Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XIV, 1950

ОБ УСЛОВИЯХ СУЩЕСТВОВАНИЯ ЦЕНТРА И ФОКУСА

Н. А. Сахарников

(Ленинград)

В статье изложены общие соображения об условиях существования центра и фокуса, при помощи которых может быть получено решение проблемы центра и фокуса в некоторых частных случаях.

§ 1. Постановка задачи. Пусть дана система

$$\frac{dx}{dt} = y + X(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = -x - Y(x, y) \tag{1.1}$$

где $X(x, y)$ и $Y(x, y)$ — голоморфные функции переменных x и y в точке $x = y = 0$, в разложениях которых в ряды по целым положительным степеням этих переменных отсутствуют линейные и свободные члены.

Определяющее уравнение такой системы имеет чисто мнимые корни $\pm i$, а изолированная особая точка $x = y = 0$ системы (1.1), как известно [1], может быть только либо центром, либо фокусом.

Под центром понимается такая точка, в любой окрестности которой лежат замкнутые траектории, окружающие эту особую точку. Принимая во внимание голоморфность правых частей системы (1.1), из этого определения следует, что существует некоторая окрестность центра, сплошь заполненная непересекающимися замкнутыми тракториями, окружающими центр. В случае центра невозмущенное движение неасимптотически устойчиво в смысле Ляпунова.

В случае, когда особая точка является фокусом, все траектории системы, проходящие в достаточной близости этой особой точки, являются спиралями, неограниченно приближающимися к особой точке. В этом случае невозмущенное движение асимптотически устойчиво в смысле Ляпунова либо при $t \to +\infty$, либо при $t \to -\infty$.

Проблема центра и фокуса состоит в установлении аналитического критерия для отличения центра от фокуса. Другими словами, проблема центра и фокуса состоит в установлении аналитических условий, налагаемых на систему (1.1), которые являются необходимыми и достаточными для того, чтобы особая точка $x = y = 0$ системы (1.1) была центром (так как если начало координат не есть центр, то налицо фокус). Таким образом, в этой проблеме ставится интересный для современной техники вопрос об аналитическом критерии различения асимптотической устойчивости от неасимптотической устойчивости в смысле Ляпунова.

Проблема центра и фокуса, как известно [2], тесно связана с проблемой существования у системы (1.1) не зависящего от t интеграла, представляющего голоморфную в начале координат функцию переменных x и y. Связь этих проблем видна из следующей теоремы Ляпунова: *для того чтобы особая точка $x = y = 0$ системы* (1.1) *была центром, необходимо и достаточно, чтобы существовал ряд вида*

$$F(x, y) = \sum_{k=2}^{\infty} F_k(x, y) \tag{1.2}$$

где $F_k(x, y)$ — однородные многочлены степени k относительно x и y, формально удовлетворяющие уравнению

$$(y + X)\frac{\partial F}{\partial x} - (x + Y)\frac{\partial F}{\partial y} = 0 \tag{1.3}$$

где X и Y — те же, что и в системе (1.1). Далее Ляпунов доказал, что если существует такой «формальный» интеграл, как (1.2), то он сходится в некоторой окрестности особой точки и, следовательно, представляет не зависящий от t голоморфный интеграл системы (1.1).

§ 2. О постоянных Ляпунова. Известно [1], что существование центра можно установить, вообще говоря, лишь бесконечным числом некоторых операций. Ниже показано, как можно упростить эти операции.

Если в уравнение (1.3) подставить сместо F ряд вида (1.2), в котором под $F_k(x, y)$ понимать пока неопределенные однородные функции степени k относительно x и y, и приравнять порознь нулю однородные формы, которые при этом получаются в левой части равенства (1.3), то получим бесконечную систему уравнений вида

$$y\frac{\partial F_k(x, y)}{\partial x} - x\frac{\partial F_k(x, y)}{\partial y} = R_k(x, y) \qquad (k = 2, 3, \ldots) \tag{2.1}$$

где $R_k(x, y)$ будут однородными относительно x и y функциями степени k, представляющими вместе с тем известные функции тех F_j, для которых $j < k$, а функция $R_2(x, y)$ получится тождественно равной нулю.

Система (2.1) может служить для определения членов ряда (1.2), причем, если все F_k будут однородными многочленами, то согласно теореме Ляпунова ряд (1.2) сходится в некоторой окрестности начала, а особая точка $x = y = 0$ системы (1.1) будет центром. В противном случае начало координат есть фокус.

Таким образом, могут быть последовательно найдены постоянные

$$g_k = \int_0^{2\pi} R_{2k+2}(\cos\varphi, \sin\varphi)\, d\varphi \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{2.2}$$

Эти постоянные будем называть постоянными Ляпунова.

Л е м м а 1. *Для того чтобы особая точка $x = y = 0$ системы* (1.1) *была центром, необходимо и достаточно, чтобы были равны нулю все постоянные Ляпунова.*

Для доказательства этого утверждения, которое является непосредственным следствием соответствующих рассуждений Ляпунова, преобразуем систему (2.1) к полярным координатам, положив $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Получим

$$-\frac{dF_k(\cos\varphi, \sin\varphi)}{d\varphi} = R_k(\cos\varphi, \sin\varphi) \qquad (k = 2, 3, \ldots) \tag{2.3}$$

Для доказательства необходимости предположим, что при некотором $k = k_1$ постоянная Ляпунова отлична от нуля. Тогда решение одного из уравнений системы (2.3) будет иметь вековой член $-2\pi g_{k_1}\varphi$ и поэтому $F_{2k_1+2}(x, y)$ не будет многочленом. Следовательно, система (1.1) не будет допускать не зависящий от t голоморфный интеграл, а особая точка $x = y = 0$ системы (1.1) не будет центром.

Для доказательства достаточности заметим, что если для системы (1.1) все постоянные Ляпунова равны нулю, то решение уравнения (2.3) при любом k может быть представлено в виде однородного многочлена степени k относительно $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$, а поэтому все $F_k(x, y)$ будут многочленами, а особая точка $x = y = 0$ системы (1.1) будет центром. Отсюда следует заключение леммы 1.

При решении проблемы центра и фокуса затрудняющим обстоятельством является сложность вычислений постоянных Ляпунова. Для упрощения этих вычислений введем в рассмотрение интегрирующий множитель уравнения

$$(x + Y)\,dx + (y + X)\,dy = 0 \tag{2.4}$$

где X и Y — те же, что и в системе (1.1).

Лемма 2. *Для существования не зависящего от t голоморфного в точке $x = y = 0$ интеграла системы* (1.1), *необходимо и достаточно существование не зависящего от t голоморфного интегрирующего множителя уравнения* (2.1) *вида*

$$U(x, y) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k(x, y) \tag{2.5}$$

где $U_k(x, y)$ — однородные относительно x и y многочлены степени k.

Из существования не зависящего от t интеграла системы (1.1), очевидно, следует существование не зависящего от t интегрирующего множителя уравнения (2.4), и наоборот. Поэтому остается доказать голоморфность рассматриваемых функций в начале координат.

При доказательстве достаточности убеждаемся в голоморфности интеграла $F(x, y)$ при помощм равенств

$$\frac{\partial F}{\partial x} = (x + Y)\,U, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = (y + X)\,U \tag{2.6}$$

в которых под U надо понимать голоморфную функцию.

Действительно, из голоморфности правых частей системы (2.6) следует голоморфность $F(x, y)$.

При доказательстве необходимости убеждаемся в голоморфности $U(x, y)$ опять при помощи равенств (2.6), в которых под $F(x, y)$ надо понимать голоморфную функцию, младший член разложения которой в ряд по однородным многочленам без нарушения общности может быть принят равным $F_2 = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, потому что $R_2(x, y) \equiv 0$. Действительно, из тождества

$$F_y' = \frac{y + X}{x + Y} F_x'$$

обе части которого голоморфны, а первый множитель правой части неголоморфен, следует голоморфность функции $F_x' / (x + Y)$, равной $U(x, y)$.

Этим рассуждением доказана лемма 2. Эту лемму можно доказать, исходя из других соображений, которые пригодятся и для дальнейшего. Поэтому приведем еще одно доказательство.

Из равенств (2.6) следует равенство

$$xF_x' + yF_y' = [x^2 + y^2 + xY + yX]\, U \tag{2.7}$$

которое имеет масто как в случае существования голоморфного интеграла, так и в противном случае. Подставим в равенство (2.7) вместо F и U соответственно ряды (1.2) и (2.5), расположенные по однородным функциям, а вместо $xY + yX$ разложение этой функции в ряд по однородным многочленам $B_3(x, y) + B_4(x, y) + \cdots$.

В результате сравнения однородных форм равных степеней придем к системе равенств, которая в полярных координатах ($x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$) имеет вид:

$$\begin{aligned}
&2F_2(\varphi) = 1\\
&3F_3(\varphi) = U_1(\varphi) + B_3(\varphi)\\
&4F_4(\varphi) = U_2(\varphi) + B_3(\varphi)U_1(\varphi) + B_4(\varphi)\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&mF_m(\varphi) = U_{m-2}(\varphi) + B_3(\varphi)U_{m-3}(\varphi) + \cdots + B_{m-1}(\varphi)U_1(\varphi) + B_m(\varphi)\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned} \tag{2.8}$$

где $F_k(\varphi) = F_k(\cos\varphi, \sin\varphi)$, $U_k(\varphi) = U_k(\cos\varphi, \sin\varphi)$, $B_k(\varphi) = B_k(\cos\varphi, \sin\varphi)$ — однородные функции степени k относительно $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$.

Отсюда следует, что если интегрирующий множитель $U(x, y)$ есть функция голоморфная, то все $U_k(\varphi)$ будут однородными многочленами степени k относительно $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$, а следовательно, все $F_k(\varphi)$ будут функциями такого же характера, что и $U_k(\varphi)$. В этом случае все $F_k(x, y)$ будут однородными многочленами степени k относительно x и y. Сходимость ряда (1.2) обеспечена соответствующей теоремой Ляпунова. Итак, из голоморфности интегрирующего множителя $U(x, y)$ следует голоморфность интеграла $F(x, y)$. Докажем, что из голоморфности интеграла $F(x, y)$ следует голоморфность интегрируюшего множителя $U(x, y)$.

Предположим, что система (1.1) допускает не зависящий от t голоморфный интеграл $\Phi(x, y)$. Тогда все функции $F_k(\varphi)$ будут однородными многочленами степени k относительно $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$. Из формул

(2.8) следует, что все $U_k(\varphi)$ тоже будут однородными многочленами относительно $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$. Повидимому, степень многочлена $U_k(\varphi)$, определяемого формулами (2.8), равна $k+2$. Однако в действительности она равна k.

Для того чтобы в этом убедиться, введем вместо x и y полярные координаты, положив $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ и обозначения

$$A(r, \varphi) = X(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cos\varphi - Y(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\sin\varphi$$

$$B(r, \varphi) = X(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\sin\varphi + Y(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cos\varphi$$

Рассматриваемые здесь функции можно представить в виде рядов, сходящихся при достаточно малом $|r|$ равномерно относительно φ,

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2}r^2 + r^3 F_3(\varphi) + r^4 F_4(\varphi) + \cdots + r^n F_n(\varphi) + \cdots$$

$$U(x, y) = 1 + rU_1(\varphi) + r^2 U_2(\varphi) + \cdots + r^n U_n(\varphi) + \cdots$$

$$A(r, \varphi) = r^2 A_3(\varphi) + r^3 A_4(\varphi) + \cdots + r^{n-1} A_n(\varphi) + \cdots$$

$$B(r, \varphi) = r^2 B_3(\varphi) + r^3 B_4(\varphi) + \cdots + r^{n-1} B_n(\varphi) + \cdots$$

В результате преобразования к полярным координатам равенство (2.7) примет вид:

$$rF_r' = [r^2 + rB(r, \varphi)]\, U(r, \varphi) \tag{2.9}$$

а уравнение (1.3), которому удовлетворяет голоморфный интеграл, перейдет в следующее:

$$A(r, \varphi)\, F_r' = \left[1 + \frac{B(r, \varphi)}{r}\right] F_\varphi' \tag{2.10}$$

В этом можно убедиться при помощи формул

$$F_x' = F_r' \cos\varphi - F_\varphi' \frac{\sin\varphi}{r}, \qquad F_y' = F_r' \sin\varphi + F_\varphi' \frac{\cos\varphi}{r}$$

Исключая из уравнения (2.10) функцию $B(r, \varphi)$ при помощи (2.9), получим

$$F_\varphi' = rA(r, \varphi)\, U(r, \varphi) \tag{2.11}$$

где функция $U(r, \varphi)$ определяется равенством (2.9), а следовательно, функции $U_k(\varphi)$ определяются равенствами (2.8).

Подставляя в равенство (2.11) вместо функций $F_\varphi'(r, \varphi)$, $A(r, \varphi)$ и $U(r, \varphi)$ их разложения по степеням переменной r и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях r, получаем бесконечную систему равенств:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial F_3(\varphi)}{\partial\varphi} = A_3(\varphi) \\
&\frac{\partial F_4(\varphi)}{\partial\varphi} = A_4(\varphi) + A_3(\varphi)\, U_1(\varphi) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\frac{\partial F_m(\varphi)}{\partial\varphi} = A_m(\varphi) + A_{m-1}(\varphi)\, U_1(\varphi) + \cdots + A_3(\varphi)\, U_{m-3}(\varphi) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Из определения функции $F_k(\varphi)$ следует, что $\partial F_k / \partial\varphi$ есть однородный многочлен степени k относительно $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$; такого же характера функции $A_k(\varphi)$. Из второго уравнения (2.12) следует, что степень многочлена $U_1(\varphi)$ в точности равна единице. Таким образом, последовательно убеждаемся для $k = 2, 3, \ldots$, что степень многочлена $U_k(\varphi)$, определяемого системой равенств (2.8), в точности равна k.

Поэтому, если система (1.1) допускает голоморфный интеграл $F(x, y)$, то каждый член $U_k(x, y)$ ряда (2.5) есть однородный многочлен степени k относительно x и y. Сходимость ряда (2.5) есть следствие равенства (2.9), из которого видно, что функцию

$$U(r, \varphi) = \left(\frac{F_r'}{r}\right) : \left(1 + \frac{B(r, \varphi)}{r}\right)$$

можно разложить в ряд, сходящийся при достаточно малых $|r|$ равномерно относительно φ. В результате получим разложение

$$U(r, \varphi) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} r^k U_k(\varphi) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$

которое при обратном переходе и декартовым координатам дает сходящийся ряд (2.5).

Таким образом, доказана лемма 2 и получены формулы, которые будут использованы в дальнейшем.

Рассмотрим дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет интегрирующий множитель уравнения (2.4):

$$(y + X)\frac{\partial U}{\partial x} - (x + Y)\frac{\partial U}{\partial y} = \left(\frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial x}\right) U \tag{2.13}$$

Подставим в уравнение (2.13) вместо U ряд вида (2.5), в котором под U_k будем понимать пока неопределенные однородные относительно x и y функции степени k, и придем, так же как и выше, к бесконечной системе уравнений вида

$$y\frac{\partial U_k(x, y)}{\partial x} - x\frac{\partial U_k(x, y)}{\partial y} = H_k(x, y) \qquad (k = 1, 2\ldots) \tag{2.14}$$

где $H_k(x, y)$ будут однородными относительно x и y функциями степени k, представляющими вместе с тем известные функции тех U_j, для которых $j < k$. Система (2.14) может служить для определения членов ряда (2.5).

Таким образом, могут быть последовательно найдены постоянные

$$g_k^* = \int_0^{2\pi} H_{2k}(\cos\varphi, \sin\varphi)\, d\varphi \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{2.15}$$

Лемма 3. *Для того чтобы все функции* $U_k(x, y)$, *определяемые системой* (2.14), *были многочленами, необходимо и достаточно, чтобы были равны нулю все постоянные* g_k^*.

Доказательство аналогично доказательству леммы 1.

Лемма 4. Для того чтобы начало координат было центром системы уравнений (1.1), *необходимо и достаточно, чтобы были равны нулю все постоянные* g_k^*.

Доказательство необходимости. Если начало координат является центром для системы (1.1), то в силу теоремы Ляпунова существует не зависящий от t голоморфный интеграл системы (1.1). Следовательно в силу леммы 2 существует не зависящий от t голоморфный интегрирующий множитель уравнения (2.4). Следовательно, в силу леммы 3 все $g_k^* = 0$.

Доказательство достаточности. Если все $g_k^* = 0$, то по лемме 3 существует ряд вида (2.5), формально удовлетворяющий уравнению (2.13). В таком случае существует ряд вида (1.2), формально удовлетворяющий уравнению (1.3), что является очевидным следствием равенств (2.8). Поэтому начало координат есть центр.

Таким образом, лемма 4 доказана.

Из сравнения формул для g_k и g_k^* видно, что последние вычисляются проще первых и этим получено некоторое упрощение вычисления постоянных, равенства которых нулю необходимо и достаточно для существования центра.

Установим зависимость между постоянными g_k и g_k^*. Из определения функций $F_k(\varphi)$ и $U_k(\varphi)$ и постоянных g_k и g_k^* следует, что

$$g_k = F_{2k+2}(0) - F_{2k+2}(2\pi)$$

$$g_k^* = U_{2k}(0) - U_{2k}(2\pi)$$

Отсюда и из равенств (2.8) следует, что

$$(2k+2)\, g_k = U_{2k}(0) + \cdots - U_{2k}(2\pi)$$

Из голоморфности X и Y следует 2π-периодичность функций $B_i(\varphi)$ Поэтому имеем

$$(2k+2)\, g_k = g_k^* + \cdots$$

Следовательно, между постоянными, входящими в множества $\{g_k\}$ и $\{g_k^*\}$, существует линейная зависимость. Эта зависимость такова, что если первый отличный от нуля элемент одного из этих множеств имеет индекс k, то первый отличный от нуля элемент другого множества имеет тот же индекс.

Для дальнейшего упрощения вычисления величин g_k и g_k^* обратимся к уравнению (2.14), соответствующему индексу $2k$, и положим в нем

$$H_{2k}(x, y) = \sum_{l=0}^{2k} a_l x^{2k-l} y^l$$

$$U_{2k}(x, y) = \sum_{l=0}^{2k} b_l x^{2k-l} y^l$$

считая a_l известными, а b_l неизвестными числами.

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях k, придем к системе уравнений, которую рассмотрим в виде двух подсистем:

$$\begin{array}{rr}
2kb_0 - 2b_2 = a_1, & -b_1 = a_0 \\
(2k-2)\,b_2 - 4b_4 = a_3 & (2k-1)\,b_1 - 3b_3 = a_2 \\
\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\
4b_{2k-4} - (2k-2)\,b_{2k-2} = a_{2k-3}, & 3b_{2k-3} - (2k-1)\,b_{2k-1} = a_{2k-2} \\
2b_{2k-2} - 2k\,b_{2k} = a_{2k-1}, & b_{2k-1} = a_{2k}
\end{array} \tag{2.16}$$

Первая из них всегда совместна. Она состоит из k уравнений и содержит $k+1$ неизвестных, которые могут быть определены, например, последовательно в порядке возрастания индекса при произвольном b_0. Вторая подсистема, вообще говоря, несовместна. Она состоит из $k+1$ уравнений и содержит k неизвестных.

Лемма 5. *Для того чтобы система* (2.16) *была совместна и тем самым существовал многочлен* $U_{2k}(x, y)$, *удовлетворяющий соответствующему уравнению системы* (2.14), *необходимо и достаточно, чтобы была равна нулю величина*

$$g_k^\circ = (a_0 + a_{2k})\,(2k-1)!! + (a_2 + a_{2k-2})\,(2k-3)!!\,1\,!! +$$
$$+ (a_4 + a_{2k-4})\,(2k-5)\,!!\,3\,!! + \cdots \tag{2.17}$$

Действительно, если умножить каждое равенство системы (2.16) на соответствующий множитель, входящий в правую часть формулы (2.17), то получим слева нуль, а справа g_k°. Таким образом, доказана необходимость.

Если $g_k^\circ(a_0, \dots, a_{2k}) = 0$, то между левыми частями системы (2.16), записанной в виде

$$\begin{array}{llll}
f_0 \equiv & & -\;\; b_1 - a_0 & = 0 \\
f_1 \equiv (2k-1)\,b_1 & & -3b_3 - a_2 & = 0 \\
\dots\dots\dots & \dots\dots & \dots\dots\dots & \\
f_k \equiv & b_{2k-1} & -\,a_{2k} & = 0
\end{array}$$

существует линейная зависимость. Действительно,

$$g_k^\circ(f_0, \dots, f_k) = -\,g_k^\circ(a_0, \dots, a_{2k}) = 0$$

Поэтому одно из уравнений системы (2.16) есть следствие остальных. Эти остальные уравнения образуют совместную систему, потому что определитель системы (2.16), отличен от нуля. Он имеет вид:

$$\begin{vmatrix}
-1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
2k-1 & -3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 2k-3 & -5 & \dots & 0 & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & \dots & 3 & -(2k-1)
\end{vmatrix} = (-1)^k\,(2k-1)!!$$

Таким образом, лемма 5 доказана.

Примечание. Между элементами множеств $\{g_k\}$, $\{g_k{}^*\}$, $\{g_k{}^\circ\}$ существуют известные линейные зависимости. Эти зависимости таковы, что если первый отличный от нуля элемент одного из этих множеств имеет индекс k, то первые отличные от нуля элементы в двух других множествах будут иметь тот же индекс.

§ 3. Еще один подход к решению задачи. Известно [2], что Ляпунов при исследовании системы более общего вида, нежели система (1.1), в связи с решением задачи, более общей, чем проблема центра и фокуса преобразует систему дифференциальных уравнений к полярным координатам r и φ, затем полагает в преобразованной системе

$$r = \sum_{k=1}^{\infty} c^k V_k(\varphi) \tag{3.1}$$

и, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях c, приходит к бесконечной системе уравнений, которая служит для определений функций $V_k(\varphi)$. Если при этом все функции $V_k(\varphi)$ могут быть выбраны 2π-периодическими, то исходная система допускает не зависящий от t голоморфный интеграл. В противном случае такой интеграл не существует.

При практическом использовании описанного порядка действий встречается затруднение, которое состоит в необходимости возвышения в целые положительные степени ряда (3.1). Нижеизложенный подход к решению проблемы центра и фокуса свободен от этого практического неудобства.

Пусть дана система (1.1) с голоморфными правыми частями. Преобразуем соответствующее ей уравнение (1.3) к полярным координатам, положив $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Принимая во внимание равенства

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial r}\cos\varphi - \frac{\partial F}{\partial \varphi}\frac{\sin\varphi}{r}, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial r}\sin\varphi + \frac{\partial F}{\partial \varphi}\frac{\cos\varphi}{r}$$

и обозначая

$$A(r,\varphi) = X(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cos\varphi - Y(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\sin\varphi$$

$$B(r,\varphi) = X(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\sin\varphi + Y(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cos\varphi$$

получим уравнение, которому удовлетворяет интеграл системы (1.1):

$$A(r,\varphi)\frac{\partial F}{\partial r} = \left[1 + \frac{1}{r}B(r,\varphi)\right]\frac{\partial F}{\partial \varphi} \tag{3.2}$$

Если в уравнение (3.2) подставить ряды

$$A = \sum_{k=2}^{\infty} r^k A_{k+1}(\varphi), \qquad B = \sum_{k=2}^{\infty} r^k B_{k+1}(\varphi), \qquad F = \sum_{k=2}^{\infty} r^k F_k(\varphi)$$

в которых $A_{k+1}(\varphi)$ и $B_{k+1}(\varphi)$ суть известные однородные относительно $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ многочлены степени $k+1$, и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях r, то получим бесконечную систему дифференциальных уравнений, которая может служить для определения функций $F_k(\varphi)$. Если при этом все $F_k(\varphi)$ могут быть выбраны 2π-периодическими, то система (1.1) допускает не зависящий от t голоморфный интеграл, а особая точка является центром.

В противном случае такой интеграл не существует.

Аналогичное рассуждение можно привести для уравнения (2.13) и сформулировать условия существования не зависящего от t голоморфного интегрирующего множителя для уравнения (2.4).

Из уравнения (3.2) между прочим следует, что система уравнений (1.1) допускает голоморфный интеграл вида $F(x^2+y^2)$ только при условии $X(x, y)\,y - Y(x, y)\,x \equiv 0$, потому что тождество $\partial F / \partial\varphi \equiv 0$ имеет место только при условии $A(r, \varphi) \equiv 0$.

Пример. Пусть $X(x, y)$ и $Y(x, y)$ — однородные относительно x и y многочлены степени $n+1$ $(n \geqslant 1)$, удовлетворяющие условиям

$$Xy + Yx \equiv 0, \qquad \int\limits_0^{2\pi} \frac{X(\cos\varphi, \sin\varphi)}{\cos\varphi}\, d\varphi = 0 \tag{3.3}$$

Докажем, что тогда особая точка $x = y = 0$ системы (1.1) является центром.

Из однородности X и Y следует, что $A(r, \varphi) = r^{n+1} a(\varphi)$, где $a(\varphi)$ — известный однородный многочлен относительно $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$. Из условия (3.3) следует, что $B(r, \varphi) \equiv 0$ и что в силу определения $A(r, \varphi)$ и $B(r, \varphi)$ подинтегральная функция, находящаяся в левой части равенства (3.3), равна $a(\varphi)$; поэтому степень однородности $a(\varphi)$ относительно $\cos(\varphi)$ и $\sin\varphi$ равна n

Подставляя в уравнение (3.2) ряд $F = r^2F_2(\varphi) + r^3F_3(\varphi) + \cdots$ и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях r, приходим к системе, с помощью которой можно последовательно найти все $F_k(\varphi)$, причем они будут функциями 2π-периодическими. Действительно, положим

$$F_2 = 1, \qquad F_3 = F_4 = \cdots = F_{n+1} = 0$$

так как для них $dF_k / d\varphi = 0$. Тогда для всех $k \neq ln + 2$ $(l = 0, 1, 2, \ldots)$ можно считать $F_k(\varphi) \equiv 0$, и для остальных значений k функции $F_k(\varphi)$ определяются системой

$$\frac{dF_{ln+2}}{d\varphi} = (ln - n + 2)\, a(\varphi)\, F_{ln-n+2}$$

Существование 2π-периодической функции $F_{n+2}(\varphi)$ гарантировано вторым из условий (3.3), которому можно придать вид:

$$\int\limits_0^{2\pi} a(\varphi)\, d\varphi = 0$$

Остальные функции $F_k(\varphi)$ (для $k = ln + 2$) будут пропорциональны целым положительным степеням $F_{n+2}(\varphi)$, в чем можно убедиться методом математической индукции.

Следовательно, существует голоморфный интеграл $F(x, y)$ такой, что разность $F(x, y) - F_2(x, y)$ может быть разложена в ряд по целым положительным степеням многочлена $F_{n+2}(x, y)$. Поэтому особая точка $x = y = 0$ системы уравнений (1.1) является центром.

Примечание к примеру. Если X и Y — однородные относительно x и y многочлены четной степени, удовлетворяют первому из условий (3.3), то второе условие (3.3) выполняется в силу того, что $a(\varphi)$ будет однородным многочленом нечетной степени относительно $\cos(\varphi)$ и $\sin\varphi$. В этом случае мы приходим к известному [2] признаку Ляпунова: если $X(x, y) = x\,U(x, y)$ и $Y(x, y) = -\,y\,U(x, y)$, где $U(y, x)$ — целая однородная функция нечетной степени, то система (1.1) допускает не зависящий от t голоморфный интеграл.

§ 4. Достаточные признаки существования центра. В § 2 установлено, что для того чтобы особая точка $x = y = 0$ системы (1.1) была центром, необходимо и достаточно, чтобы уравнение (2.4) допускало интегрирующий множитель вида (2.5). Простейшим интегрирующим множителем такого вида, отличным от единицы, может быть функция

$$U(x, y) = 1 + U_n(x, y) \tag{4.1}$$

где $U_n(x, y)$ — однородный относительно x и y многочлен степени n. Ниже установлено условие существования интегрирующего множителя вида (4.1). Это условие будет вместе с тем достаточным для того, чтобы особая точка $x = y = 0$ системы (1.1) была центром.

Пусть дана система (1.1), правые части которой представлены в виде рядов, расположенных по однородным относительно x и y многочленам X_j и Y_j, так что

$$X = \sum_{j=1}^{\infty} X_{jn+1}, \qquad Y = \sum_{j=1}^{\infty} Y_{jn+1} \tag{4.2}$$

где n — некоторое целое число, не меньшее единицы.

Предположим, что соответствующее уравнение (2.4) допускает интегрирующий множитель вида (4.1). Подставив вместо U выражение (4.1) в уравнение (2.13), мы придем, так же как в § 2, к системе (2.14), из которой следует, что функция $U_n(x, y)$ необходимо удовлетворяет системе уравнений

$$y\frac{\partial U_n}{\partial x} - x\frac{\partial U_n}{\partial y} = Z_n, \qquad Y\frac{\partial U_n}{\partial y} - X\frac{\partial U_n}{\partial x} = Z_n - Z(1 + U_n) \tag{4.3}$$

где

$$Z = \sum_{k=1}^{\infty} Z_{kn}, \qquad Z_i = \frac{\partial Y_{i+1}}{\partial y} - \frac{\partial X_{i+1}}{\partial x} \tag{4.4}$$

Из системы (4.3) следует

$$(xX - yY)\frac{\partial U_n}{\partial x} = -(x + Y)Z_n + xZ(1 + U_n)$$

$$(xX - yY)\frac{\partial U_n}{\partial y} = -(y + X)Z_n + yZ(1 + U_n)$$

Умножая первое уравнение на x, второе на y и принимая во внимание формулу Эйлера об однородных функциях, получаем в результате сложения конечное уравнение относительно U_n:

$$[n(xX - yY) - (x^2 + y^2)Z]U_n = (x^2 + y^2)(Z - Z_n) - Z_n(xY + yX)$$

Отсюда следует теорема.

Теорема 1. Пусть дана система (1.1) при условии (4.2). Если функция

$$U_n = \frac{(x^2 + y^2)(Z - Z_n) - (yX + xY)Z_n}{n(xX - yY) - (x^2 + y^2)Z}$$

где Z и Z_n определены формулами (4.4), является однородным многочленом степени n, удовлетворяющим системе (4.3), то особая точка $x = y = 0$ системы (1.1) является центром.

Аналогично может быть доказано следующее утверждение. Пусть дана система (1.1) при условии (4.2). Если функция

$$V_n = -\frac{(x^2+y^2)(Z - Z_n) - (yX + xY) Z_n}{n(xX - yY) + (x^2+y^2) Z}$$

где Z и Z_n определены формулами (4.4), является однородным многочленом степени n, удовлетворяющим системе

$$x\frac{\partial V_n}{\partial y} - y\frac{\partial V_n}{\partial x} = Z_n, \quad X\frac{\partial V_n}{\partial x} - Y\frac{\partial V_n}{\partial y} = -Z(1 + V_n) + Z_n$$

то особая точка $x = y = 0$ системы (1.1) является центром. В этом случае уравнение (2.4) допускает интегрирующий множитель вида

$$U = \frac{1}{1 + V_n}$$

где V_n — однородный многочлен степени n относительно x и y.

Теорема 2. Если X и Y — голоморфные в точке $x = y = 0$ функции, в разложении которых в ряды по целым положительным степеням величин x и y отсутствуют линейные и свободные члены, и $X(y, x) = Y(x, y)$, то особая точка $x = y = 0$ системы (1.1) есть центр.

Для доказательства введем в уравнение (1.1) вместо x и y переменные x_1 и y_1, положив $x = x_1 - y_1$, $y = x_1 + y_1$. В результате такого преобразования получим систему

$$\frac{d(x_1 - y_1)}{dt} = \quad x_1 + y_1 + X(x_1 - y_1,\ x_1 + y_1)$$

$$\frac{d(x_1 + y_1)}{dt} = -x_1 + y_1 - Y(x_1 - y_1,\ x_1 + y_1)$$

определяющее уравнение которой имеет чисто мнимые корни. Эта система не меняется при замене y_1 на $-y_1$, а t на $-t$. Лупунов[2] доказал, что система, обладающая этими свойствами, допускает не зависящий от t интеграл, представляющий голоморфную функцию величин $x + y$ и $(x - y)^2$. Следовательно, особая точка $x = y = 0$ является центром. Впрочем, последнее очевидно из геометрических соображений: поле траекторий имеет ось симметрии, проходящую через особую точку.

Теорема 3. Если X и Y — голоморфные функции, в разложениях которых в ряд по целым положительным степеням величин x и y отсутствуют члены нечетного измерения, и $X(y, x) = -Y(x, y)$, то особая точка $x = y = 0$ системы (1.1) есть центр.

Для доказательства преобразуем систему (1.1), положив $x = -y_1$, $y = x_1$. При этом получим систему вида (1.1), для которой выполнено условие симметрии поля траекторий относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов системы $x_1 y_1$.

Действительно, в результате такого преобразования системы получим

$$\frac{dx_1}{dt} = y_1 - Y(-y_1, x_1), \qquad \frac{dy_1}{dt} = -x_1 - X(-y_1, x_1)$$

Обозначим

$$X_1(x_1, y_1) = -Y(-y_1, x_1), \qquad Y_1(x_1, y_1) = X(-y_1, x_1)$$

Убедимся, что последняя система уравнений удовлетворяет условиям теоремы 2, т. е. имеет место тождество $X_1(y_1, x_1) = Y_1(x_1, y_1)$.

В силу введенных обозначений и данного условия кососимметрии имеем равенства

$$X_1(y_1, x_1) = -Y(-x_1, y_1) = X(y_1, -x_1), \qquad Y_1(x_1, y_1) = X(-y_1, x_1)$$

Правые части двух последних равенств равны между собой, так как в многочлене четной степени относительно x_1 и y_1 замена x_1 на $-x_1$ приводит к тому же результату, как и замена y_1 на $-y_1$, потому что в результате таких замен члены, содержащие только четные степени x_1 и y_1, не меняются, а остальные члены меняют только знак.

Следовательно, на основании теоремы 2 особая точка $x = y = 0$ системы (1.1) есть центр.

Теорема 4. Если X и Y — однородные относительно x и y многочлены степени $n + 1 > 1$, а m — отличное от нуля произвольное постоянное вещественное число, то характер особой точки $x = y = 0$ системы

$$\frac{dx}{dt} = y + mX, \qquad \frac{dy}{dt} = -x - mY \tag{4.5}$$

не зависит от величины m.

Другими словами, качественная картина поведения интегральных кривых в окрестности особой точки $x = y = 0$ не меняется при изменении величины m в том смысле, что если при некотором значении m имел место центр (фокус), то и при любом значении m будет иметь место центр (соответственно фокус).

Для доказательства подставим в уравнение

$$(y + mX)\frac{\partial F^{(m)}}{\partial x} - (x + mY)\frac{\partial F^{(m)}}{\partial y} = 0 \tag{4.6}$$

вместо $F^{(m)}$ ряд

$$F^{(m)}(x, y) = \sum_{k=2}^{\infty} F_k^{(m)}(x, y) \tag{4.7}$$

где $F_k^{(m)}(x, y)$ — однородные функции степени k относительно x и y, и приравняем нулю однородные формы, которые получатся при этом в левой части равенства (4.6). В результате получим систему, которая может служить для определения членов ряда (4.7)

$$y\frac{\partial F_k^{(m)}(x, y)}{\partial x} - x\frac{\partial F_k^{(m)}(x, y)}{\partial y} = R_k^{(m)}(x, y) \qquad (k = 2, 3, \ldots) \tag{4.8}$$

где $R_k^{(m)}(x, y) \equiv 0$ при $k < n+2$, а остальные $R_k^{(m)}(x, y)$ определяются формулой

$$R_k^{(m)}(x, y) = mY(x, y)\frac{\partial F_{k-n}^{(m)}(x, y)}{\partial y} - mX(x, y)\frac{\partial F_{k-n}^{(m)}(x, y)}{\partial x} \qquad (4.9)$$

Поэтому, если $k \neq ln+2$ $(l = 0, 1. 2, \ldots)$, то соответственно $F_k^{(m)}(x, y)$ можно выбрать тождественно равными нулю, и если $k = ln+2$, то функции $F_k^{(m)}(x, y)$ необходимо удовлетворяют системе (4.8), причем они не будут обращаться в нуль тождественно. Из рассмотрения системы (4.8) при $m = 1$ и при произвольном значении m следует, что если ряд (4.7) при $m = 1$ формально удовлетворяет уравнению (4.6) при $m = 1$, то ряд

$$F^{(m)}(x, y) = \sum_{l=0}^{\infty} m^l F_{ln+2}^{(1)}(x, y) \qquad (4.10)$$

формально удовлетворяет уравнению (4.6) при любом m, потому что

$$F_{ln+2}^{(m)}(x, y) = m^l F_{ln+2}^{(1)}(x, y) \qquad (4.11)$$

. Если особая точка системы (4.5) при $m = 1$ является центром, то в силу теоремы Ляпунова существует не зависящий от t голоморфный интеграл системы (1.1). Следовательно, ряд (4.10) представляет не зависящий от t голоморфный интеграл системы (4.5), потому что члены ряда (4.10) — многочлены, ряд (4.10) формально удовлетворяет уравнению (4,6) и ряд (4.10) сходится, что доказано Ляпуновым. Поэтому особая точка $x = y = 0$ является центром для системы (4.5).

Если особая точка системы (4.5) при $m = 1$ является фокусом, то среди неголоморфных членов ряда (4.7) при $m = 1$ существует член с наименьшим индексом $F_{pn+2}^{(1)}(x, y)$. Следовательно, для системы (4.5) начало координат также является фокусом, потому что среди членов ряда (4.7), соответствующего системе (4.5), имеется неголоморфный член с индексом $pn+2$, что видно из формулы (4.11) при $l = p$. Отсюда следует теорема 4.

Поступила 23 V 1950

ЛИТЕРАТУРА

1. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. ГИТТЛ. 1949.
2. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. ОНТИ. 1935.