (1.5)$$

где

$$\frac{1}{Eh} \delta T_1 = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \frac{1}{Eh} \delta T_2 = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \frac{1}{Eh} \delta S = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad (1.6)$$

Для упруго-пластической области. Формулы для вариаций усилий и моментов будут

$$\begin{aligned} \frac{1}{Eh} \left( \delta T_1 - \frac{1}{2} \delta T_2 \right) &= \varepsilon_1 + \frac{\lambda h}{2} S_x^* x \zeta^2 \\ \frac{1}{Eh} \left( \delta T_2 - \frac{1}{2} \delta T_1 \right) &= \varepsilon_2 + \frac{\lambda h}{2} S_y^* x \zeta^2 \\ \frac{1}{Eh} \delta S &= \frac{2}{3} \varepsilon_3 + \frac{\lambda h}{2} X_y^* x \zeta^2 \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{4}{3D} \left( \delta M_1 - \frac{1}{2} \delta M_2 \right) &= -x_1 + \lambda S_x^* \zeta^2 (3 - 2\zeta) x \\ \frac{4}{3D} \left( \delta M_2 - \frac{1}{2} \delta M_1 \right) &= -x_2 + \lambda S_y^* \zeta^2 (3 - 2\zeta) x \\ \frac{4}{3D} \delta H &= -\frac{2}{3} x_3 + \lambda X_y^* \zeta^2 (3 - 2\zeta) x \end{aligned} \quad (1.8)$$

В формулах (1.7) и (1.8) относительная толщина пластического слоя  $\zeta = h^p / h$  удовлетворяет соотношению

$$1 - 2\zeta = \varepsilon / \alpha^* \quad (1.9)$$

Уравнение устойчивости

$$\nabla^4 w - \frac{h\sigma_i}{D} x = \frac{3}{4} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} X_x^* + \frac{\partial^2}{\partial y^2} Y_y^* + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} X_y^* \right) \lambda \zeta^2 (3 - 2\zeta) x \quad (1.10)$$

Условие совместности деформаций

$$\nabla^4 F = \frac{h}{2} \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} S_x^* + \frac{\partial^2}{\partial x^2} S_y^* - 3 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} X_y^* \right) \lambda \zeta^2 x \quad (1.11)$$

и соотношение, связывающее относительную толщину пластического слоя  $\zeta$  с функциями прогибов  $w$  и напряжений  $F$ :

$$1 - 2\zeta + \lambda \zeta^2 = \frac{1}{x^*} \left( S_x^* \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + S_y^* \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - 3 X_y^* \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right) \quad (1.12)$$

Условия совместности (1.5) и (1.11), выраженные через функцию напряжений  $F$ , в обеих областях эквивалентны уравнениям

$$\frac{\partial \delta T_1}{\partial x} + \frac{\partial \delta S}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \delta T_2}{\partial y} + \frac{\partial \delta S}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_3}{\partial x \partial y} = 0 \quad (1.13)$$

**2. Постановка задачи и граничные условия.** Рассмотрим цилиндрическую форму потери устойчивости прямоугольной пластинки длиной  $l$ , сжатой силами —  $X_x$  (фиг. 1). Здесь согласно (1.2) имеем

$$X_x^* = -1, \quad Y_y^* = X_y^* = 0, \quad S_x^* = -1, \quad S_y^* = \frac{1}{2} \quad (2.1)$$

Уравнения (1.3), (1.5) для пластической области удовлетворяют при  $x = \pm \frac{1}{2}$  обычным условиям упругой задачи и условию  $\delta T_1 = 0$ .

Уравнения (1.10), (1.11) упруго-пластической области должны удовлетворять условиям непрерывности на границе прогибов, углов наклона касательных плоскостей, изгибающих моментов, перерезывающих сил и вариаций усилий (или деформаций). Условием наличия границы между областями является равенство  $\zeta = 1$  при  $x = x_0$ .

Вследствие симметрии будем рассматривать в дальнейшем правую половину пластинки. При этом на концах пластинки  $x = \frac{1}{2}l$  и на границе  $x = x_0$  должны выполняться указанные выше граничные условия.

По условию задачи сечение  $y = \text{const}$  остается плоским после потери устойчивости и, следовательно,  $\varepsilon_2 = \text{const}$ ,  $\varepsilon_3 = 0$ .

Из формул (1.1) и (1.7) следует, что  $\delta S \equiv 0$ . Вариация усилия  $\delta T_1$  равна нулю на краях. Из первого уравнения (1.13) следует, что  $\delta T_1 = 0$  всюду. Из второго уравнения (1.13) имеем  $\delta T_2 = f(x)$ , но так как вдоль оси  $y$  сил не приложено, то должно быть

$$\int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} \delta T_2 dx = 0 \quad (2.2)$$

3. Уравнение задачи в безразмерных величинах. Введем обозначения

$$v = \frac{w}{h}, \quad \eta = \frac{2x}{l}, \quad F = h^2 \varphi \quad (3.1)$$

В дальнейшем все величины, относящиеся к области чисто пластических деформаций, будем обозначать соответствующей буквой с индексом  $p$  сверху. В упруго-пластической области эти величины обозначаем теми же буквами с индексом  $e$ . Величины без индексов будут иметь место в обеих областях.

В области чисто пластических деформаций, учитывая соотношения (2.1), и (1.2) из формул (1.4) так как  $\varepsilon_2 = \text{const}$ ,  $\varepsilon_3 = 0$ , имеем

$$-\frac{1}{2} \frac{\delta T_2^p}{Eh} = (1 - \lambda) \varepsilon_1^p, \quad \frac{\delta T_2^p}{Eh} = \varepsilon_2 + \frac{\lambda}{2} \varepsilon_1^p \quad (3.2)$$

В обозначениях (3.1), учитывая (1.7), получим

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi^p}{\partial \eta^2} = (1 - \lambda) \varepsilon_1^{*p}, \quad \frac{\partial^2 \varphi^p}{\partial \eta^2} = \varepsilon_2^* + \frac{\lambda}{2} \varepsilon_1^{*p} \quad (3.3)$$

где

$$\varepsilon_2^* = \frac{l^2}{4h^2} \varepsilon_2 = \text{const}, \quad \varepsilon_1^{*p} = \varepsilon_1^p \frac{l^2}{4h^2} \quad (3.4)$$

Разрешая уравнения (3.3) относительно  $\varepsilon_1^{*p}$  и  $\varepsilon_2^*$ , будем иметь

$$\varepsilon_1^{*p} = -\frac{1}{2(1-\lambda)} \frac{\partial^2 \varphi^p}{\partial \eta^2}, \quad \varepsilon_2^* = \frac{4-3\lambda}{4(1-\lambda)} \frac{\partial^2 \varphi^p}{\partial \eta^2} \quad (3.5)$$

Из второго уравнения (3.5) следует, во-первых, что вариация усилия  $\delta T_2$  в чисто пластической области величина постоянная, во-вторых, что отношение  $\delta T_2$  к  $\varepsilon_2^*$  положительно (так как  $\lambda \leq 1$ ). Таким образом,

$$\frac{\partial^2 \varphi^p}{\partial \eta^2} = \frac{4(1-\lambda)}{4-3\lambda} \varepsilon_2^* = \text{const}, \quad \frac{1}{\varepsilon_2^*} \frac{\partial^2 \varphi^p}{\partial \eta^2} > 0 \quad (3.6)$$

Согласно (3.6) уравнение совместности (1.5) удовлетворяется тождественно. Уравнение устойчивости (1.3) при условии (2.1), и (3.4) принимает вид:

$$\frac{d^4 v^p}{d\eta^4} + \beta^2 \frac{d^2 v^p}{d\eta^2} = 0, \quad \beta^2 = \frac{l^2}{4-3\lambda} \frac{h\sigma_2}{D} \quad (3.7)$$

В области упруго-пластических деформаций, согласно (2.1), (3.1) и (1.2) формулы (1.7) принимают вид:

$$-\frac{1}{2} \frac{d^2 \varphi^e}{d\eta^2} = \varepsilon_1^* + \frac{\lambda}{2} \zeta^2 \frac{d^2 v^e}{d\eta^2}, \quad \frac{d^2 \varphi^e}{d\eta^2} = \varepsilon_2^* - \frac{\lambda}{4} \zeta^2 \frac{d^2 v^e}{d\eta^2} \quad (3.8)$$

Здесь  $\varepsilon^*$  согласно (3.5) и

$$\varepsilon_1^{*e} = \frac{l^2}{4h^2} \varepsilon_1^{*e}$$

Нетрудно видеть, что второе соотношение (3.8) есть интеграл уравнения совместности (1.11).

Из формул (1.9) и (1.12) получим соответственно

$$(1 - 2\zeta) \frac{d^2 v^e}{d^2 \eta} = 2\varepsilon_1^* e, \quad - (1 - 2\zeta + \lambda \zeta^2) \frac{d^2 v^e}{d\eta^2} = \frac{d^2 \varphi^e}{d\eta^2} \quad (3.9)$$

Исключая из вторых уравнений (3.8) и (3.9) величину  $d^2 \varphi^e / d\eta^2$  и принимая во внимание (3.4), получим

$$[4(1 - 2\zeta) + 3\lambda \zeta^2] \frac{d^2 v^e}{d^2 \eta} = -4\varepsilon_2^* \equiv C_3 \quad (3.10)$$

Исключая из вторых уравнений (3.8) и (3.9) величину  $d^2 v^e / d\eta^2$  и разрешая относительно  $d^2 \varphi^e / d\eta^2$ , будем иметь

$$\frac{d^2 \varphi^e}{d\eta^2} - \varepsilon_2^* \left( 1 + \frac{\lambda \zeta^2}{4 - 8\zeta + 3\lambda \zeta^2} \right) \quad (3.11)$$

Из полученного соотношения (3.11) можно заключить следующее.

а) Для того чтобы ни в одной точке пластинки  $\delta T_2$  не обращалось в  $\infty$ , необходимо, чтобы  $\zeta$  удовлетворяла условию

$$\zeta > \frac{4}{3\lambda} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{3\lambda}{4}} \right) \quad (3.12)$$

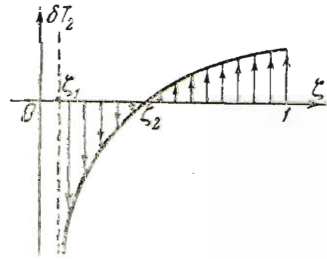
Если  $\zeta$  будет меньше правой части (3.12), то области чисто пластической быть не может.

б) При  $\zeta = (1 - \sqrt{1 - \lambda}) / \lambda$  отношение  $\delta T_2^e$  к  $\varepsilon_2^*$  равно нулю. На границе областей

$$\frac{\delta T_2^e}{\varepsilon_2^*} = \frac{\delta T_2^p}{\varepsilon_2^*} > 0$$

согласно (3.6); следовательно, на некотором участке  $\zeta_0 \leq \zeta \leq 1$  величина отношения должна принимать отрицательные значения, так как в противном случае невозможно будет удовлетворять условию (2.2). Итак,  $\zeta_0$  должна удовлетворять неравенству

$$\zeta_1 = \frac{1}{\lambda} (1 - \sqrt{1 - \lambda}) > \zeta_0 > \frac{4}{3\lambda} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{3\lambda}{4}} \right) = \zeta_2 \quad (3.13)$$



Фиг. 3

Эпюра вариаций усилий при потере устойчивости имеет вид, изображенный на фиг. 3.

Уравнение устойчивости (1.10) в безразмерных величинах, учитывая (2.1) и (1.2) и принимая во внимание, что  $v^e = v^e(\eta)$ , будет иметь вид:

$$\frac{d^2}{d\eta^2} \left\{ \left[ 4 - 3\lambda \zeta^2 (3 - 2\zeta) \right] \frac{d^2 v^e}{d\eta^2} \right\} + \alpha^2 \frac{d^2 v^e}{d\eta^2} = 0 \quad (3.14)$$

где

$$\alpha^2 = \frac{l^2 h \sigma_i}{D} \equiv (4 - 3\lambda) \beta^2 \quad (3.15)$$

**4. Интегралы уравнений устойчивости.** Решение уравнения (3.7) в чисто пластической области может быть представлено в виде

$$v^p = B_1 + B_2\eta + B_3 \cos \beta\eta + B_4 \sin \beta\eta \quad (4.1)$$

Подчиняя решение (4.1) граничным условиям, например,

$$v^p = \frac{d^2 v^p}{d\eta^2} = 0 \quad \text{при} \quad \eta = 1 \quad (4.2)$$

получим два уравнения для определения постоянных величин:

$$B_1 + B_2 + B_3 \cos \beta + B_4 \sin \beta = 0, \quad B_3 \cos \beta + B_4 \sin \beta = 0 \quad (4.3)$$

Решение уравнения устойчивости (3.14) в упруго-пластической области будем искать как функцию величины  $\zeta$  следующим образом

Проинтегрируем уравнение (3.14) один раз по  $\eta$ , получим

$$\frac{d}{d\eta} \left\{ [4 - 3\lambda\zeta^2 (3 - 2\zeta)] \frac{d^2 v^e}{d\eta^2} \right\} + \alpha^2 \frac{dv^e}{d\eta} = C_2 \quad (4.4)$$

Так как  $\zeta = \zeta(\eta)$ , то (4.4) принимает вид:

$$\left\{ \frac{d}{d\zeta} \left( [4 - 3\lambda\zeta^2 (3 - 2\zeta)] \frac{d^2 v^e}{d\eta^2} \right) + \alpha^2 \frac{dv^e}{d\zeta} \right\} \frac{d\zeta}{d\eta} = C_2 \quad (4.5)$$

Согласно условию симметрии  $d\zeta/d\eta = 0$  при  $\eta = 0$ , поэтому  $C_2 = 0$ . Интегрируя уравнение (4.4), еще раз по  $\eta$ , будем иметь

$$[4 - 3\lambda\zeta^2 (3 - 2\zeta)] \frac{d^2 v^e}{d\eta^2} + \alpha^2 v^e = C_1 \quad (4.6)$$

Подставляя в (4.6) выражения величины  $d^2 v^e / d\eta^2$  из (3.10), получим

$$\alpha^2 v^e = C_1 - C_3 \frac{4 - 3\lambda\zeta^2 (3 - 2\zeta)}{4 - 8\zeta + 3\lambda\zeta^3} \quad (4.7)$$

Введем обозначения

$$\frac{4 - 9\lambda\zeta^2 + 6\lambda\zeta^3}{4 - 8\zeta + 3\lambda\zeta^3} = f(\zeta), \quad \frac{1}{4 - 8\zeta + 3\lambda\zeta^3} = \vartheta(\zeta) \quad (4.8)$$

Интегралы (4.7) и (3.10) уравнения (3.14) принимают вид:

$$\alpha^2 v^e = C_1 - C_3 f(\zeta), \quad \frac{d^2 v^e}{d\eta^2} = C_3 \vartheta(\zeta) \quad (4.9)$$

Для определения постоянных используем условие существования границы между областями и условия непрерывности при переходе из одной области в другую прогибов, углов наклона касательных плоскостей, изгибающих моментов и перерезывающих сил. Имеем при  $\eta = \eta_0$

$$\zeta = 1, \quad v^p = v^e, \quad \frac{dv^p}{d\eta} = \frac{dv^e}{d\eta}, \quad \frac{d^2 v^p}{d\eta^2} = \frac{d^2 v^e}{d\eta^2}, \quad \frac{d^3 v^p}{d\eta^3} = \frac{d^3 v^e}{d\eta^3} \quad (4.10)$$

Отсюда, принимая во внимание (4.1) и (4.9), получаем

$$\begin{aligned} B_1 + B_2\eta_0 + B_3 \cos \beta\eta_0 + B_4 \sin \beta\eta_0 &= C_1 / \alpha^2 - C_3 a / \alpha^2 \\ B_2 - \beta B_3 \sin \beta\eta_0 + \beta B_4 \cos \beta\eta_0 &= -C_3 b k / \alpha^2 \\ -\beta^2 B_3 \cos \beta\eta_0 - \beta^2 B_4 \sin \beta\eta_0 &= C_3 n \\ \beta^3 B_3 \sin \beta\eta_0 - \beta^3 B_4 \cos \beta\eta_0 &= C_3 m k \end{aligned} \quad (4.11)$$

где обозначено

$$a = f(1), \quad b = \left( \frac{df}{d\zeta} \right)_{\zeta=1}, \quad n = \vartheta(1), \quad m = \left( \frac{d\vartheta}{d\zeta} \right)_{\zeta=1}, \quad k = \left( \frac{d\zeta}{d\eta} \right)_{\eta=\eta_0} \quad (4.12)$$

Соотношения (4.3), (4.11) будем рассматривать как однородную линейную систему уравнений для определения шести постоянных величин  $B_1, B_2, B_3, B_4, C_1, C_3$ . Эти шесть величин одновременно обращаются в нуль не могут, так как при этом пластинка остается плоской и выпучивание ее невозможно. Таким образом, чтобы система имела отличные от нуля решения, необходимо и достаточно равенство нулю детерминанта этой системы уравнений.

Раскрывая детерминант, после некоторых преобразований получим первое уравнение для определения трех неизвестных величин: параметра  $\alpha$ , характеризующего критические силы, относительной координаты границы  $\eta_0$  и относительной толщины пластического слоя в середине пластинки  $\zeta_0$ :

$$\frac{\beta n}{mk} = -\operatorname{tg}[\beta(1 - \eta_0)] \quad (4.13)$$

Прежде чем перейти к выводу двух других уравнений, докажем несколько интересных положений, вытекающих из п. 3 и 4.

а) При цилиндрической форме потери устойчивости не может образоваться область только упруго-пластических деформаций независимо от условий закрепления кромок. Действительно, если пластинка свободно оперта, то согласно (1.1) при  $\eta = 1$

$$v^e = 0, \quad \delta M_1^* = D[4 - 3\lambda\zeta^2(3 - 2\zeta)] \frac{l^2 d^2 v^e}{h^2 d\eta^2} = 0 \quad (4.14)$$

Подставляя (4.14) в уравнения (4.9), находим, что  $C_1 = C_3 = 0$ . Поэтому выпученная форма пластинки невозможна.

Если пластинка жестко заделана на концах, то

$$v^e = 0, \quad \frac{dv^e}{d\eta} = 0 \quad \text{при } \eta = 1$$

Продифференцируем первое уравнение (4.9) один раз по  $\eta$ , получим

$$\alpha^2 \frac{dv^e}{d\eta} = -C_3 \frac{df}{d\zeta} \frac{d\zeta}{d\eta} \quad (4.15)$$

Для удовлетворения граничных условий необходимо, чтобы  $C_1 = C_3 = 0$ , откуда следует, что выпученная форма пластинки невозможна.

б) Из первого уравнения (4.9) видно, что  $\zeta \neq \text{const}$ , так как в этом случае  $v^e = \text{const} \equiv 0$  и выпученная форма невозможна.

в) Величина вариации усилия  $\delta T_2$  не может тождественно равняться нулю (или  $\varepsilon_2 \neq 0$ ). Допустим обратное; тогда из (3.10) следует, что либо  $\zeta = \text{const}$ , либо  $dv^e/d\eta^2 = 0$ , но из (4.10), (4.9) ясно, что в этом случае также выпученная форма равновесия пластинки невозможна.

**5. Вывод дополнительных уравнений для определения  $\alpha$ ,  $\zeta_0$ ,  $\eta_0$ .** Дифференцируя первое уравнение (4.9) два раза по  $\eta$  и приравнявая результат правой части второго уравнения (4.9), получим

$$\omega(\zeta) \left( \frac{d\zeta}{d\eta} \right)^2 + \psi(\zeta) \frac{d^2\zeta}{d\eta^2} = -\alpha^2 \vartheta \zeta \quad (5.1)$$

где согласно (4.8)

$$\psi(\zeta) = \frac{df}{d\zeta} = \frac{18\lambda\zeta^4 - 96\lambda\zeta^3 + 144\lambda\zeta^2 - 96\lambda\zeta + 32}{(4 - 8\zeta + 3\lambda\zeta^2)^2}, \quad \omega(\zeta) = \frac{df^2}{d\zeta^2} = \frac{d\psi}{d\zeta} \quad (5.2)$$

Решение уравнения (5.1) должно удовлетворять условию

$$\zeta = \zeta_0, \quad \frac{d\zeta}{d\eta} = 0 \quad \text{при} \quad \eta = 0 \quad (5.3)$$

Нелинейное уравнение второго порядка (5.1) можно привести к линейному уравнению первого порядка подстановкой

$$p = \frac{d\zeta}{d\eta}, \quad p \frac{dp}{d\zeta} = \frac{d^2\zeta}{d\eta^2} \quad (5.4)$$

Выполняя эту подстановку, получим

$$p \frac{dp}{d\zeta} + \frac{\omega(\zeta)}{\psi(\zeta)} p^2 = -\alpha^2 \frac{\vartheta(\zeta)}{\psi(\zeta)} \quad (5.5)$$

Решение уравнения (5.5) без правой части имеет вид:

$$p^2 = A_1 \exp \left\{ -2 \int \frac{\omega}{\psi} d\zeta \right\}$$

Пользуясь равенствами (5.2), имеем

$$2 \int \frac{\omega(\zeta)}{\psi(\zeta)} d\zeta = 2 \int \frac{d^2f}{d\zeta^2} / \frac{df}{d\zeta} d\zeta = 2 \int \frac{d\omega}{\psi} \equiv \ln \psi^2$$

Общий интеграл уравнения (5.5) может быть записан в форме

$$p^2 = \frac{\alpha^2}{\psi(\zeta)^2} \left[ A_1 - 2 \int \vartheta(\zeta) \psi(\zeta) d\zeta \right] \quad (5.6)$$

где частное решение получено методом вариации произвольного постоянного. Постоянная  $A_1$  определяется из второго условия (5.3).

Интеграл, стоящий в правой части (5.6), имеет вид

$$2 \int \vartheta(\zeta) \psi(\zeta) d\zeta \equiv \Phi(\zeta) = \frac{16 - 48\zeta + 48\zeta^2 - 12\lambda\zeta^3}{(4 - 8\zeta + 3\lambda\zeta^2)^2} \quad (5.7)$$

Таким образом решение уравнения (5.5), удовлетворяющее второму из условий (5.3), окончательно принимает форму

$$p^2 = \frac{\alpha^2}{\psi(\zeta)^2} [\Phi(\zeta_0) - \Phi(\zeta)] \quad (5.8)$$

Принимая во внимание (5.4) и (5.8), последовательно имеем

$$\alpha \frac{d\eta}{d\zeta} = \frac{\psi(\zeta)}{\sqrt{\Phi(\zeta_0) - \Phi(\zeta)}}, \quad \text{или} \quad \alpha\eta = \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{\psi(\zeta)}{\sqrt{\Phi(\zeta_0) - \Phi(\zeta)}} d\zeta \quad (5.9)$$



Подинтегральная функция (5.9) в начале координат при  $\zeta = \zeta_0$  ( $\eta = 0$ ) имеет особенность. Значение интеграла (5.9) проще всего получить численным интегрированием. Преобразуем (5.9) к виду, удобному для вычислений. Из (5.7) имеем

$$2\vartheta(\zeta)\psi(\zeta) = \Phi'(\zeta) \quad (5.10)$$

Здесь и дальше штрих означает дифференцирование по  $\zeta$ .

Легко проверить, что уравнение (5.9) можно представить в виде

$$\alpha\eta = - \int_{\zeta_0}^{\zeta} 2 \frac{\psi(\zeta)}{\Phi'(\zeta)} d\sqrt{\Phi(\zeta_0) - \Phi(\zeta)} \quad (5.11)$$

Интегрируя (5.11) по частям и принимая во внимание (5.10), получим

$$\alpha\eta = - \frac{\sqrt{\Phi(\zeta_0) - \Phi(\zeta)}}{\vartheta(\zeta)} - \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{\vartheta'(\zeta)}{\vartheta^2(\zeta)} \sqrt{\Phi(\zeta_0) - \Phi(\zeta)} d\zeta \quad (5.12)$$

Здесь  $\vartheta(\zeta)$  определено согласно (4.8). Таким образом, согласно (4.8) относительная координата границы  $\eta_0$  связана с  $\alpha$  и  $\zeta_0$  уравнением

$$\alpha\eta_0 = (4 - 3\lambda) \sqrt{\Phi(\zeta_0) - \Phi(1)} - \int_{\zeta_0}^1 (8 - 6\lambda) \sqrt{\Phi(\zeta_0) - \Phi(\zeta)} d\zeta \quad (5.13)$$

Третье уравнение для  $\eta_0$ ,  $\zeta_0$  и  $\alpha$  получим из условия (2.2), которое в безразмерных величинах (3.1) может быть представлено в виде

$$\frac{1}{\varepsilon_2^*} \int_0^1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} d\eta = 0 \quad (5.14)$$

Учитывая первое соотношение (3.6) и (3.11) и принимая во внимание (4.8), условие (5.14) представим в виде

$$\frac{4(1-\lambda)}{4-3\lambda} \int_{\eta_0}^1 d\eta + \int_0^{\eta_0} d\eta + \lambda \int_0^{\eta_0} \zeta^2 \vartheta(\zeta) d\zeta = 0 \quad (5.15)$$

Заменяя  $d\eta$  его выражением через  $\zeta$  из (5.9) и изменяя соответственно пределы интегрирования, получим

$$\frac{4(1-\lambda)}{4-3\lambda} \alpha (1 - \eta_0) + \eta_0 + \lambda \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{\zeta^2 \vartheta(\zeta) d\zeta}{\sqrt{\Phi(\zeta_0) - \Phi(\zeta)}} = 0 \quad (5.16)$$

После преобразований, аналогичных выше для интеграла (5.9), соотношение (5.16) может быть представлено в удобной для вычислений форме:

$$\frac{4(1-\lambda)}{4-3\lambda} + \frac{1}{4-3\lambda} \eta_0 + \frac{\lambda}{\alpha} (-\sqrt{\Phi(\zeta_0) - \Phi(1)} + 2 \int_{\zeta_0}^1 \zeta \sqrt{\Phi(\zeta_0) - \Phi(\zeta)} d\zeta) = 0 \quad (5.17)$$

Таким образом, решение задачи о цилиндрической форме потери устойчивости прямоугольной пластинки приводится к решению трех уравнений (4.13), (5.13) и (5.17) относительно трех неизвестных  $\alpha$ ,  $\eta_0$ ,  $\zeta_0$ .

Таблица 1

$\zeta_0$	$A(\zeta_0)$	$J_1(\zeta_0)$	$J_2(\zeta_0)$	$J_3(\zeta_0)$	$\alpha$	$\eta_0$	Решение уравнения (4.13)	
							правая часть	левая часть
0.560	183.17	452.91	62.32	17.51	35.02	0.82	—	—
0.570	24.28	57.89	8.09	2.18	4.36	0.64	0.026	1.560
0.572	20.72	48.97	6.87	1.83	3.66	0.765	0.030	0.610
0.574	18.04	42.30	5.95	1.57	3.14	0.82	0.035	0.372
0.575	16.94	39.55	5.57	1.46	2.92	0.965	0.037	0.064
0.576	15.99	37.18	5.24	1.37	2.74	1.100	0.039	0.170
0.577	15.11	34.97	4.94	1.17	2.34	1.507	0.042	-0.930
0.580	13.02	26.47	3.58	1.08	2.16	2.770	0.048	0.920
0.585	10.56	23.62	3.37	0.84	1.68	1.510	0.059	-0.600

6. **Определение относительной границы областей и критических сил при потере устойчивости.** Заменяя в (5.17)  $\alpha\eta_0$  его выражением из (5.13) и разрешая относительно  $\alpha$ , получим

$$\alpha = \frac{2\lambda}{1-\lambda} \int_{\zeta_0}^1 (1-\zeta) \sqrt{\Phi(\zeta_0) - \Phi(\zeta)} d\zeta \quad (6.1)$$

В табл. 1 приведены результаты численного интегрирования интегралов

$$J_1(\zeta_0) = \int_{\zeta_0}^1 (8-3\zeta) \sqrt{\Phi(\zeta_0) - \Phi(\zeta)} d\zeta, \quad J_2(\zeta_0) = \int_{\zeta_0}^1 \zeta \sqrt{\Phi(\zeta_0) - \Phi(\zeta)} d\zeta$$

$$J_3(\zeta_0) = \int_{\zeta_0}^1 (1-\zeta) \sqrt{\Phi(\zeta_0) - \Phi(\zeta)} d\zeta, \quad \Phi(\zeta) = \frac{16-48\zeta+48\zeta^2-12\lambda\zeta^3}{(4-8\zeta+3\lambda\zeta^2)^2} \quad (6.2)$$

входящих в формулы (5.13), (5.17) и (6.1). Значение  $\lambda$  было принято равным 0.5; при этом  $\zeta_0$  согласно (3.13) меняется в пределах  $0.558 < \zeta_0 < 0.586$ ; кроме обозначений (6.2), в таблице обозначено  $A(\zeta_0) = \sqrt{\Phi(\zeta_0) - \Phi(1)}$  и  $\alpha = l \sqrt{h\delta_i/D}$ , где  $D$  — цилиндрическая жесткость. Из таблицы видно, что если  $\zeta_0$  изменяется в указанных пределах, то величина  $\alpha$ , характеризующая критическую силу или гибкость, изменяется более чем в 20 раз; решение уравнений устойчивости дает

$$\alpha \approx 2.92, \quad \eta_0 \approx 0.965, \quad \zeta_0 \approx 0.575$$

Заметим, что критические значения параметра  $\alpha$  при решении этой задачи как чисто упругой или как чисто пластической соответственно будут  $\alpha_1 = \pi$  и  $\alpha_2 = 2.48$ .

Если же решать эту задачу в приближенной постановке [1], то получим

$$\alpha_3 = 2.74, \quad \text{если } \zeta = \frac{1-\sqrt{1-\lambda}}{\lambda}; \quad \alpha_3 = 2.82, \quad \text{если } \zeta = \frac{4}{3\lambda} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{3\lambda}{4}}\right)$$

т. е. ошибка будет не больше 6%.

Поступила 24 V 1950

Институт механики  
Академии Наук СССР

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ильяшин А. А. Пластичность. ОГИЗ. 1948.