Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XIV, 1950

ИЗГИБ КРУГЛОЙ ПЛИТЫ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ НАГРУЗКОЙ

В. К. Прокопов

(Ленинград)

Изгиб круглой плиты равномерно распределенной нагрузкой изучался Клемовым [1]; им рассмотрены случаи отсутствия либо радиального, либо осевого перемещения на всей боковой поверхности плиты. Задача об изгибе круглой плиты силой, сосредоточенной в центра торца, при условии равенства нулю осевого перемещения на всей боковой поверхности плиты решена Надаи [2]. А. И. Лурье [3] указал метод построения решений уравнений теории упругости, не дающих напряжений на торцах плиты, произвольного очертания в плане, и применил его к задаче об изгибе круглой плиты равномерно распределенной нагрузкой.

В настоящей работе метод А. И. Лурье применяется к задаче изгиба круглой плиты произвольной радиально-симметричной нагрузкой; радиальные перемещения отсутствуют на всей боковой поверхности плиты.

§ 1. Рассмотрим круглую плиту радиуса R и толщины $2h$. Положение любой точки плиты задается цилиндрическими координатами r, z, θ с началом в центре тяжести плиты или безразмерными параметрами

$$\rho = \frac{r}{R}, \qquad \zeta = \frac{z}{R}, \qquad \theta$$

так что интервалы изменения последних будут

$$-\varepsilon \leqslant \zeta \leqslant \varepsilon, \qquad 0 \leqslant \rho \leqslant 1, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \qquad (\varepsilon = h / R)$$

Для радиально-симметричной нагрузки напряженное состояние и деформация плиты также симметричны относительно оси; напряжения и перемещения в этом случае можно выразить [4] через одну бигармоническую функцию ψ. Имеем

$$\sigma_\rho = \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\nu \triangle \psi - \frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2}\right), \qquad \sigma_\zeta = \frac{\partial}{\partial\zeta}\left[(2-\nu)\triangle\psi - \frac{\partial^2\psi}{\partial\zeta^2}\right]$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\nu \triangle \psi - \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right), \qquad \tau_{\rho\zeta} = \frac{\partial}{\partial\rho}\left[(1-\nu)\triangle\psi - \frac{\partial^2\psi}{\partial\zeta^2}\right]$$

$$u = -\frac{(1+\nu)R}{E}\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho\partial\zeta}, \qquad w = \frac{(1+\nu)R}{E}\left[2(1-\nu)\triangle\psi - \frac{\partial^2\psi}{\partial\zeta^2}\right] \quad (1.1)$$

Полагая

$$\psi(\rho, \zeta) = J_0(\delta\rho)\,\Phi(\delta, \zeta) \qquad (1.2)$$

где J_0 — функция Бесселя с индексом нуль, а δ — произвольный параметр, получим

$$\begin{aligned}
\sigma_\rho &= J_0(\delta\rho)\,[\nu\Phi''' + (1-\nu)\,\Phi'\,\delta^2] - \frac{\delta}{\rho}J_1(\delta\rho)\,\Phi' \\
\sigma_\theta &= J_0(\delta\rho)\,[\nu\Phi''' - \nu\Phi'\,\delta^2] + \frac{\delta}{\rho}J_1(\delta\rho)\,\Phi' \\
\sigma_\zeta &= J_0(\delta\rho)\,[(1-\nu)\,\Phi''' - (2-\nu)\,\Phi'\delta^2] \\
\tau_{\rho\zeta} &= \delta J_1(\delta\rho)\,[\nu\Phi'' + (1-\nu)\,\Phi\delta^2] \\
u &= \frac{(1+\nu)R}{E}\,\delta J_1(\delta\rho)\,\Phi' \\
w &= \frac{(1+\nu)R}{E}\,J_0(\delta\rho)\,[(1-2\nu)\,\Phi'' - 2\,(1-\nu)\,\Phi\delta^2]
\end{aligned} \qquad (1.3)$$

Здесь штрихами обозначены производные по ζ.

Так как $\psi(\rho, \zeta)$ — бигармоническая функция, то $\Phi(\delta, \zeta)$ определяется уравнением

$$\Phi^{IV} - 2\delta^2\Phi'' + \delta^4\Phi = 0 \qquad (1.4)$$

Четная и нечетная функции ζ, являющиеся решением этого уравнения и удовлетворяющие условию

$$[\nu\Phi'' + (1-\nu)\,\delta^2\,\Phi]_{\zeta=\pm\varepsilon} = 0 \qquad (1.5)$$

(условию отсутствия на торцах плиты касательных напряжений $\tau_{\rho\zeta}$), имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
\Phi^\circ(\delta, \zeta) &= (2\nu\,\mathrm{ch}\,\delta\varepsilon + \delta\varepsilon\,\mathrm{sh}\,\delta\varepsilon)\,\mathrm{ch}\,\delta\zeta - \delta\zeta\,\mathrm{ch}\,\delta\varepsilon\,\mathrm{sh}\,\delta\zeta \\
\Phi^*(\delta, \zeta) &= (2\nu\,\mathrm{sh}\,\delta\varepsilon + \delta\varepsilon\,\mathrm{ch}\,\delta\varepsilon)\,\mathrm{sh}\,\delta\zeta - \delta\zeta\,\mathrm{sh}\,\delta\varepsilon\,\mathrm{ch}\,\delta\zeta
\end{aligned} \qquad (1.6)$$

Наиболее общая форма решения представляется рядом

$$\psi_1(\rho, \zeta) = \sum_n J_0(\delta_n\rho)\,[A_n\Phi^\circ(\delta_n, \zeta) + B_n\,\Phi^*(\delta_n, \zeta)] \qquad (1.7)$$

Если наложить на функции $\Phi(\delta_n, \zeta)$ еще дополнительное условие (отсутствия на торцах плиты нормальных напряжений σ_ζ)

$$[(1-\nu)\,\Phi''' - (2-\nu)\,\Phi'\delta^2]_{\zeta=\pm\varepsilon} = 0 \qquad (1.8)$$

то параметр δ уже нельзя считать произвольным. Оказывается, что лишь функции $\Phi^\circ(\mu_k / \varepsilon, \zeta)$, $\Phi^*(\lambda_k / \varepsilon, \zeta)$ удовлетворяют условию (1.8), причем μ_k и λ_k — корни трансцендентных уравнений

$$\mathrm{sh}\,2\mu - 2\mu = 0, \qquad \mathrm{sh}\,2\lambda + 2\lambda = 0 \qquad (1.9)$$

Корни уравнений (1.9) достаточно хорошо изучены [3].

Соответствующее решение типа (1.7)

$$\psi_0(\rho, \zeta) = \sum_k C_k J_0\left(\frac{\mu_k\rho}{\varepsilon}\right)\Phi^\circ\left(\frac{\mu_k}{\varepsilon}, \zeta\right) + \sum_k D_k J_0\left(\frac{\lambda_k\rho}{\varepsilon}\right)\Phi^*\left(\frac{\lambda_k}{\varepsilon}, \zeta\right) \qquad (1.10)$$

удовлетворяет однородным граничным условиям на торцах плиты ($\sigma_\zeta = \tau_{\rho\zeta} = 0$, при $\zeta = \pm\varepsilon$), мы будем называть его *однородным*.

Имеется также полиномиальное однородное решение (соответствующее радиальному растяжению, чистому изгибу и осевому смещению всей плиты как твердого тела), которое можно написать в виде

$$\psi_2(\rho, \zeta) = H_0\rho^2 + H_1\left(\frac{2-\nu}{3}\zeta^3 - \frac{1-\nu}{2}\zeta\rho^2\right) + \\ + H_2\left(\frac{2-\nu}{12}\zeta^4 - \frac{1-\nu}{4}\zeta^2\rho^2 - \frac{\nu}{32}\rho^4\right) \tag{1.11}$$

Соответствующие решению (1.11) напряжения и перемещения будут

$$\begin{gathered}
\sigma_\rho^{(2)} = H_1(1+\nu) + H_2(1+\nu)\zeta, \qquad \sigma_\zeta^{(2)} = 0 \\
\sigma_\theta^{(2)} = H_1(1+\nu) + H_2(1+\nu)\zeta, \qquad \tau_{\rho\zeta}^{(2)} = 0 \\
u = \frac{(1+\nu)R}{E}\left[H_1(1-\nu)\rho + H_2(1-\nu)\rho\zeta\right] \\
w = \frac{(1+\nu)R}{E}\left[8H_0(1-\nu) - 2\nu H_1\zeta - H_2\left(\nu\zeta^2 + \frac{1-\nu}{2}\rho^2\right)\right]
\end{gathered} \tag{1.12}$$

§ 2. Пусть нагрузка приложена к торцу $\zeta = +\varepsilon$ по кольцу относительного радиуса c с постоянной интенсивностью на единицу длины q; тогда зависимость нагрузки от переменной ρ можно представить функцией

$$f(\rho) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad 0 \leqslant \rho < c \\ p & \text{при} \quad c \leqslant \rho \leqslant c+\eta \\ 0 & \text{при} \quad c+\eta < \rho \leqslant 1 \end{cases} \tag{2.1}$$

причем

$$\lim_{\eta \to 0} p\eta = q \tag{2.2}$$

Разложим $f(\rho)$ в ряд по функциям Бесселя:

$$f(\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0(a_n\rho) \qquad (J_0(\alpha_n) = 0)$$

Тогда, как известно:

$$a_n = \frac{2}{J_1^2(\alpha_n)} \int_0^1 x f(x) J_0(\alpha_n x)\, dx \tag{2.3}$$

Подставив (2.1) в (2.3) и произведя соответствующие вычисления с учетом (2.2), получим

$$f(\rho) = 2qc \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\alpha_n c) J_0(\alpha_n \rho)}{J_1^2(\alpha_n)} \tag{2.4}$$

Определим теперь в решении (1.7) постоянные A_n, B_n, δ_n из условий

$$(\sigma_\zeta)_{\zeta=-\varepsilon} = 0 \qquad (\sigma_\zeta)_{\zeta=+\varepsilon} = f(\rho), \qquad (\tau_{\rho\zeta})_{\zeta=\pm\varepsilon} = 0 \tag{2.5}$$

Имеем

$$A_n = \frac{-2qcJ_0(\alpha_n c)}{\alpha_n^3 J_1^2(\alpha_n)(\operatorname{sh} 2\alpha_n\varepsilon - 2\alpha_n\varepsilon)}, \qquad \delta_n = \alpha_n$$
$$B_n = \frac{-2qcJ_0(\alpha_n c)}{\alpha_n^3 J_1^2(\alpha_n)(\operatorname{sh} 2\alpha_n\varepsilon + 2\alpha_n\varepsilon)}, \tag{2.6}$$

и, подставляя (2.6) в (1.7), получаем

$$\psi_1 = -2qc\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(\alpha_n c)J_0(\alpha_n\rho)}{\alpha_n^3 J_1^2(\alpha_n)}\left\{\frac{\Phi^\circ(\alpha_n,\zeta)}{\operatorname{sh} 2\alpha_n\varepsilon - 2\alpha_n\varepsilon} + \frac{\Phi^*(\alpha_n,\zeta)}{\operatorname{sh} 2\alpha_n\varepsilon + 2\alpha_n\varepsilon}\right\} \tag{2.7}$$

На боковой поверхности плиты (при $\rho = 1$) удовлетворим двум условиям:

$$(u)_{\rho=1} = 0 \quad \text{при} \quad -\varepsilon < \zeta < +\varepsilon \tag{2.8}$$

$$(w)_{\rho=1} = 0 \quad \text{при} \quad \zeta = 0 \tag{2.9}$$

Для того чтобы условия (2.8) и (2.9) могли быть выполнены, добавим к функциям напряжений (2.7) однородные решения (1.10) и (1.11). Условие (2.8) тогда примет следующий вид:

$$-2qc\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(\alpha_n c)}{\alpha_n^2 J_1(\alpha_n)}\left\{\frac{U^\circ(\alpha_n,\zeta)}{\operatorname{sh} 2\alpha_n\varepsilon - 2\alpha_n\varepsilon} + \frac{U^*(\alpha_n,\zeta)}{\operatorname{sh} 2\alpha_n\varepsilon + 2\alpha_n\varepsilon}\right\} +$$
$$+\sum_k C_k\frac{\mu_k}{\varepsilon}J_1\left(\frac{\mu_k}{\varepsilon}\right)U^\circ\left(\frac{\mu_k}{\varepsilon},\zeta\right) + \sum_k D_k\frac{\lambda_k}{\varepsilon}J_1\left(\frac{\lambda_k}{\varepsilon}\right)U^*\left(\frac{\lambda_k}{\varepsilon},\zeta\right) +$$
$$+(1-\nu)H_1 + (1-\nu)H_2\zeta = 0 \tag{2.10}$$

Здесь введено обозначение $U(\delta,\zeta) = \Phi'(\delta,\zeta)$, причем

$$U^\circ(\delta,\zeta) = \delta\,[\delta\varepsilon\operatorname{sh}\delta\varepsilon - (1-2\nu)\operatorname{ch}\delta\varepsilon]\operatorname{sh}\delta\zeta - \delta^2\zeta\operatorname{ch}\delta\varepsilon\operatorname{ch}\delta\zeta$$
$$U^*(\delta,\zeta) = \delta\,[\delta\varepsilon\operatorname{ch}\delta\varepsilon - (1-2\nu)\operatorname{sh}\delta\varepsilon]\operatorname{ch}\delta\zeta - \delta^2\zeta\operatorname{sh}\delta\varepsilon\operatorname{sh}\delta\zeta \tag{2.11}$$

Для нахождения постоянных C_k, D_k, H_1 и H_2 из условия (2.10) надо переразложить ряды

$$-2qc\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(\alpha_n c)}{\alpha_n^2 J_1^2(\alpha_n)}\left\{\frac{U^\circ(\alpha_n,\zeta)}{\operatorname{sh} 2\alpha_n\varepsilon - 2\alpha_n\varepsilon} + \frac{U^*(\alpha_n,\zeta)}{\operatorname{sh} 2\alpha_n\varepsilon + 2\alpha_n\varepsilon}\right\}$$

в ряды по функциям $U^\circ(\mu_k/\varepsilon,\zeta)$ и $U^*(\lambda_k/\varepsilon,\zeta)$, зависящим от корней трансцендентных уравнений (1.9). Для этого рассмотрим интегралы

$$\frac{1}{2\pi i}\int\frac{U^\bullet(\delta,\zeta)\,d\delta}{\delta^2(\operatorname{sh} 2\delta\varepsilon - 2\delta\varepsilon)}, \qquad \frac{1}{2\pi i}\int\frac{U^\circ(\delta,\zeta)\,d\delta}{\delta^2(\delta^2-\alpha_n^2)(\operatorname{sh} 2\delta\varepsilon - 2\delta\varepsilon)}$$
$$\frac{1}{2\pi i}\int\frac{U^*(\delta,\zeta)\,d\delta}{\delta^2(\delta^2-\alpha_n^2)(\operatorname{sh} 2\delta\varepsilon + 2\delta\varepsilon)} \tag{2.12}$$

взятые в плоскости комплексного переменного δ по окружности большого радиуса с центром в начале координат.

Подинтегральная функция в первом интеграле имеет полюс третьего порядка в точке $\delta = 0$ и полюсы первого порядка в точках $\delta = \mu_k / \varepsilon$; во втором интеграле — полюс третьего порядка в точке $\delta = 0$ и полюсы первого порядка в точках $\delta = \mu_k / \varepsilon$ и $\delta = \pm \alpha_n$; наконец, подинтегральная функция в третьем интеграле имеет полюсы первого порядка в точках $\delta = 0$, $\delta = \lambda_k / \varepsilon$ и $\delta = \pm \alpha_n$.

С одной стороны, каждый из рассматриваемых интегралов равен сумме вычетов в полюсах подинтегральных функций; с другой стороны, все три интеграла стремятся к нулю, если радиус контура интегрирования неограниченно возрастает.

Имея в виду еще, что в окрестности начала координат $(|\delta| \ll 1)$

$$U^\circ(\delta, \zeta) = -2(1-\nu)\zeta\delta^2 + \left(\nu\varepsilon^2\zeta - \frac{2-\nu}{3}\zeta^3\right)\delta^4 + \ldots$$

$$U^*(\delta, \zeta) = 2\nu\varepsilon\delta^2 + \left[\frac{1+\nu}{3}\varepsilon^3 - (1-\nu)\varepsilon\zeta^2\right]\delta^4 + \ldots$$

$$\operatorname{sh} 2\delta\varepsilon - 2\delta\varepsilon = \frac{4}{\varepsilon}\varepsilon^3\delta^3\left(1 + \frac{\varepsilon^2}{5}\delta^2 + \ldots\right)$$

$$\operatorname{sh} 2\delta\varepsilon + 2\delta\varepsilon = 4\varepsilon\delta\left(1 + \frac{\varepsilon^2}{3}\delta^2 + \ldots\right) \tag{2.13}$$

получаем из (2.12) после неограниченного увеличения радиуса контура интегрирования

$$-\frac{2-\nu}{4}\frac{\zeta^3}{\varepsilon^3} + \frac{3(2+3\nu)}{20}\frac{\zeta}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{4}\sum_k \frac{U^\circ(\mu_k/\varepsilon, \zeta)}{\mu_k^2 \operatorname{sh}^2\mu_k} = 0 \tag{2.14}$$

$$\frac{3(1-\nu)}{2\varepsilon^2\alpha_n^4}\frac{\zeta}{\varepsilon} + \frac{1}{\alpha_n^2}\left[\frac{2-\nu}{4}\frac{\zeta^3}{\varepsilon^3} - \frac{3(2+3\nu)}{20}\frac{\zeta}{\varepsilon}\right] +$$
$$+ \frac{U^\circ(\alpha_n, \zeta)}{\alpha_n^3(\operatorname{sh} 2\alpha_n\varepsilon - 2\alpha_n\varepsilon)} + \frac{\varepsilon^3}{4}\sum_k \frac{U^\circ(\mu_k/\varepsilon, \zeta)}{\mu_k^2(\mu_k^2 - \varepsilon^2\alpha_n^2)\operatorname{sh}^2\mu_k} = 0 \tag{2.15}$$

$$-\frac{\nu}{2\alpha_n^2} + \frac{U^*(\alpha_n, \zeta)}{\alpha_n^3(\operatorname{sh} 2\alpha_n\varepsilon + 2\alpha_n\varepsilon)} + \frac{\varepsilon^3}{4}\sum_k \frac{U^*(\lambda_k/\varepsilon, \zeta)}{\lambda_k^2(\lambda_k^2 - \varepsilon^2\alpha_n^2)\operatorname{ch}^2\lambda_k} = 0 \tag{2.16}$$

Из (2.14) и (2.15) следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\alpha_n c)U^\circ(\alpha_n, \zeta)}{\alpha_n^2 J_1(\alpha_n)(\operatorname{sh} 2\alpha_n\varepsilon - 2\alpha_n\varepsilon)} = -\frac{3(1-\nu)}{2\varepsilon^3}\zeta\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(\alpha_n c)}{\alpha_n^3 J_1(\alpha_n)} - \tag{2.17}$$
$$-\frac{\varepsilon}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(\alpha_n c)}{\alpha_n J_1(\alpha_n)}\sum_k \frac{U^\circ(\mu_k/\varepsilon, \zeta)}{\mu_k^2\operatorname{sh}^2\mu_k} - \frac{\varepsilon^3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n J_0(\alpha_n c)}{J_1(\alpha_n)}\sum_k \frac{U^\circ(\mu_k/\varepsilon, \zeta)}{\mu_k^2(\mu_k^2 - \varepsilon^2\alpha_n^2)\operatorname{sh}^2\mu_k}$$

а из (2.16), что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\alpha_n c)U^*(\alpha_n, \zeta)}{\alpha_n^2 J_1(\alpha_n)(\operatorname{sh} 2\alpha_n\varepsilon + 2\alpha_n\varepsilon)} = \tag{2.18}$$
$$= \frac{\nu}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(\alpha_n c)}{\alpha_n J_1(\alpha_n)} - \frac{\varepsilon^3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n J_0(\alpha_n c)}{J_1(\alpha_n)}\sum_k \frac{U^*(\lambda_k/\varepsilon, \zeta)}{\lambda_k^2(\lambda_k^2 - \varepsilon^2\alpha_n^2)\operatorname{ch}^2\lambda_k}$$

Меняя порядок суммирования по n и по k и используя соотношения

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n J_0(\alpha_n c)}{(\alpha_n^2 - S^2) J_1(\alpha_n)} = \frac{J_0(Sc)}{2J_0(S)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\alpha_n c)}{\alpha_n J_1(\alpha_n)} = \frac{1}{2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\alpha_n c)}{\alpha_n^3 J_1(\alpha_n)} = \frac{1-c^2}{8}$$

получим вместо (2.17) и (2.18)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\alpha_n c) U^\circ(\alpha_n, \zeta)}{\alpha_n^2 J_1(\alpha_n)(\operatorname{sh} 2\alpha_n\varepsilon - 2\alpha_n\varepsilon)} = \tag{2.19}$$

$$= -\frac{3(1-\nu)}{16\varepsilon^3}(1-c^2)\zeta - \frac{\varepsilon}{8}\sum_k \frac{U^\circ(\mu_k/\varepsilon, \zeta)}{\mu_k^2 \operatorname{sh}^2 \mu_k} + \frac{\varepsilon}{8}\sum_k \frac{J_0(\mu_k c/\varepsilon) U^\circ(\mu_k/\varepsilon, \zeta)}{J_0(\mu_k/\varepsilon)\mu_k^2 \operatorname{sh}^2 \mu_k}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\alpha_n c)}{\alpha_n^2 J_1(\alpha_n)} \frac{U^*(\alpha_n, \zeta)}{(\operatorname{sh} 2\alpha_n\varepsilon + 2\alpha_n\varepsilon)} = \frac{\nu}{4} + \frac{\varepsilon}{8}\sum_k \frac{J_0(\lambda_k c/\varepsilon) U^*(\lambda_k/\varepsilon, \zeta)}{J_0(\lambda_k/\varepsilon)\lambda_k^2 \operatorname{ch}^2 \lambda_k} \tag{2.20}$$

Найденные разложения в ряды (2.19) и (2.20) подставим в условие (2.10). Имеем

$$-\frac{\varepsilon qc}{4}\sum_k \frac{J_0(\mu_k c/\varepsilon) U^\circ(\mu_k/\varepsilon, \zeta)}{J_0(\mu_k/\varepsilon)\mu_k^2 \operatorname{sh}^2 \mu_k} - \frac{\varepsilon qc}{4}\sum_k \frac{J_0(\lambda_k c/\varepsilon) U^*(\lambda_k/\varepsilon, \zeta)}{J_0(\lambda_k/\varepsilon)\lambda_k^2 \operatorname{ch}^2 \lambda_k} +$$

$$+ \frac{\varepsilon qc}{4}\sum_k \frac{U^\circ(\mu_k/\varepsilon, \zeta)}{\mu_k^2 \operatorname{sh}^2 \mu_k} + \frac{3(1-\nu)}{8\varepsilon^3}(1-c^2)\zeta qc - \frac{\nu}{2}qc + (1-\nu)H_1 +$$

$$+ (1-\nu)H_2\zeta + \sum_k C_k \frac{\mu_k}{\varepsilon} J_1\left(\frac{\mu_k}{\varepsilon}\right) U^\circ\left(\frac{\mu_k}{\varepsilon}, \zeta\right) +$$

$$+ \sum_k D_k \frac{\lambda_k}{\varepsilon} J_1\left(\frac{\lambda_k}{\varepsilon}\right) U^*\left(\frac{\lambda_k}{\varepsilon}, \zeta\right) = 0 \tag{2.21}$$

Откуда получаем

$$H_1 = \frac{\nu}{2(1-\nu)} qc, \qquad C_k = \frac{\varepsilon^2 [J_0(\mu_k c/\varepsilon) - J_0(\mu_k/\varepsilon)]}{4\mu_k^3 \operatorname{sh}^2 \mu_k J_0(\mu_k/\varepsilon) J_1(\mu_k/\varepsilon)} qc$$

$$H_2 = -\frac{3}{8\varepsilon^3} qc(1-c^2), \qquad D_k = \frac{\varepsilon^2 J_0(\lambda_k c/\varepsilon)}{4\lambda_k^3 \operatorname{ch}^2 \lambda_k J_0(\lambda_k/\varepsilon) J_1(\lambda_k/\varepsilon)} qc \tag{2.22}$$

Таким образом, функции ψ_0, ψ_2 определены:

$$\psi_0 = \frac{\varepsilon^2 qc}{4}\sum_k \frac{[J_0(\mu_k c/\varepsilon) - J_0(\mu_k/\varepsilon)] J_0(\mu_k \rho/\varepsilon) \Phi^\circ(\mu_k/\varepsilon, \zeta)}{\mu_k^3 \operatorname{sh}^2 \mu_k J_0(\mu_k/\varepsilon) J_1(\mu_k/\varepsilon)} +$$

$$+ \frac{\varepsilon^2 qc}{4}\sum_k \frac{J_0(\lambda_k c/\varepsilon) J_0(\lambda_k \rho/\varepsilon) \Phi^*(\lambda_k/\varepsilon, \zeta)}{\lambda_k^3 \operatorname{ch}^2 \lambda_k J_0(\lambda_k/\varepsilon) J_1(\lambda_k/\varepsilon)} \tag{2.23}$$

$$\psi_2 = \frac{\nu}{2} cq \left[\frac{2-\nu}{3(1-\nu)}\zeta^3 - \frac{1}{2}\zeta\rho^2\right] + H_0\rho^2 +$$

$$+ \frac{3(1-c^2)cq}{8\varepsilon^3}\left[\frac{\nu}{32}\rho^4 + \frac{1-\nu}{4}\zeta^2\rho^2 - \frac{2-\nu}{12}\zeta^4\right] \tag{2.24}$$

Произвольная постоянная H_0 в выражении (2.24) дает возможность удовлетворить и второму условию, накладываемому на осевое перемемещение боковой поверхности плиты (2.9).

Полученные ряды (2.23) для функции напряжений ψ_0 неудобны, так как представляют собой суммы комплексных сопряженных величин λ_k, μ_k — комплексные числа); поэтому, прежде чем использовать полученные формулы для вычислений, надо их предварительно преобразовать.

Для приведения функции напряжений ψ_0 к вещественным рядам рассмотрим интегралы в области комплексного переменного δ

$$\frac{1}{2\pi i}\int\frac{[J_0(\delta c)-J_0(\delta)]\,J_0(\delta\rho)\,\Phi^\circ(\delta,\zeta)}{\delta^3 J_0(\delta)\,J_1(\delta)\,(\operatorname{sh}2\delta\varepsilon-2\delta\varepsilon)}\,d\delta,\qquad \frac{1}{2\pi i}\int\frac{J_0(\delta c)\,J_0(\delta\rho)\,\Phi^*(\delta,\zeta)\,d\delta}{\delta^3 J_0(\delta)\,J_1(\delta)\,(\operatorname{sh}2\delta\varepsilon+2\delta\varepsilon)}$$

взятые, как и ранее, по окружности большого радиуса с центром в начале координат. При $|\delta|\ll 1$ имеем

$$\Phi^\circ(\delta,\zeta)=2\nu+[(1+\nu)\,\varepsilon^2-(1-\nu)\,\zeta^2]\,\delta^2+$$
$$+[(2+\nu)\,\varepsilon^4+6\nu\varepsilon^2\zeta^2-(2-\nu)\,\zeta^4]\,\frac{\delta^4}{12}+\ldots$$

$$\Phi^*(\delta,\zeta)=\varepsilon\zeta\delta^2\left\{2\nu+[(1+\nu)\,\varepsilon^2-(1-\nu)\,\zeta^2]\,\frac{\delta^2}{3}+\ldots\right\}$$

$$J_0(\delta\rho)=1-\frac{1}{4}\rho^2\delta^2+\frac{1}{64}\rho^4\delta^4-\ldots$$

$$J_0(\delta)\,J_1(\delta)=\frac{1}{2}\delta^2\left\{1-\frac{3}{8}\delta^2+\frac{5}{96}\delta^4-\ldots\right\}$$

$$J_0(\delta c)-J_0(\delta)=\frac{1-c^2}{4}\,\delta^2\left\{1-\frac{1+c^2}{16}\delta^2+\frac{1+c^2+c^4}{576}\delta^4+\ldots\right\}$$

В первом интеграле подинтегральная функция имеет полюс пятого порядка в точке $\delta=0$ и полюсы первого порядка в точках $\delta=\alpha_n$, $\delta=\beta_n$ и $\delta=\mu_k/\varepsilon$; во втором интеграле подинтегральная функция имеет полюс третьего порядка в точке $\delta=0$ и полюсы первого порядка в точках $\delta=\alpha_n$, $\delta=\beta_n$ и $\delta=\lambda_k/\varepsilon$ (β_n — корни функции Бесселя с индексом единица). Оба интеграла стремятся к нулю при неограниченном возрастании радиуса контура интегрирования. Используя теорему о вычетах, получаем

$$-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(\alpha_n c)\,J_0(\alpha_n\rho)\,\Phi^\circ(\alpha_n,\zeta)}{\alpha_n{}^3J_1{}^2(\alpha_n)\,(\operatorname{sh}2\alpha_n\varepsilon-2\alpha_n\varepsilon)}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[J_0(\beta_n c)-J_0(\beta_n)]\,J_0(\beta_n\rho)\,\Phi^\circ(\beta_n,\zeta)}{\beta_n{}^3J_0{}^2(\beta_n)\,(\operatorname{sh}2\beta_n\varepsilon-2\beta_n\varepsilon)}+$$
$$+\frac{\varepsilon^2}{4}\sum_k\frac{[J_0(\mu_k c/\varepsilon)-J_0(\mu_k/\varepsilon)]\,J_0(\mu_k\rho/\varepsilon)\,\Phi^\circ(\mu_k/\varepsilon,\zeta)}{\mu_k{}^3J_0(\mu_k/\varepsilon)\,J_1(\mu_k/\varepsilon)\operatorname{sh}^2\mu_k}+M_0+M_1\rho^2+M_2\zeta^2+$$
$$+\frac{3(1-c^2)}{8\varepsilon^2}\left[\frac{\nu}{32}\rho^4+\frac{1-\nu}{4}\rho^2\zeta^2-\frac{2-\nu}{12}\zeta^4\right]=0 \tag{2.25}$$

$$-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(\alpha_n c)\,J_0(\alpha_n\rho)\,\Phi^*(\alpha_n,\zeta)}{\alpha_n{}^3J_1{}^2(\alpha_n)\,(\operatorname{sh}2\alpha_n\varepsilon+2\alpha_n\varepsilon)}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(\beta_n c)\,J_0(\beta_n\rho)\,\Phi^*(\beta_n,\zeta)}{\beta_n{}^3J_0{}^2(\beta_n)\,(\operatorname{sh}2\beta_n\varepsilon+2\beta_n\varepsilon)}+$$
$$+\frac{\varepsilon^2}{4}\sum\frac{J_0(\lambda_k c/\varepsilon)\,J_0(\lambda_k\rho/\varepsilon)\,\Phi^*(\lambda_k/\varepsilon,\zeta)}{\lambda_k{}^3J_0(\lambda_k/\varepsilon)\,J_1(\lambda_k/\varepsilon)\operatorname{ch}^2\lambda_k}-\frac{\zeta}{2}\left\{\frac{1-\nu}{3}\zeta^2+\frac{\nu}{2}\rho^2\right\}+M_0'=0$$

Соотношения (2.25) позволяют представить однородную функцию напряжений ψ_0 вещественными рядами.

Отбрасывая не существенные для функции напряжений постоянные, а также квадратичные члены (влияние последних скажется лишь на значении постоянной H_0), получим

$$\psi_0 = 2qc \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\alpha_n c) J_0(\alpha_n \rho)}{\alpha_n^3 J_1^2(\alpha_n)} \left\{ \frac{\Phi^\circ(\alpha_n, \zeta)}{\operatorname{sh} 2\alpha_n\varepsilon - 2\alpha_n\varepsilon} + \frac{\Phi^*(\alpha_n, \zeta)}{\operatorname{sh} 2\alpha_n\varepsilon + 2\alpha_n\varepsilon} \right\} -$$
$$- 2qc \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\beta_n c) J_0(\beta_n \rho)}{\beta_n^3 J_0^2(\beta_n)} \left\{ \frac{\Phi^\circ(\beta_n, \zeta)}{\operatorname{sh} 2\beta_n\varepsilon - 2\beta_n\varepsilon} + \frac{\Phi^*(\beta_n, \zeta)}{\operatorname{sh} 2\beta_n\varepsilon + 2\beta_n\varepsilon} \right\} +$$
$$+ 2qc \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\beta_n \rho)\, \Phi^\circ(\beta_n, \zeta)}{\beta_n^3 J_0^2(\beta_n)(\operatorname{sh} 2\beta_n\varepsilon - 2\beta_n\varepsilon)} + \frac{qc}{12}\left[2(1-\nu)\zeta^3 + 3\nu\zeta\rho^2\right] +$$
$$+ \frac{3qc(1-c^2)}{8\varepsilon^3}\left[\frac{2-\nu}{12}\zeta^4 - \frac{1-\nu}{4}\rho^2\zeta^2 - \frac{\nu}{32}\rho^4\right] \tag{2.26}$$

Полное решение задачи дается суммой функций напряжений

$$\psi = \psi_0 + \psi_1 + \psi_2 \tag{2.27}$$

Складывая (2.7), (2.24) и (2.27), получим

$$\psi = \frac{cq}{6(1-\nu)}\zeta^3 + H_0\rho^2 + 2qc \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\beta_n \rho)\, \Phi^\circ(\beta_n, \zeta)}{\beta_n^3 J_0(\beta_n)(\operatorname{sh} 2\beta_n\varepsilon - 2\beta_n\varepsilon)} -$$
$$- 2cq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\beta_n c) J_0(\beta_n \rho)}{\beta_n^3 J_0^2(\beta_n)} \left\{ \frac{\Phi_0(\beta_n, \zeta)}{\operatorname{sh} 2\beta_n\varepsilon - 2\beta_n\varepsilon} + \frac{\Phi^*(\beta_n, \zeta)}{\operatorname{sh} 2\beta_n\varepsilon + 2\beta_n\varepsilon} \right\} \tag{2.28}$$

где постоянная H_0, определенная из условия (2.9), равна:

$$H_0 = \frac{qc}{4(1-\nu)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[J_0(\beta_n) - J_0(\beta_n c)]\,[\beta_n\varepsilon \operatorname{sh}\beta_n\varepsilon + 2(1-\nu)\operatorname{ch}\beta_n\varepsilon]}{\beta_n J_0(\beta_n)(\operatorname{sh} 2\beta_n\varepsilon - 2\beta_n\varepsilon)} \tag{2.29}$$

§ 3. Функция (2.28) дает возможность весьма просто решить задачу о равновесии заделанной (в смысле радиальных перемещений) круглой плиты, нагруженной по торцам произвольной осесимметричной нагрузкой. Отметим, что если функция $\psi(\rho, \zeta; c)$ является решением задачи об упругом равновесии плиты при действии кольцевой нагрузки радиуса c, приложенной к верхнему торцу $(\zeta = +\varepsilon)$, то функция $\psi(\rho, -\zeta; c)$ решает задачу для такой же нагрузки, но приложенной к нижнему торцу $(\zeta = -\varepsilon)$. В общем случае, когда на торцах приложены нагрузки $q^+(\rho)$ и $q^-(\rho)$, т. е.

$$(\sigma_\zeta)_{\zeta=\varepsilon} = q^+(\rho), \qquad (\sigma_\zeta)_{\zeta=-\varepsilon} = q^-(\rho), \qquad (\tau_{\rho\zeta})_{\zeta=\pm\varepsilon} = 0 \tag{3.1}$$

решение получается из (2.28) интегрированием по параметру c:

$$\varphi(\rho, \zeta) = \int_0^1 \{\psi(\rho, \zeta; c)\, q^+(c) + \psi(\rho, -\zeta; c)\, q^-(c)\}\, dc \tag{3.2}$$

Например, в случае изгиба плиты равномерным давлением q_0, приложенным к верхнему торцу:

$$q^+(c) = -q_0, \qquad q^-(c) = 0$$

и по (3.2) имеем

$$\varphi = -q_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\beta_n \rho)\,\Phi^\circ(\beta_n, \zeta)}{\beta_n^3 J_0(\beta_n)(\operatorname{sh} 2\beta_n\varepsilon - 2\beta_n\varepsilon)} - \frac{q_0 \zeta^3}{12(1-\nu)} + H_0\rho^2 \tag{3.3}$$

где по (2.29)

$$H_0 = -\frac{q_0}{8(1-\nu)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n\varepsilon \operatorname{sh}\beta_n\varepsilon + 2(1-\nu)\operatorname{ch}\beta_n\varepsilon}{\beta_n(\operatorname{sh} 2\beta_n\varepsilon - 2\beta_n\varepsilon)} \tag{3.4}$$

Прогиб срединной поверхности плиты определяется формулой

$$(w)_{\zeta=0} = -\frac{q_0(1+\nu)R}{E} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[J_0(\beta_n) - J_0(\beta_n\rho)]\,[\beta_n\varepsilon \operatorname{sh}\beta_n\varepsilon + 2(1-\nu)\operatorname{ch}\beta_n\varepsilon)}{\beta_n J_0(\beta_n)(\operatorname{sh} 2\beta_n\varepsilon - 2\beta_n\varepsilon)} \tag{3.5}$$

Для достаточно тонких плит прогиб срединной поверхности, вычисленный по формуле (3.5), не отличается от даваемого формулой теории тонких пластин

$$W_0 = -\frac{q_0 R^4}{64D}(1-\rho^2)^2 \tag{3.6}$$

В самом деле, устремляя ε к нулю, вместо (3.5) будем иметь

$$W_0 = -\frac{3(1-\nu^2)q_0R}{2E\varepsilon^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_n^4}\left[1 - \frac{J_0(\beta_n\rho)}{J_0(\beta_n)}\right] \tag{3.7}$$

Ряд в правой части (3.7) суммируется, если используется разложение

$$\frac{2\rho^2 - \rho^4}{64} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\beta_n\rho)}{\beta_n^4 J_0(\beta_n)} \tag{3.8}$$

и получающееся из него при $\rho = 1$

$$\frac{1}{64} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_n^4} \tag{3.9}$$

Если подставить (3.8) и (3.9) в (3.7) и учесть еще, что $\varepsilon = h/R$, а цилиндрическая жесткость пластины толщиной $2h$ равна $2Eh^3/3(1-\nu)$, как раз получится формула (3.6) для прогиба жестко заделанной круглой пластины, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой.

Решение для сосредоточенной силы P, приложенной в центре торца плиты, получается из (2.28), если c стремится к нулю, а q безгранично возрастает, так что их произведение остается конечным и равно $P/2\pi R^2$. Переходя в (2.28) и (2.29) указанным образом к пределу, получим

$$\psi = -\frac{P\zeta^3}{12\pi(1-\nu)R^2} + H_0\rho^2 - \frac{P}{\pi R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\beta_n\rho)\,\Phi^\circ(\beta_n, \zeta)}{\beta_n^3 J_0(\beta_n)(\operatorname{sh} 2\beta_n\varepsilon - 2\beta_n\varepsilon)} +$$
$$+ \frac{P}{\pi R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\beta_n\rho)}{\beta_n^3 J_0^2(\beta_n)} \left\{ \frac{\Phi^\circ(\beta_n, \zeta)}{\operatorname{sh} 2\beta_n\varepsilon - 2\beta_n\varepsilon} + \frac{\Phi^*(\beta_n, \zeta)}{\operatorname{sh} 2\beta_n\varepsilon + 2\beta_n\varepsilon} \right\} \tag{3.10}$$

где

$$H_0 = \frac{P}{8\pi(1-\nu)R^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta_n\varepsilon\,\mathrm{sh}\,\beta_n\varepsilon + 2(1-\nu)\,\mathrm{ch}\,\beta_n\varepsilon}{\beta_n J_0(\beta_n)(\mathrm{sh}\,2\beta_n\varepsilon - 2\beta_n\varepsilon)}\{1 - J_0(\beta_n)\} \qquad (3.11)$$

Прогиб срединной поверхности плиты будет

$$(w)_{\zeta=0} = -\frac{P(1+\nu)}{\pi ER}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta_n\varepsilon\,\mathrm{sh}\,\beta_n\varepsilon + 2(1-\nu)\,\mathrm{ch}\,\beta_n\varepsilon}{\beta_n J_0^2(\beta_n)(\mathrm{sh}\,2\beta_n\varepsilon - 2\beta_n\varepsilon)}\{1 - J_0(\beta_n)\}\{J_0(\beta_n\rho) - J_0(\beta_n)\} \qquad (3.12)$$

Можно показать, что и в этом случае в пределе, при ε, стремящемся к нулю, получается результат теории тонких пластин:

$$W_0 = -\frac{PR^2}{16\pi D}(1 - \rho^2 + 2\rho^2\log\rho) \qquad (3.13)$$

Наконец, беря производную по c в (2.28) и заменяя после дифференцирования q на m/R, получим решение для распределенного по кольцу относительного радиуса c момента постоянной интенсивности m:

$$\varphi = \frac{2m}{R}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta_n cJ_1(\beta_n c) - J_0(\beta_n c)}{\beta_n^3 J_0^2(\beta_n)}J_0(\beta_n\rho)\left\{\frac{\Phi^\circ(\beta_n,\zeta)}{\mathrm{sh}\,2\beta_n\varepsilon - 2\beta_n\varepsilon} + \frac{\Phi^*(\beta_n,\zeta)}{\mathrm{sh}\,2\beta_n\varepsilon + 2\beta_n\varepsilon}\right\} +$$

$$+\frac{2m}{R}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(\beta_n\rho)\,\Phi^\circ(\beta_n,\zeta)}{\beta_n^3 J_0(\beta_n)(\mathrm{sh}\,2\beta_n\varepsilon - 2\beta_n\varepsilon)} + \frac{m\zeta^3}{6(1-\nu)R} \qquad (3.14)$$

где

$$H_0 = \frac{m}{4R(1-\nu)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(\beta_n) + \beta_n cJ_1(\beta_n c) - J_0(\beta_n c)}{\beta_n J_0(\beta_n)(\mathrm{sh}\,2\beta_n\varepsilon - 2\beta_n\varepsilon)}[\beta_n\varepsilon\,\mathrm{sh}\,\beta_n\varepsilon + 2(1-\nu)\,\mathrm{ch}\,\beta_n\varepsilon] \qquad (3.15)$$

Поступила 1 VI 1950

Ленинградский политехнический институт

ЛИТЕРАТУРА

1. Glemmow C. A. Flexure of Thick Circular Plates. Proc. Roy. Soc. of London. 1926. Ser. A. Vol. 112.
2. Nadai A. Elastische Platten. Berlin. 1925.
3. Лурье А. И. К теории толстых плит. ПММ. 1942. Т. VI. Вып. 2—3.
4. Ляв А. Математическая теория упругости. ОНТИ НКТП. 1935.