Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XIV, 1950

ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ПРИ ИЗГИБЕ И КРУЧЕНИИ ТОНКОСТЕННЫХ ОБОЛОЧЕК ЗА ПРЕДЕЛОМ УПРУГОСТИ

Р. А. Межлумян

(Москва)

В работе рассматриваются граничные условия тонкостенных стержней и цилиндрических оболочек, работающих в стадии малых упруго-пластических деформаций. В основе лежат общий вариационный принцип теории пластичности, а также соотношения, приведенные в нашей работе [1], нумера которых здесь отмечаются звездочками.

1. Вывод уравнении равновесия в перемещениях. Работа напряжений, совершаемая при переходе оболочки единичного объема из недеформированного состояния в деформировнное, равна [2]:

$$W = \int_0^{e_i} \sigma_i \, de_i + K \frac{\theta^2}{2} \tag{1.1}$$

Здесь σ_i — интенсивность напряжений, e_i — интенсивность деформаций, K — модуль объемной деформации, θ — объемная деформация.

Полная энергия деформации оболочки

$$V = \iiint_{(\tau)} \left[\int_0^{e_i} \sigma_i \, de_i + \frac{9}{2} K e^2\right] d\tau \tag{1.2}$$

здесь $\tau = dF dz$ — элемент объема оболочки, причем $dF = \delta\, ds$.

На основании соотношений (1.2*), (1.3*) и (1.2) имеем

$$V = \frac{3}{2} G \int_0^L \int_0^l e_i^2 dF\, dz + \frac{9}{2} K \int_0^L \int_0^l e^2 dF\, dz - 3G \int_0^L \int_0^l dF\, dz \int_0^{e_i} \chi(e_i)\, e_i de_i \tag{1.3}$$

где L — длина оболочки, l — длина контура поперечного сечения, e — средняя деформация, определяемая формулой (3.3*).

Интенсивность деформаций

$$e_i = B(e_i)\, e_{zz} \qquad \left(B(e_i) = \frac{2}{3}\sqrt{A^2 - A - 1}\right) \tag{1.4}$$

Объемная деформация

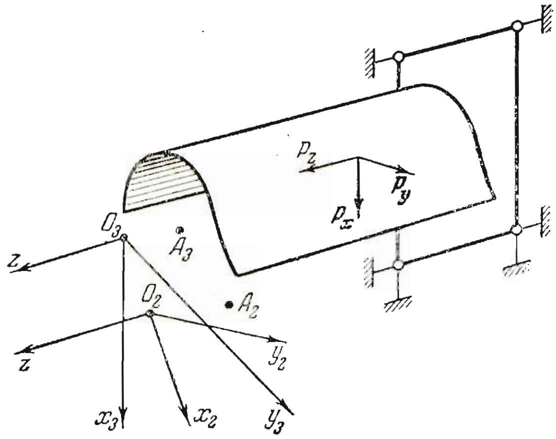
$$3e = [1 + A(e_i)]\, e_{zz} \qquad \left(A(e_i) = -\frac{(1-2\nu)[1-\chi(e_i)] - (1+\nu)}{2(1-2\nu)[1-\chi(e_i)] + 1 + \nu}\right) \tag{1.5}$$

Подставляя (1.4), (1.5) в (1.3), будем иметь

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^l \{3GB^2(e_i) + 9K[1 + A(e_i)]^2\}\, e_{zz}^2 dF dz - 3G \int_0^L \int_0^l dF\, dz \int_0^{e_i} \chi(e_i)\, e_i\, de_i \tag{1.6}$$

где $\chi(e_i)$ — функция Ильюшина

Пусть $p_x(s, z), p_y(s, z), p_z(s, z)$ — компоненты внешней поверхностной нагрузки, действующие на оболочку (фиг. 1). Тогда работа внешних сил будет



Фиг. 1

$$U=\int_0^L\int_0^l (p_x\xi+p_y\eta+p_z w)\,ds\,dz \tag{1.7}$$

Здесь ζ, η, ζ — компоненты вектора перемещения, произвольной точки, лежащей на срединной поверхности деформируемой оболочки, определяемые формулами

$$\begin{aligned}\xi &= u-\theta(y-a_y)\\ \eta &= v+\theta(x-a_x)\\ w&=\zeta-u'x-v'y-\theta'\omega\end{aligned} \tag{1.8}$$

где a_x, a_y — координаты точки A, служащей полюсом для отсчета секториальных площадей (фиг. 1), u, v — проекции перемещений полюса A на оси x, y, причем штрихи здесь и в дальнейшем означают дифференцирование по z. Подставляя (1.8) в (1.7), будем иметь

$$U=\int_0^L\left(q_xu+q_yv+m_z\theta+\int_0^l p_zw\,ds\right)dz \tag{1.9}$$

Здесь погонные поперечные обобщенные силы и погонный крутящий момент от внешней нагрузки относительно полюса A равны:

$$q_x=\int_0^l p_x ds,\quad q_y=\int_0^l p_y ds,\quad m_z=\int_0^l (x-a_x)\,p_y-(y-a_y)\,p_x]\,ds \tag{1.10}$$

Работа касательных напряжений свободного кручения будет

$$V_k=\int_0^L\left(\int_0^{\theta'} c_2\theta' d\theta'\right)dz \tag{1.11}$$

Здесь $c_2=GI_{d2}$ — приведенная жесткость свободного кручения:

$$I_{d2}=\frac{\mu}{3}\sum s\delta^3-\frac{\mu}{3}\sum_1^n\sum_{s_i}^{s_j}\chi_2(e_i)\,s\delta^3 \tag{1.12}$$

причем s_i и s_j — криволинейные координаты начала и конца пластической зоны по контуру (фиг. 1), n — число пластических зон.

Интенсивность деформаций и осевое относительное удлинение являются функциями производных от обобщенных перемещений ζ', u'', v'', θ'', поэтому функционал полной энергии при естественных граничных условиях можно записать в виде

$$\Pi=V-U+V_k=\int_0^L\Phi(\zeta,\zeta',u,u',u'',v,v',v'',\theta,\theta',\theta'')\,dz \tag{1.13}$$

где подинтегральная функция

$$\Phi = \frac{1}{2}\int_0^l [3GB^2 + 9K(1+A)^2(\zeta' - u''x - v''y - \theta''\omega)^2\, dF -$$

$$- 3G\int_0^l dF \int_0^{e_i} \chi(e_i)\, e_i\, de_i + \frac{c_2}{2}\theta'^2 - (q_x u + q_y v + q_z\zeta + m_z\theta) +$$

$$+ u'\int_0^l p_z x\, ds + v'\int_0^l p_z y\, ds + \theta'\int_0^l p_z\omega\, ds \tag{1.14}$$

Из условия экстремума функционала полной энергии системы выведем уравнения равновесия в перемещениях. Имеем

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta} - \frac{d}{dz}\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta'} = 0, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial v} - \frac{d}{dz}\frac{\partial\Phi}{\partial v'} + \frac{d^2}{dz^2}\frac{\partial\Phi}{\partial v''} = 0$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u} - \frac{d}{dz}\frac{\partial\Phi}{\partial u'} + \frac{d^2}{dz^2}\frac{\partial\Phi}{\partial u''} = 0, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} - \frac{d}{dz}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta'} + \frac{d^2}{dz^2}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta''} = 0 \tag{1.15}$$

При $z = 0$ и $z = L$ имеем граничные условия

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta'} = 0, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial u'} - \frac{d}{dz}\frac{\partial\Phi}{\partial u''} = 0, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial u''} = 0 \tag{1.16}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial v'} - \frac{d}{dz}\frac{\partial\Phi}{\partial v''} = 0, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial v''} = 0, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial\theta'} - \frac{d}{dz}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta''} = 0, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial\theta''} = 0$$

Для составления уравнений Эйлера-Лагранжа и уравнений для естественных граничных условий найдем предварительно соотношения:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta} = -q_z, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial u} = -q_x, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial v} = -q_y, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = -m_z \tag{1.17}$$

Дифференцируя (1.4) по ξ', u'', v'', θ'', будем иметь $[B = B(e_i)]$

$$\left(1 - \frac{\partial B}{\partial e_i}e_{zz}\right)\frac{\partial e_i}{\partial\xi'} = B, \qquad \left(1 - \frac{\partial B}{\partial e}e_{zz}\right)\frac{\partial e_i}{\partial u''} = -Bx(s)$$

$$\left(1 - \frac{\partial B}{\partial e_i}e_{zz}\right)\frac{\partial e_i}{\partial v''} = -By(s), \qquad \left(1 - \frac{\partial B_i}{\partial e_i}e_{zz}\right)\frac{\partial e_i}{\partial\theta''} = -B\omega(s) \tag{1.18}$$

Дифференцируя (1.14) по ζ', после преобразований будем иметь

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta'} = E^*\int_F [1 - \chi_2(e_i)](\zeta' - u''x - v''y - \theta''\omega)\, dF \tag{1.19}$$

$$\left(\chi_2(e_i) = \frac{2\nu(1+\nu) + (1-2\nu)[2 - \chi(e_i) + \nu\chi(e_i)]}{1 + \nu + 2(1-2\nu)[1 - \chi(e_i)]}\chi(e_i), \quad E^* = \frac{E}{1-\nu^2}\right)$$

Дифференцируя (1.19) по z, получим

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta'}\right) = E^*\int_F [1 - \chi_3'(e_t)](\zeta'' - u'''x - v'''y - \theta'''\omega)\, dF \tag{1.20}$$

Здесь функция $\chi_3'(e_i)$ определяется уравнением

$$\chi_3'(e_i) = \chi_2(e_i) + \frac{1}{B_1(e_i)}\frac{\partial\chi_2(e_i)}{\partial e_i}e_i, \qquad B_1(e_i) = 1 - \frac{1}{B(e_i)}\frac{\partial B(e_i)}{\partial e_i}e_i \tag{1.21}$$

Функция $B_1(e_i)$ мало отличается от единицы; при $B_1(e_i) = 1$ имеем

$$\chi_3'(e_i) = \chi_3(e_i) \qquad \left(\chi_3(e_i) = \chi_2(e_i) + \frac{\partial\chi_2(e_i)}{\partial e_i}e_i\right)$$

Дифференцируя (1.14), найдем следующие соотношения:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u'} = \int_0^l p_z x\, ds, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial v'} = \int_0^l p_z y\, ds, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial\theta'} = \int_0^l p_z \omega\, ds + c_2\theta' \tag{1.22}$$

$$\frac{d}{dz}\frac{\partial\Phi}{\partial u'} = \int_0^l \frac{\partial p_z}{\partial z} x\, ds, \qquad \frac{d}{dz}\frac{\partial\Phi}{\partial v'} = \int_0^l \frac{\partial p_z}{\partial z} y\, ds, \qquad \frac{d}{dz}\frac{d\Phi}{\partial\theta'} = \int_0^l \frac{\partial p_z}{\partial z} \omega\, ds + c_1\theta'' \tag{1.23}$$

Здесь $c_1 = GI_{d3}$ — кинетическая жесткость свободного кручения определяемая при помощи уравнения (4.3*), и

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\Phi}{\partial u''} &= -E^*\int_F [1-\chi_2(e_i)](\zeta' - u''x - v''y - \theta''\omega)\, x\, dF \\
\frac{\partial\Phi}{dv''} &= -E^*\int_F [1-\chi_2(e_i)](\zeta' - u''x - v''y - \theta''\omega)\, y\, dF \\
\frac{\partial\Phi}{\partial\theta''} &= -E^*\int_F [1-\chi_2(e_i)](\zeta' - u''x - v''y - \theta''\omega)\, \omega\, dF
\end{aligned} \tag{1.24}$$

Дифференцируя (1.24) по z и принимая во внимание (1.21), получим

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u''}\right) &= -E^*\int_F [1-\chi_3'(e_i)](\zeta'' - u'''x - v'''y - \theta'''\omega)\, x\, dF \\
\frac{d}{\partial z}\left(\frac{\partial\Phi}{dv''}\right) &= -E^*\int_F [1-\chi_3'(e_i)](\zeta'' - u'''x - v'''y - \theta'''\omega)\, y\, dF \\
\frac{d}{dz}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\theta''}\right) &= -E^*\int_F [1-\chi_3'(e_i)](\zeta'' - u'''x - v'''y - \theta'''\omega)\, \omega\, dF
\end{aligned} \tag{1.25}$$

Дифференцируя еще раз по z и пренебрегая малыми величинами высшего порядка, будем иметь

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u''}\right) &= -E^*\int_F [1-\chi_3'(e_i)](\zeta''' - u^{\mathrm{IV}}x - v^{\mathrm{IV}}y - \theta^{\mathrm{IV}}\omega)\, x\, dF \\
\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial v''}\right) &= -E^*\int_F [1-\chi_3'(e_i)](\zeta''' - u^{\mathrm{IV}}x - v^{\mathrm{IV}}y - \theta^{\mathrm{IV}}\omega)\, y\, dF \\
\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\theta''}\right) &= -E^*\int_F [1-\chi_3'(e_i)](\zeta''' - u^{\mathrm{IV}}x - v^{\mathrm{IV}}y - \theta^{\mathrm{IV}}\omega)\, \omega\, dF
\end{aligned} \tag{1.26}$$

Подставляя (1.17) — (1.26) в уравнении (1.15), получим систему уравнений в перемещениях, которая ранее выводилась из условия равновесия элементарного отсека стержня-оболочки. Для удобства дальнейших выводов представим ее в следующей форме:

$$\begin{aligned}
F_3\zeta'' - S_{y3}u''' - S_{x3}v''' - S_{\omega3}\theta''' &= f_1(z) \\
-S_{y3}\zeta''' + I_{y3}u^{\mathrm{IV}} + I_{xy3}v^{\mathrm{IV}} + S_{y\omega3}\theta^{\mathrm{IV}} &= f_2(z) \\
-S_{x3}\zeta''' + I_{xy3}u^{\mathrm{IV}} + I_{x3}v^{\mathrm{IV}} + S_{x\omega3}\theta^{\mathrm{IV}} &= f_3(z) \\
-S_{\omega3}\zeta''' + S_{y\omega3}u^{\mathrm{IV}} + S_{x\omega3}v^{\mathrm{IV}} + I_{\omega3}\theta^{\mathrm{IV}} - \varphi(z)\,\theta'' &= f_4(z)
\end{aligned} \tag{1.27}$$

Коэффициенты этой системы определяются формулами (5.3*)—(5.12*), при этом функция $\chi_3(e_i)$ заменяется функцией $\chi_3'(e_i)$ для учета малых величин высшего порядка. В главной кинетической системе отсчета, положение которой определяется формулами (5.16*) — (5.21*), уравнения (1.27) распадаются на следующие отдельные уравнения:

$$\zeta'' = f_1(z), \qquad f_1(z) = -\frac{q_z(z)}{E^*F_3(z)} \tag{1.28}$$

$$u^{\mathrm{IV}} = f_2(z), \qquad f_2(z) = \frac{q_x(z)}{E^*I_{y3}(z)} \tag{1.29}$$

$$v^{\mathrm{IV}} = f_3(z), \qquad f_3(z) = \frac{q_y(z)}{E^*I_{x3}(z)} \tag{1.30}$$

$$\theta^{\mathrm{IV}} - \varphi(z)\,\theta'' = f_4(z), \qquad f_4(z) = \frac{m_{z1}(z)}{E^*I_{\omega 3}(z)}, \qquad \varphi(z) = \frac{GI_{d3}(z)}{E^*I_{x3}(z)} \tag{1.31}$$

Здесь $m_{z1}(z)$ — момент погонной поперечной нагрузки относительно кинетического центра, $E^*F_3(z)$ — кинетическая жесткость растяжения (сжатия), $E^*I_{x3}(z)$, $E^*I_{y3}(z)$ — кинетические жесткости изгиба в двух плоскостях, $E^*I_{\omega 3}$ — кинетическая секториальная жесткость, $\varphi(z)$ — изгибно-крутильная характеристика тонкостенного стержня.

2. Связь между статическими и кинематическими граничными условиями. Полученные нами соотношения справедливы и для участков оболочки, где отсутствуют пластические деформации. При этом коэффициенты уравнений (1.27) — непрерывные функции по всей длине цилиндрической оболочки независимо от ее напряженного состояния. Поэтому для определения четырнадцати произвольных постоянных в общем интеграле системы (1.27) можем пользоваться граничными условиями непосредственно, минуя условия сопряженности на границах упругих и пластических зон. Пусть торцы тонкостенного стержня свободны от внешних сил. Подставляя (1.17) — (1.26) в (1.16), получим граничные условия при $z = 0$ и $z = L$:

$$\begin{aligned}
&E^*F_2\zeta' = 0, \qquad E^*I_{y2}u'' = 0, \qquad E^*I_{y3}u''' - \int_0^l xp_z\,ds = 0\\
&\qquad\qquad\qquad\quad E^*I_{x2}v'' = 0, \qquad E^*I_{x3}v''' - \int_0^l yp_z\,ds = 0\\
&\qquad\qquad\qquad\quad E^*I_{\omega 2}\theta''' = 0, \qquad E^*I_{\omega 3}\theta''' - \int_0^l \omega p_z\,ds - GI_{d2}\theta' = 0
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
F_2 &= F - \sum_1^n \int_{F_{ij}} \chi_2(e_i)\,dF, & I_{x2} &= I_x - \sum_1^n \int_{F_{ij}} \chi_2(e_i)\,y_2^2\,dF\\
I_{y2} &= I_y - \sum_1^n \int_{F_{ij}} \chi_2(e_i)\,x_2^2\,dF, & I_{\omega 2} &= I_\omega - \sum_1^n \int_{F_{ij}} \chi_2(e_i)\,\omega_2^2\,dF\\
F_3 &= F - \sum_1^n \int_{F_{ij}} \chi_3(e_i)\,dF, & I_{x3} &= I_x - \sum_1^n \int_{F_{ij}} \chi_3(e_i)\,y_3^2\,dF\\
I_{y3} &= I_y - \sum_1^n \int_{F_{ij}} \chi_3(e_i)\,x_3^2 dF, & I_{\omega 3} &= I_\omega - \sum_1^n \int_{F_{ij}} \chi_3(e_i)\,\omega_3^2\,dF
\end{aligned} \tag{2.2}$$

причем координаты x_2, y_2, ω_2 отнесены к главной приведенной [1] системе отсчета, а x_3, y_3, ω_3 — к главной кинетической.

Рассмотрим более общий случай, когда на торцах тонкостенного стержня приложены внешние обобщенные силы: N — осевая сила, Q_x, Q_y — поперечные силы, действующие по направлениям осей x, y, M_k — крутящий момент от контурных сдвигающих усилий относительно кинетического центра, M_x, M_y — изгибающие моменты, действющие в плоскостях yz, xz, наконец, B — изгибно-крутящий бимомент.

Составим выражение первой вариации работы внешних продольных и поперечных обобщенных сил, приложенных к торцу. Имеем

$$\delta J_L = -(Q_x \delta u + Q_y \delta v + N \delta \zeta - M_y \delta u' - M_x \delta v' + M_k \delta \theta - B \delta \theta') \quad (2.3)$$

В этом случае первая вариация полной энергии получит добавочное приращение, определяемое соотношением (2.3).

Пользуясь двумя системами отсчета — главной кинетической и главной приведенной [1] — и учитывая при составлении граничных условий (1.16) соответствующие вариации работы продольных и поперечных обобщенных сил, приложенных к торцу стержня $z = L$, получим

$$N = E^* F_2 \zeta', \qquad M_x = -E^* I_{x2} v'', \qquad Q_y = -E^* I_{x3} v''' + \int_0^l y p_z \, ds$$

$$B = -E^* I_{\omega 2} \theta'', \qquad M_y = -E^* I_{y2} u'', \qquad Q_x = -E^* I_{y3} u''' + \int_0^l x p_z \, ds$$

$$M_k = G I_{d2} \theta' - E^* I_{\omega 3} \theta''' + \int_0^l \omega p_z \, ds \quad (2.4)$$

Таким образом, введение двух подвижных систем отсчета: главной кинетической и главной приведенной, позволяет определить статические и кинематические граничные условия при совместном действии изгиба и кручения. Для упруго-пластически деформируемого тонкостенного стержня связь между статическими и кинематическими граничными условиями отлична от той, которая существует для упруго деформируемого тонкостенного стержня.

При переходе тонкостенного стержня в стадию упруго-пластических деформаций степень затухания эффекта стеснения зависит от внешнего крутящего момента, так как изгибно-крутильная характеристика упруго-пластически деформируемого тонкостенного стержня $\varphi(z)$ зависит также от напряженного состояния и будет переменной по длине стержня-оболочки.

Поступила 10 V 1950

ЛИТЕРАТУРА

1. Межлумян Р. А. Изгиб и кручение тонкостенных цилиндрических оболочек за пределом упругости. ПММ. 1950. Т. XIV. Вып. 3.
2. Ильюшин А. А. Пластичность. Гостехиздат. 1948.
3. Власов В. З. Тонкостенные упругие стержни. Госстройиздат. 1940.
4. Джанелидзе Д. Ю., Пановко Я. Г. Статика упругих тонкостенных стержней. Гостехиздат. 1948.