

## О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ И КАЧЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЦЕЛОМ

Н. П. Еругин

(Ленинград)

В заметке <sup>[1]</sup> М. А. Айзерман поставил следующий вопрос:  
Дана система «линейных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + a x_k, \quad \frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \quad (i = 2, 3, \dots, n) \quad (0.1)$$

Пусть при заданных постоянных  $a_{pj}$  ( $p, j = 1, \dots, n$ ) и любом значении  $a$  из некоторого промежутка  $\alpha < a < \beta$  все корни характеристического уравнения системы (0.1) имеют отрицательные действительные части.

Требуется доказать или опровергнуть утверждение: «Для любого промежутка  $(\alpha, \beta)$ , для которого при  $\alpha < a < \beta$  соблюдается условие отрицательности действительных частей корней характеристического уравнения системы (0.1), и для любой однозначной непрерывной функции  $f(x)$ , удовлетворяющей условиям

$$\begin{aligned} \text{а) } & \alpha x < f(x) < \beta x \quad \text{при всех } x \neq 0 \\ \text{б) } & f(0) = 0 \end{aligned} \quad (0.2)$$

и система

$$\frac{dx_1}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{1j} x_j + f(x_k), \quad \frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \quad (0.3)$$

единственным состоянием равновесия которой является, очевидно, начало координат  $x_1 = \dots = x_n = 0$ , будет иметь в начале координат устойчивое состояние равновесия и область его притяжения охватывает все фазовые пространства системы (0.3), т. е.  $-\infty < x_i < \infty$  ( $i = 1, \dots, n$ )».

Ссылаясь на свои исследования, М. А. Айзерман отмечает, что «по второму методу Ляпунова можно подобрать такие промежутки  $(\alpha', \beta')$ , что утверждение справедливо, если  $f(x)$  удовлетворит условию  $\alpha' x < f(x) < \beta' x$ ,  $f(0) = 0$ .

Однако эти промежутки  $\alpha', \beta'$  обычно составляют лишь часть того промежутка изменения  $a$ , при котором действительные части корней характеристического уравнения системы (0.1) остаются отрицательными, т. е. для этих подобранных промежутков  $\alpha < \alpha' < \beta' < \beta$ .

В настоящей работе указывается несколько методов решения этой проблемы. При этом рассматривается система двух уравнений, хотя многие из этих методов применимы и для системы  $n$  уравнений. Заметим, что как система  $n$  уравнений, так и случай системы двух уравнений, но в более общей постановке задачи требует особого рассмотрения.

Настоящая работа состоит из двух частей. Первая содержит развитие общей теории о поведении интегральных кривых в целом. Вторая часть относится к задаче, поставленной М. А. Айзерманом, хотя и здесь можно было бы выделить некоторые рассуждения в главу первую, так как она носит на самом деле

гораздо более общий характер, чем это может показаться в ее применении к указанной задаче. Предварительно сделаем несколько замечаний.

Записывая условие (0.2), относящееся к системе (0.3), М. А. Айзерман, повидному, имел в виду на самом деле следующее:

$$\alpha x < f(x) < \beta x \quad (x > 0), \quad \alpha x > f(x) > \beta x \quad (x < 0) \quad (0.4)$$

или

$$\alpha x^2 < xf(x) < \beta x^2 \quad (x \neq 0) \quad (0.5)$$

Эти условия будем предполагать всякий раз выполненными, рассматривая вопрос об асимптотической устойчивости решения  $x_1 = \dots = x_n = 0$  системы (0.3).

Пусть дана система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \quad (0.6)$$

где  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  — непрерывные функции в области  $D$ .

Известна теорема [2]: Если система (0.6) имеет решение  $x(t) \rightarrow x_0$  и  $y(t) \rightarrow y_0$  при  $t \rightarrow \infty$  и точка  $(x_0, y_0)$  принадлежит области  $D$ , то  $P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = 0$ , т. е.  $(x_0, y_0)$  есть точка равновесия системы (0.6).

Легко доказать и следующее утверждение.

Если система (0.6) имеет решение  $x(t), y(t)$ , входящее в точку  $(x_0, y_0)$  при  $t \rightarrow T$  (конечное), то либо  $P^2(x_0, y_0) + Q^2(x_0, y_0) \neq 0$ , либо в точке  $(x_0, y_0)$  нарушена теорема единственности (см. [3], стр. 194).

Может случиться, что для системы (0.3) выполнены условия (0.4) и решение  $x_i(t)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) входит в начало координат в конечный промежуток времени.

Пример. Дано уравнение

$$\frac{dx}{dt} = -ax + f(x) \quad (a > 0) \quad (0.7)$$

Здесь условия (0.4) запишутся следующим образом:

$$f(x) < ax \quad (x > 0), \quad f(x) > ax \quad (x < 0)$$

В частности, можно взять

$$f(x) = ax - \sqrt{x} \quad (x > 0), \quad f(x) = ax + \sqrt{|x|} \quad (x < 0)$$

Следовательно, уравнение (0.7) запишется так:

$$\frac{dx}{dt} = -\sqrt{x} \quad (x > 0), \quad \frac{dx}{dt} = \sqrt{|x|} \quad (x < 0) \quad (0.8)$$

Решение будет  $x \equiv 0$  и соответственно

$$x = \frac{(c-t)^2}{4} \quad (x > 0), \quad x = -\frac{(c-t)^2}{4} \quad (x < 0) \quad (0.9)$$

Первое из этих решений для  $x > 0$  удовлетворяет начальному условию  $x = c^2/4$  при  $t = 0$ . Но это решение обладает свойством  $x \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow c$ .

При  $t > c$  функция  $x = (c-t)^2/4$  не является решением первого уравнения (0.8). Действительно, имеем

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{(c-t)}{2} > 0 \quad \text{при } t > c$$

а должно быть  $dx/dt < 0$  согласно (0.8). Следовательно,  $x \equiv 0$  при  $t > c$ . Здесь в точке  $x = 0$  нарушена теорема единственности.

Такие случаи из рассмотрения будем исключать, т. е. будем предполагать для системы (0.3) или для системы (0.6) выполненными условия теоремы существования и единственности в любой конечной области.

## I. Вопросы поведения интегральных кривых в большом

§ 1. Мы будем рассматривать систему

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \quad (1.1)$$

где функции  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  удовлетворяют условию Липшица во всякой конечной области и всякое решение этой системы определено для всех конечных значений  $t$ . (Это требование выполняется, например, при условиях (0.4) для уравнений (0.3), см. [2], теорему 3 гл. 1.)

В дальнейшем нам потребуется теорема 1 Бендиксона [3]. Пусть

$$x = x(t - t_0, x_0, y_0), \quad y = y(t - t_0, x_0, y_0) \quad (1.2)$$

суть уравнения характеристики, которая при  $t_0 \leq t \leq T$  расположена в конечной области, и пусть

$$\bar{x} = \bar{x}(t - t_0, \bar{x}_0, \bar{y}_0), \quad \bar{y} = \bar{y}(t - t_0, \bar{x}_0, \bar{y}_0) \quad (1.3)$$

суть уравнения другой характеристики, которая при  $t = t_0$  проходит через точку  $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$ , близкую к точке  $(x_0, y_0)$ . Тогда, как бы мало ни было число  $\delta$ , можно всегда найти такое положительное число  $\varepsilon$ , чтобы при  $t_0 \leq t \leq T$  выполнялись неравенства

$$|\bar{x} - x| < \delta, \quad |\bar{y} - y| < \delta \quad (1.4)$$

если только

$$|\bar{x}_0 - x_0| < \varepsilon, \quad |\bar{y}_0 - y_0| < \varepsilon \quad (1.5)$$

В дальнейшем через  $x = x(C_n, t)$ ,  $y = y(C_n, t)$  будем обозначать траекторию, проходящую через точку  $C_n(x_n, y_n)$  в момент  $t = t_0$ .

Иногда, говоря об этом решении, мы будем писать просто  $M(C_n, t)$  или даже  $M(t)$ , если нас не интересует начальная точка.

**Теорема 1.1.** Если движение  $x = 0$ ,  $y = 0$  положительно устойчивое в смысле Ляпунова, то не существует движение, входящее в точку равновесия  $(0, 0)$  при  $t \rightarrow -\infty$ .

**Доказательство.** Действительно, как бы близко от точки  $(0, 0)$  мы ни взяли начальную точку решения траектории, входящей в начало координат при  $t \rightarrow -\infty$ , она удалится на конечное расстояние от начала координат при  $t \rightarrow \infty$ .

**Теорема 1.2.** Предположим, что:

- 1) движение  $x = 0$ ,  $y = 0$  устойчиво в смысле Ляпунова;
- 2) кроме  $(0, 0)$ , нет точек равновесия;
- 3) периодических решений нет.

Тогда всякое движение  $M(t)$  уходит в бесконечность при  $t \rightarrow -\infty$ .

**Доказательство.** По теореме 1.1 невозможно, чтобы  $x \rightarrow 0$  и  $y \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow -\infty$ . В ограниченной области оставаться при  $t \rightarrow -\infty$  движение не может, так как, кроме  $(0, 0)$ , нет точек равновесия, а также замкнутых решений. По теореме 4 Бендиксона [3] движение  $M(t)$  уходит в бесконечность при  $t \rightarrow -\infty$

**Теорема 1.3.** Предположим, что:

- 1) точка  $(0,0)$  — единственная точка равновесия;
- 2) невозмущенное движение  $x=0, y=0$  асимптотически устойчивое и, следовательно, движения, начинающиеся в некоторой области  $(\varepsilon)$ :

$$(x^2 + y^2 \leq \varepsilon) \quad (1.6)$$

обладают свойством

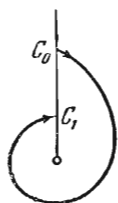
$$x(t) \rightarrow 0, \quad y(t) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \rightarrow \infty \quad (1.7)$$

- 3) прямая  $L(0, \infty)$ , уходящая в бесконечность из точки  $(0,0)$ , пересекается движениями в одном направлении при  $t \rightarrow \infty$ ;
- 4) движения, имеющие ограниченный полярный угол, ограничены;
- 5) периодических решений нет.

Тогда все движения обладают свойством (1.7).

*Доказательство.* Пусть  $M(t)$  — некоторое движение. Если полярный угол этого движения ограничен, то оно ограничено и, следовательно, входит в точку равновесия  $(0,0)$ .

Предположим, что полярный угол  $\varphi$  увеличивается больше, чем на  $2\pi$ .



Рассмотрим первый виток (фиг. 1) движения вокруг точки  $(0,0)$  пересекающий прямую  $L(0, \infty)$  в точках  $C_0$  и  $C_1$  при возрастающем  $t$ . Если  $C_1$  ближе к точке  $(0,0)$ , чем  $C_0$ , то далее при  $t \rightarrow \infty$  в силу условия 3 теоремы движение остается в ограниченной области  $(C_0, C_1, C_0)$ . Оно

обладает, следовательно, на основании условий 1 и 5 свойством (1.7).

Если  $C_1$  дальше от точки  $(0,0)$ , чем  $C_0$ , то рассмотрим полутраекторию при  $t \rightarrow -\infty$ . Эта полутраектория по тем же соображениям, что и выше, обладает свойством  $x \rightarrow 0$  и  $y \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow -\infty$ .

Но войдя при этом в область  $(\varepsilon)$ , она не может обладать свойством (1.7), что противоречит условию 2.

Следовательно, второй случай невозможен и теорема доказана.

**Теорема 1.4.** Пусть некоторое движение  $x = x(C, t)$ ,  $y = y(C, t)$  системы (1.1) приближается к точке равновесия  $(0,0)$  по спирали.

Тогда не существует движение, которое приближалось бы к точке  $(0,0)$ , оставаясь, начиная с некоторого момента  $t$ , в секторе  $(\varphi)$ .

*Доказательство.* Действительно, пусть некоторая интегральная кривая  $x = x(C_0, t)$ ,  $y = y(C_0, t)$  входит в точку  $(0,0)$ , оставаясь в секторе  $(\varphi)$  при  $t > t_1$ . Так как этот сектор пересекается движением  $x = x(C, t)$ ,  $y = y(C, t)$  в как угодно малой окрестности точки  $(0,0)$ , то интегральные кривые  $x = x(C, t)$ ,  $y = y(C, t)$  и  $x = x(C_0, t)$ ,  $y = y(C_0, t)$  пересекаются, что противоречит теореме единственности.

**Теорема 1.5.** Пусть некоторое движение  $x = x(C, t)$ ,  $y = y(C, t)$  приближается к точке  $(0,0)$  с ограниченным полярным углом  $\varphi$ .

Тогда нет движения, которое приближалось бы к точке равновесия  $(0,0)$  по спирали.

*Доказательство.* Эта теорема следует из теоремы 1.4.



**Теорема 1.6.** Предположим, что:

- 1) система (1.1) имеет единственную точку равновесия  $(0, 0)$ ;
- 2) решения этой системы обладают свойством (1.7), когда начальные значения  $(x_0, y_0)$  взяты из области  $(\varepsilon)$ , определенной (1.6).

Тогда существует  $(\delta)$  окрестность замкнутой области  $(\varepsilon)$  такая, что если точка  $C_0(x_0, y_0)$  взята из этой  $(\delta)$  окрестности, то решение  $x = x(C_0, t)$ ,  $y = y(C_0, t)$  системы (1.1) обладает свойством (1.7).

*Доказательство.* Возьмем точку  $C_1(x_1, y_1)$  на границе области  $(\varepsilon)$ . Тогда существует окрестность этой точки  $(\delta_1)$ , выходящая за область  $(\varepsilon)$ :

$$(\delta_1) \quad (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 \leq \delta_1 \quad (1.8)$$

такая, что если точка  $C_0(x_0, y_0)$  взята из этой окрестности  $(\delta_1)$ , то решение  $x = x(C_0, t)$ ,  $y = y(C_0, t)$  входит в область  $(\varepsilon)$  и, следовательно, обладает свойством (1.7). Существование такой области  $(\delta_1)$  вытекает непосредственно из теоремы 1 Бендиксона, так как решение  $x = x(C_1, t)$ ,  $y = y(C_1, t)$  по построению области  $(\varepsilon)$  обладает свойством (1.7).

Пусть теперь  $B(x^{(0)}, y^{(0)})$  есть множество точек, для которых решения  $x = x(C^{(0)}, t)$ ,  $y = y(C^{(0)}, t)$  не обладают свойством (1.7).

Из предыдущего следует, что расстояние между множеством  $B(x^{(0)}, y^{(0)})$  и множеством граничных точек области  $(\varepsilon)$  отлично от нуля. Действительно, пусть существует последовательность точек  $(x_n^{(0)}, y_n^{(0)})$  из множества  $B(x^{(0)}, y^{(0)})$ , стремящаяся к граничной точке  $(x_1, y_1)$  области  $(\varepsilon)$ . Тогда мы получим противоречие с тем, что существует область (1.8), обладающая указанным выше свойством. Теорема 1.6 доказана.

**Теорема 1.7.** Предположим, что

$$x(t) \rightarrow \infty, \quad y(t) \rightarrow \infty \quad \text{при } t \rightarrow \infty \quad (1.9)$$

когда начальные значения  $(x_0, y_0)$  взяты из области

$$x^2 + y^2 \geq \varepsilon > 0 \quad (1.10)$$

Тогда существует окрестность  $(\delta)$  множества точек (1.10) такая, что движения, начинающиеся в области  $(\delta)$ , обладают свойством (1.9).

*Доказательство* аналогично доказательству предыдущей теоремы.

**Теорема 1.8.** Предположим, что существуют две области:

$$(\varepsilon_1) \quad x^2 + y^2 \leq \varepsilon_1, \quad (\varepsilon_2) \quad x^2 + y^2 \geq \varepsilon_2 > 0$$

где  $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$  также, что движения, начинающиеся в области  $(\varepsilon_1)$  и  $(\varepsilon_2)$ , обладают соответственно свойством (1.7) или (1.9).

Тогда существует замкнутая интегральная кривая, окружающая точку  $(0, 0)$  и лежащая в кольце между областями  $(\varepsilon_1)$  и  $(\varepsilon_2)$ <sup>1</sup>.

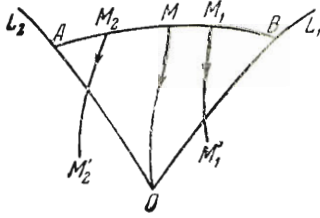
*Доказательство.* Пусть  $(\delta_1)$  и  $(\delta_2)$  — области, прилегающие соответственно к областям  $(\varepsilon_1)$  и  $(\varepsilon_2)$ , такие, что движения, начинающиеся в них, обладают свойствами (1.7) или (1.9). Предположим, что существует замкнутая кривая  $L$ , которая является общей границей областей  $(\delta_1)$  и  $(\delta_2)$ .

<sup>1</sup> Можно требовать только, чтобы решения  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  входили в область  $(\varepsilon)$  при возрастающем  $t$ .

Тогда кривая  $L$  есть интегральная кривая. Действительно, пусть  $(x_0, y_0)$  есть точка кривой  $L$ . Проведем через нее решение  $l$ . Решение  $l$  не может сойти с кривой  $L$ , так как если, например,  $l$  входит в область  $(\delta_1)$ , то все решения, начинающиеся в некотором круге с центром в точке  $(x_0, y_0)$ , обладают свойством (1.7), что невозможно, так как в малой окрестности точки  $(x_0, y_0)$  есть такие точки, что движения, начинающиеся в них, обладают свойством (1.9). Следовательно,  $l$  проходит по кривой  $L$ .

*Замечание.* Если  $L$  не содержит точек равновесия, то  $L$  есть периферическое решение. В случае, когда области  $(\delta_1)$  и  $(\delta_2)$  не имеют общей границы, отдельно граница области  $(\delta_1)$  и граница области  $(\delta_2)$  будут интегральными кривыми.

§ 2. Теорема 2.1. Пусть точка  $(0, 0)$  является точкой равновесия системы (1.1), а кривые  $L_1$  и  $L_2$ , проходящие через эту точку (фиг. 2), и пересекающая их кривая  $AB$  образуют область  $OAB$ . Предположим, что:



Фиг. 2

- 1) область  $OAB$  не содержит, кроме  $(0, 0)$ , точек равновесия системы (1.1);
- 2) существуют две точки  $M_1$  и  $M_2$  на кривой  $AB$  такие, что движения, проходящие через них, пересекают соответственно кривые  $L_1$  и  $L_2$  при возрастании  $t$ ;
- 3) движения, пересекающие кривую  $AB$  между точками  $M_1$  и  $M_2$ , входят в область  $(OAB)$  при увеличении  $t$ ;
- 4) участки кривых  $OA$  и  $OB$  пересекаются движениями.

Тогда существует точка  $M$  на кривой  $AB$  между  $M_1$  и  $M_2$  такая, что движение, проходящее через нее, входит в точку  $(0, 0)$  при  $t \rightarrow \infty$ .

*Доказательство.* Пусть  $M_2'$  есть точка, которой достигает движение, проходящее через точку  $M_2$ , в конечный отрезок времени после пересечения кривой  $L_2$ . Тогда по теореме 1 Бендиксона всякое движение, проходящее справа от точки  $M_2$  через кривую  $AB$  в достаточной близости от  $M_2$ , также пересечет кривую  $L_2$  в конечный отрезок времени. Таким образом, точки типа  $M_2$  (движения, проходящие через них, пересекают  $L_2$  в конечный отрезок времени) образуют линейную область на кривой  $AB$  и множество этих точек имеет точную правую границу  $M$ , которая, очевидно, расположена левее точки  $M_1$ .

Точка  $M$  не может принадлежать точкам типа  $M_1$  (когда движения пересекают кривую  $L_1$  в конечный отрезок времени), так как тогда и слева от  $M$  были бы точки типа  $M_1$ , что, очевидно, невозможно. Точка  $M$  не принадлежит и к точкам типа  $M_2$ . Следовательно, траектория, проходящая через точку  $M$ , входит в точку  $(0, 0)$  при  $t \rightarrow \infty$ .

*Замечание 1.* Точек типа  $M$  (когда движение входит в точку  $(0, 0)$  при  $t \rightarrow \infty$ ) может оказаться на кривой  $AB$  две, — именно, одна из них будет являться правой границей точек типа  $M_2$  и другая — левой границей точек типа  $M_1$ . Тогда всякое движение, пересекающее кривую  $AB$  между этими точками, также входит в точку  $(0, 0)$  при  $t \rightarrow \infty$  (в силу предположений 1 и 3 теоремы 2.1). Отсюда следует, что точек типа  $M$  существует либо одна, либо бесконечное множество.

*Замечание 2.* Предположим, что система (1.1) имеет вид:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= b_{11}x + b_{12}y + \varphi(x, y) = P(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= b_{21}x + b_{22}y + \psi(x, y) = Q(x, y)\end{aligned}\quad (2.1)$$

Известно, что  $u$  — тангенс угла, под которым интегральная кривая может входить в особую точку  $(0, 0)$ , определяется в этом случае уравнением (Фроммер [3], стр. 216)

$$b_{12}u^2 + (b_{11} - b_{22})u - b_{21} = 0 \quad (2.2)$$

Пусть  $u_1, u_2$  — вещественные корни этого уравнения — критические направления. Составим функцию

$$\Pi(u) = b_{11} + b_{12}u \quad (2.3)$$

Тогда, если  $\Pi(u_k) = 0$ , то  $u_k$  называется особым критическим направлением, если  $\Pi(u_k) \neq 0$ , то  $u_k$  будет обыкновенным критическим направлением.

Вдоль обыкновенного критического направления в точку равновесия  $(0, 0)$  может входить только одна интегральная кривая или бесконечное множество.

По Фроммеру (см. [3], стр. 226) это можно выяснить следующим образом.

Предположим, что при  $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$

$$\lim \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} = \lim \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} = \lim \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x} = \lim \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial y} = 0 \quad (2.4)$$

Составим функцию

$$\Phi(u, x) = \frac{b_{21}u + b_{22}ux + \psi(x, ux)}{b_{11}x + b_{12}ux + \varphi(x, ux)} - u \quad (2.5)$$

Тогда, если

$$\partial \Phi(u_k, 0) / \partial u > 0 \quad (2.6)$$

то вдоль обыкновенного критического направления  $u_k$  в точку  $(0, 0)$  входит бесконечное множество интегральных кривых. При

$$\partial \Phi(u_k, 0) / \partial u < 0 \quad (2.7)$$

вдоль обыкновенного критического направления  $u_k$  входит только одна интегральная кривая. Эти критерии позволяют установить, какой из двух случаев, отмеченных в замечании 1, имеет место.

Далее будет показано, как построить уравнение траектории, входящей в точку  $(0, 0)$ , если она входит в эту точку одна вдоль критического направления.

**§ 3. Признак Бендиксона** (см. [2], стр. 142, а также [5], стр. 346).

Если в односвязной области  $G$  частные производные от функций  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  непрерывны и выражение

$$D(x, y) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$$

сохраняет знак и не тождественно обращается в нуль, то в области  $G$  не содержится замкнутых решений системы (1.1).

Доказательство основывается на формуле Грина

$$J = \iint_G \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy = \int_L P dy - Q dx$$

Для замкнутой интегральной кривой  $L$  правая часть формулы Грина равна нулю в силу уравнений (1.1).



Если же условия теоремы выполнены, то правая часть в нуль не обращается, а потому и нет замкнутого решения.

Заметим, что формула Грина записана, вообще говоря, неудовлетворительно, так как в правой части тождества требуется только непрерывность  $P$  и  $Q$ , а слева необходимы непрерывные производные.

Можно, однако, формулу записать и так, что требования, предъявляемые к  $P$  и  $Q$  справа и слева, будут одинаковые.

Действительно, надо записать формулу, например, так:

$$J = \int_{\Gamma} d_x P(x, y) dy + d_y Q(x, y) dx = \int_L P(x, y) dy - Q(x, y) dx$$

Здесь слева понимается предел

$$\lim \sum \Delta_x P(x, y) \Delta y + \Delta_y Q(x, y) \Delta x$$

который и выражается через интегралы Стильтьеса. Такая запись часто более удобна в приложениях к дифференциальным уравнениям, так как не всегда можно требовать производных от  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$ .

Пусть точка  $x = 0, y = 0$  есть точка равновесия. Предположим,  $D(x, y)$  есть знакоопределенная функция в окрестности точки  $(0, 0)$ . Например, пусть  $D(x, y) > 0$  в некоторой окрестности точки  $(0, 0)$  (и быть может  $D(0, 0) = 0$ , что несущественно). Рассмотрим

$$J = \iint D(x, y) dx dy$$

Так как  $D(x, y) > 0$ , то в окрестности точки  $(0, 0)$  нет периодических решений, т. е., в частности, точка  $(0, 0)$  не есть центр.

Предположим, уравнение  $D(x, y) = 0$  определяет единственную кривую  $l(0)$ . Рассмотрим два случая:

- I. Кривая  $l(0)$  замкнутая и окружает точку  $(0, 0)$ ;
- II. Кривая  $l(0)$  не окружает точку  $(0, 0)$ .

По признаку Бендиксона у системы (1.1) нет периодических решений, окружающих точку  $(0, 0)$  и лежащих в области, ограниченной кривой  $l(0)$ . Рассмотрим случай I и семейство замкнутых кривых  $l(\lambda)$

$$D(x, y) = \lambda \tag{3.1}$$

зависящих от одного параметра  $\lambda$ . Это семейство кривых окружает точку  $(0, 0)$ , и при  $\lambda > 0$  получаем кривую этого семейства, лежащую внутри кривой  $l(0)$ , а при  $\lambda < 0$  вне кривой  $l(0)$ . Рассмотрим

$$J(\lambda) = J(D(\lambda)) = \iint_{D(\lambda)} D(x, y) dx dy$$

где  $D(\lambda)$  — область, ограниченная кривой  $l(\lambda)$ .

Очевидно,  $J(\lambda)$  достигает наибольшего значения при  $\lambda = 0$ , так как внутри кривой  $l(0)$  имеем  $D(x, y) > 0$ . При  $\lambda \rightarrow -\infty$  интеграл  $J(\lambda)$  убывает и найдется такое значение  $\lambda_1 < 0$ , при котором  $J(\lambda_1) = 0$ .

Покажем, что область  $D(\lambda_1)$  имеет наибольшую площадь среди тех областей (охватывающих область  $D(0)$ ), для которых  $J(\lambda) = 0$ . Действи-



тельно, пусть  $l(\lambda)$  окружает (фиг. 3) область  $D(\lambda_1)$ . Предположим, мы уменьшили область  $D(\lambda_1)$ , выбросив область  $D_1$  с площадью  $S_1$ . Тогда  $J(D(\lambda_1) - D_1) > 0$ . Заменим область  $D_1$  областью  $D_2$  с площадью  $S_2$ , расположенной вне  $D(\lambda_1)$ , так, что снова

$$\begin{aligned} J(D(\lambda_1) - D_1 + D_2) &= 0 \\ \text{Тогда} \quad J(D_1) &= J(D_2) \end{aligned}$$

Покажем, что  $S_2 < S_1$ . Из

$$\iint_{D_1} D(x, y) dx dy = \iint_{D_2} D(x, y) dx dy$$

по теореме о среднем имеем

$$D(x_1, y_1) S_1 = D(x_2, y_2) S_2$$

где  $(x_1, y_1)$  — точка из области  $D_1$  и  $(x_2, y_2)$  — из области  $D_2$ . Но  $|D(x_1, y_1)| < |D(x_2, y_2)|$  по построению кривых  $l(\lambda)$ . Отсюда следует, что  $S_2 < S_1$ . Поставим теперь вообще задачу: найти среди областей  $D$ , для которых

$$J(D) = \iint_D D(x, y) d\sigma = 0$$

ту, которая имеет наибольшую площадь. Или среди замкнутых кривых  $l$ , которые являются границами областей  $D$ , найти такую, что

$$J = \int_l \left[ P(x, y) \frac{dy}{dt} - Q(x, y) \frac{dx}{dt} \right] dt = 0 \tag{3.2}$$

а интеграл

$$J = \frac{1}{2} \int_l \left( x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) dt \tag{3.3}$$

достигает максимума.

По известному правилу вариационного исчисления составляем функцию  $F = xy' - yx' + \lambda(P(x, y)y' - Q(x, y)x')$  и уравнение

$$\frac{1}{y^2} \frac{\partial^2 F}{\partial x'^2} (x'y'' - y'x'') + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'} - \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x'} = 0$$

В нашем случае это дает

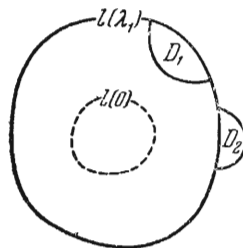
$$2 + \lambda \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) = 0$$

что можно записать, вводя вместо  $\lambda$  новую постоянную, и так:

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = \lambda, \quad \text{или} \quad D(x, y) = \lambda$$

Таким образом, искомая кривая  $l$  находится среди кривых семейства  $l(\lambda)$  и мы видели, что экстремальная кривая  $l(\lambda_1)$ , доставляющая максимум  $J$ , действительно существует. Чтобы найти значение  $\lambda_1$  экстремальной кривой, нужно удовлетворить уравнению (3.2)

$$J(l(\lambda_1)) = \int_{l(\lambda_1)} P(x, y) dy - Q(x, y) dx = 0 \tag{3.4}$$



Фиг. 3

*Пример* [5]. Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{dx}{dt} = -y + x(x^2 + y^2 - 1), \quad \frac{dy}{dt} = x + y(x^2 + y^2 - 1)$$

Здесь

$$D(x, y) = 4x^2 + 4y^2 - 2 = \lambda, \quad \text{или} \quad x^2 + y^2 = r^2, \quad r^2 = \frac{1}{2}(2 + \lambda)$$

Запишем это уравнение в параметрическом виде  $x = r \cos t$ ,  $y = r \sin t$  и подставим в уравнение (3.4). Имеем

$$\int_0^{2\pi} r^2 (r^2 - 1) dt = 2\pi r^2 (r^2 - 1) = 0, \quad \text{или} \quad r = 1$$

Легко видеть, что найденная экстремальная кривая  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$  есть периодическое решение рассматриваемой системы уравнений.

Таким образом, экстремальная кривая  $l(\lambda_1)$  может оказаться и периодическим решением, но может этого и не быть. Может случиться, что экстремальных кривых  $l(\lambda_1)$  найдется несколько или даже бесконечное множество (если уравнение  $D(x, y) = 0$  определяет не одну кривую).

Предположим, что имеется единственная экстремальная кривая  $l(\lambda_1)$ , не являющаяся периодическим решением.

Предположим, однако, что вообще периодическое решение системы (1.1), окружающее точку равновесия  $(0, 0)$ , имеется.

Что можно сказать о расположении этого замкнутого решения?

Очевидно, это замкнутое решение не может целиком проходить внутри замкнутой кривой  $l(0)$ , так как интеграл  $J$ , взятый по области, ограниченной этим замкнутым решением, будет больше нуля. Не может это замкнутое решение проходить и между кривыми  $l(0)$  и  $l(\lambda_1)$ , так как снова будет соответствующее значение  $J > 0$ . Не проходит периодическое решение и вне кривой  $l(\lambda_1)$ , так как соответствующее значение  $J < 0$ . Следовательно, замкнутое решение обязательно пересекает по крайней мере два раза или кривую  $l(0)$ , или экстремальную кривую  $l(\lambda_1)$ . Но тогда, как следует из теории контактов, или кривая  $l(0)$ , или  $l(\lambda_1)$  имеет контакт (точку соприкосновения с интегральной кривой). Отсюда получаем теорему.

*Теорема 3.1.* Если кривые  $l(0)$  и  $l(\lambda_1)$  не имеют контакта, то замкнутого решения не существует.

Пусть  $S_1$  — площадь, ограниченная экстремальной кривой  $l(\lambda_1)$ , и  $S$  — площадь, ограниченная замкнутым решением. Тогда имеем  $S < S_1$ , так как  $l(\lambda_1)$  ограничивает наибольшую площадь среди кривых, для которых  $J = 0$ .

Если имеется несколько экстремальных кривых  $l(\lambda_1)$ , то в случае существования периодического решения, очевидно, одна из кривых  $l(\lambda_1)$  или кривая  $l(0)$  имеет контакт.

Вообще выделение из семейства  $l(\lambda)$  тех кривых, которые имеют контакт, может дать некоторое указание на возможное расположение периодического решения и качественную картину в большом.

Пример. Даны уравнения

$$\frac{dx}{dt} = y - x + x^3, \quad \frac{dy}{dt} = -x - y + y^3 \quad \left( \frac{dy}{dx} = \frac{-x - y + y^3}{-x + y + x^3} \right) \quad (3.5)$$

Здесь

$$D(x, y) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 3x^2 + 3y^2 - 2 = \lambda \quad (3.6)$$

Вводя новую постоянную, напишем  $x^2 + y^2 = \lambda$ . Пользуясь представлением

$$x = r \cos t, \quad y = r \sin t \quad (3.7)$$

находим согласно (3.4)

$$J = \int_0^{2\pi} [r^4 (\cos^4 t + \sin^4 t) - r^2] dt = 2\pi r^2 \left( \frac{3}{4} r^2 - 1 \right) \quad (3.8)$$

Отсюда  $J = 0$  при  $r = 2/\sqrt{3}$ . Экстремальная кривая  $l(\lambda_1)$  запишется в виде

$$x = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos t, \quad y = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin t \quad (x^2 + y^2 = \frac{4}{3}) \quad (3.9)$$

и  $l(0)$  есть

$$x = \sqrt{\frac{2}{3}} \cos t, \quad y = \sqrt{\frac{2}{3}} \sin t \quad (x^2 + y^2 = \frac{2}{3}) \quad (3.10)$$

Для обеих этих кривых и для  $l(r)$  имеем  $dy/dx = \cos t / \sin t$ .

Чтобы найти контакт на этих кривых, надо найти значение  $t$  из уравнения

$$\frac{-r \sin t - r \cos t + r^3 \sin^3 t}{r \sin t - r \cos t + r^3 \cos^3 t} = -\frac{\cos t}{\sin t}$$

Здесь левая часть есть значение  $dy/dx$  согласно (3.5) на кривой  $l(\lambda)$  или  $l(r)$ .

Отсюда имеем

$$r^2 (\cos^4 t + \sin^4 t) - 1 = 0 \quad (3.11)$$

Очевидно, это же уравнение получим, приравнявая подинтегральное выражение в (3.8) к нулю. Уравнение (3.11) есть уравнение кривой контактов топографической системы экстремалей (3.7). Подставляя выражение  $r$  из (3.11) в (3.7), получим уравнение кривой контактов в параметрическом виде:

$$x = \frac{1}{\sqrt{\sin^4 t + \cos^4 t}} \cos t, \quad y = \frac{1}{\sqrt{\sin^4 t + \cos^4 t}} \sin t$$

Здесь наибольшее возможное значение  $r^2$  есть  $r^2 = 2$  и наименьшее  $r^2 = 1$ .

Мы видим, таким образом, что кривая контактов не пересекает кривую (3.10), внутри которой  $D(x, y) < 0$ , но пересекает экстремальную кривую (3.9), для которой  $r^2 = 4/3$ . Отсюда заключаем, что если существует периодическое решение, то оно целиком расположено между окружностями  $r = \sqrt{2}$  и  $r = 1$ . Действительно, если бы это периодическое решение подходило к точке  $(0, 0)$  ближе, чем единица, то существовала бы окружность радиуса  $r < 1$ , которая пересекалась бы этим периодическим решением по меньшей мере в двух точках. Но тогда эта окружность имела бы контакт, что невозможно по доказанному.

Следовательно, все окружности радиуса  $r < \sqrt{2}$  пересекаются движениями только один раз. В точках окружности  $x = 2 \cos \varphi$ ,  $y = 2 \sin \varphi$  имеем из (3.5)

$$\frac{dx}{dt} = 2 \sin \varphi - 2 \cos \varphi + 8 \cos^3 \varphi, \quad \frac{dy}{dt} = -2 \cos \varphi - 2 \sin \varphi + 8 \sin^3 \varphi \quad (3.12)$$

Далее на окружности (3.12) имеем

$$x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} = 4 [4 (\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi) - 1] > 0$$

т. е. на окружности  $x = 2 \cos \varphi$ ,  $y = 2 \sin \varphi$  будет  $d(x^2 + y^2)/dt > 0$ .

Отсюда видим, что движения выходят из окружности  $x = 2 \cos \varphi$ ,  $y = 2 \sin \varphi$  при  $t \rightarrow \infty$  (движения выходят и из всякой окружности радиуса  $r > \sqrt{2}$ ).



Так как все окружности радиуса  $r > \sqrt{2}$  пересекаются движениями только один раз, то, очевидно, все движения, начинающиеся вне окружности радиуса  $r = \sqrt{2}$ , обладают свойством

$$x \rightarrow \infty, \quad y \rightarrow \infty \quad \text{при } t \rightarrow \infty. \quad (3.13)$$

Характеристические числа первого приближения рассматриваемой системы (3.5) суть  $\xi_1 = -1 + i$ ,  $\xi_2 = -1 - i$ ; поэтому все движения, начинающиеся в окрестности точки  $(0,0)$ , обладают свойством

$$x \rightarrow 0, \quad y \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty \quad (3.14)$$

Легко установить, что, кроме  $(0,0)$ , у рассматриваемой системы нет точек равновесия. На основании (3.13) и (3.14) и по теореме 1.8 заключаем, что предельный цикл действительно существует и проходит между указанными выше окружностями. Цикл будет неустойчивым.

Рассмотрим случай II, когда кривая не окружает точку  $(0,0)$ . Здесь не существует периодического решения, окружающего точку  $(0,0)$  и лежащего в области, ограниченной кривой  $D(x, y) = 0$ . Это следует из признака Бендиксона, так как в этой области  $D(x, y)$  сохраняет знак.

Рассмотрим семейство кривых  $l(\lambda)$ . Если существует замкнутое решение, окружающее точку  $(0,0)$ , то, очевидно, оно пересекает по крайней мере в двух точках кривую  $l(0)$ . Отсюда следует, что если кривая  $l(0)$  не имеет контакта, то замкнутой интегральной кривой быть не может.

Отметим еще, что кривые  $l(\lambda)$  являются экстремальными для следующей вариационной задачи. Пусть имеем

$$J = \iint_D D(x, y) dx dy$$

и отрезок  $a, b$  одной из кривых  $l(\lambda)$  входит в границу области  $D$ . Тогда, если на участке  $(a, b)$  границы области  $D$  кривую  $l(\lambda)$  заменим другой кривой так, что величина  $J$  не изменится, то площадь области  $D$  уменьшится (если  $l(\lambda)$  удаляются от точки  $(0,0)$  при  $\lambda \rightarrow -\infty$ ). Это доказывается так же, как и в случае замкнутых кривых  $l(\lambda)$ .

Может случиться, что  $D(x, y)$  содержит только переменную  $x$ , т. е.  $D(x, y) = \varphi(x) = 0$ . Тогда если  $x_1, x_2, \dots$  суть корни этого уравнения, то нет замкнутых интегральных кривых, расположенных в полосе между прямыми  $x = x_1, x = x_2$ , если  $x_1, x_2$  — два меньшие по модулю и разных знаков из корней  $x_1, x_2, \dots$ .

Для существования периодического решения, окружающего точку  $(0,0)$ , необходимо, чтобы одна из прямых  $x = x_1, x = x_2$  имела контакт.

Вообще уравнение кривой контактов семейства кривых  $l(\lambda)$

$$D(x, y) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = \lambda \quad (3.15)$$

есть, как легко видеть:

$$P \left( \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} \right) + Q \left( \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (3.16)$$

Если это равенство невозможно при  $x^2 + y^2 \neq 0$ , то периодических решений, окружающих точку  $(0,0)$ , нет. Если (3.16) есть тождество в силу (3.15) при некотором  $\lambda = \lambda_1$ , то  $l(\lambda_1)$  есть решение уравнений (1.1).

Пример. Даны уравнения

$$\frac{dx}{dt} = y - x + x^3, \quad \frac{dy}{dt} = -x - y - y^3 \quad \left( \frac{dy}{dx} = \frac{-x - y - y^3}{y - x + x^2} \right) \quad (3.17)$$

Здесь

$$D(x, y) = 3x^2 - 3y^2 - 2 = \lambda \quad (3.18)$$

и кривая  $l(0)$  есть

$$x^2 - y^2 = \frac{2}{3}$$

Запишем семейство (3.18) в виде  $l(r)$ :

$$x = r \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad y = r \frac{e^t - e^{-t}}{2} \quad \left( r^2 = \frac{2 + \lambda}{3} \right) \quad (3.19)$$

Найдем кривую контактов семейства (3.19). Имеем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^t + e^{-t} + e^t - e^{-t} + \frac{1}{4} r^2 (e^t - e^{-t})^3}{e^t + e^{-t} - e^t + e^{-t} - \frac{1}{4} r^2 (e^t + e^{-t})^3} = \frac{e^t + e^{-t}}{e^t - e^{-t}} \quad (3.20)$$

Отсюда

$$r^2 (e^{2t} - e^{-2t})^2 + 4 (e^{2t} - e^{-2t}) + 8r^2 - 8 = 0 \quad (3.21)$$

или

$$e^{2t} - e^{-2t} = \frac{1}{r^2} \left( -2 \pm \sqrt{-8 \left[ \left( r^2 - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{3}{4} \right]} \right) \quad (3.22)$$

Отсюда видим, что при

$$r^2 > \frac{\sqrt{3+1}}{2} \quad (3.23)$$

нет контакта. Семейство (3.18) содержит также кривые

$$x = \frac{R}{2} (e^t - e^{-t}), \quad y = \frac{R}{2} (e^t + e^{-t}) \quad \left( R^2 = -\frac{2 + \lambda}{3} \right) \quad (3.24)$$

Здесь для точек контактов получим [так же как (3.21) и (3.22)].

$$R^2 (e^{2t} - e^{-2t})^2 + 4 (e^{2t} - e^{-2t}) + 8R^2 + 8 = 0 \quad (3.25)$$

или

$$e^{2t} - e^{-2t} = \frac{1}{R^2} \left( -2 \pm \sqrt{-8 \left[ \left( R^2 - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{3}{4} \right]} \right) \quad (3.26)$$

Отсюда видим, что при

$$R^2 > \frac{\sqrt{3-1}}{2} \quad (3.27)$$

кривые (3.24) не имеют контакта.

Уравнения кривых контактов (3.21) и (3.25) можно записать в параметрическом виде, подставляя значения  $r$  или  $R$  из (3.21), (3.25) соответственно в (3.19) или (3.24). Эти кривые контактов, таким образом, суть ограниченные замкнутые кривые, имеющие вид восьмерок с центром в точке  $(0, 0)$ . Мы можем сказать, следовательно, что замкнутое решение, окружающее точку  $(0, 0)$ , не может целиком находиться в области между двумя ветвями гиперболы  $l(0)$ , так как в этой области  $D(x, y) < 0$ .

Все гиперболы (3.19) и (3.24) при условии (3.23) и (3.27) соответственно пересекаются интегральными кривыми не более чем в одной точке, так как не имеют контакта. При  $t \rightarrow \infty$  движения входят в область, ограниченную всякой ветвью гиперболы (3.19), при условии (3.23) и выходят из области, ограниченной ветвью гиперболы (3.24), при условии (3.27).

Так как эти гиперболы не имеют контакта, то достаточно в этом убедиться только в одной точке какой-нибудь из этих гипербол. Для выяснения полной качественной картины в целом необходимо выяснить качественную картину в окрестности двух других точек равновесия системы (3.17), находящихся вблизи асимптоты  $y = -x$  с абсциссами  $x_1 = 1 + \alpha$  и  $x_2 = -(1 + \alpha)$ , где  $0 < \alpha < 1$ .

## II. Изучение системы одного частного вида

§ 4. Дана система

$$\frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y + ax, \quad \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y \quad (4.1)$$

где постоянные  $a_{ik}$  такие, что характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \xi & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \xi \end{vmatrix} = \xi^2 - (a_{11} + a_{22})\xi + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0 \quad (4.2)$$

имеет отрицательные корни  $\xi_1 < 0$ ,  $\xi_2 < 0$ . Поэтому мы имеем

$$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0, \quad a_{11} + a_{22} < 0 \quad (4.3)$$

Рассмотрим теперь характеристическое уравнение системы (4.1), считая  $a$  также постоянным. Имеем

$$\xi^2 - (a_{11} + a_{22} + a)\xi + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} + aa_{22} = 0 \quad (4.4)$$

Условия отрицательности корней уравнения (4.4) можно представить в виде двух неравенств:

$$a < -(a_{11} + a_{21}), \quad \Delta + aa_{22} > 0 \quad (4.5)$$

Из последнего неравенства получаем

$$a > -\frac{\Delta}{a_{22}}, \text{ если } a_{22} > 0; \quad a < -\frac{\Delta}{a_{22}}, \text{ если } a_{22} < 0$$

Следовательно, окончательно условие отрицательности корней уравнения (4.4) можно записать так:

$$-\frac{\Delta}{a_{22}} < a < -(a_{11} + a_{22}), \quad \text{если } a_{22} > 0 \quad (4.6)$$

$$a < -(a_{11} + a_{22}), \quad a < -\frac{\Delta}{a_{22}}, \quad \text{если } a_{22} < 0 \quad (4.7)$$

$$a < -a_{11}, \quad \text{если } a_{22} = 0 \quad (4.8)$$

Заметим, что случай (4.6) возможен только при условии

$$-\frac{\Delta}{a_{22}} < -(a_{11} + a_{22}), \quad \text{или } a_{22}^2 + a_{12}a_{21} < 0 \quad (4.9)$$

Из уравнения (4.4) найдем

$$\xi_{1,2} = \frac{a_{11} + a_{22} + a \pm \sqrt{(a_{11} + a_{22} + a)^2 - 4(\Delta + aa_{22})}}{2} \quad (4.10)$$

Рассмотрим здесь граничные значения корней  $\xi$ , когда  $a$  принимает возможное точное верхнее значение или нижнее согласно (4.6). Пусть, когда  $a_{22} > 0$ :

$$a_{11} + a_{22} - a = 0 \quad (4.11)$$

Так как  $\Delta + aa_{22} > 0$  по условию (4.6) или (4.9), то корни

$$\xi_1 = i\sqrt{\Delta + aa_{22}}, \quad \xi_2 = -i\sqrt{\Delta + aa_{22}} \quad (4.12)$$

будут чисто мнимыми.

При  $a_{22} = 0$  граничные значения получаем из (4.12).



Предположим теперь  $\Delta + a_{22}a = 0$ . Тогда

$$\xi_1 = 0, \quad \xi_2 = a_{11} + a_{22} + a = \frac{a_{22}^2 + a_{12}a_{21}}{a_{22}} < 0 \quad (4.13)$$

на основании (4.9). Рассмотрим случай  $a_{22} < 0$ . При этом возможно

$$-\frac{\Delta}{a_{22}} < -(a_{11} + a_{22}), \quad \text{или} \quad a_{22}^2 + a_{12}a_{21} > 0 \quad (4.14)$$

Тогда в согласии с (4.7) наибольшее возможное значение  $a$  есть  $a = -\Delta/a_{22}$ . Для  $\xi_1, \xi_2$  получим значения (4.13). Если, наоборот,

$$-(a_{11} + a_{22}) < -\frac{\Delta}{a_{22}}, \quad \text{или} \quad a_{22}^2 + a_{12}a_{21} < 0 \quad (4.15)$$

то наибольшее значение  $a$  есть  $a = -(a_{11} + a_{22})$ . В этом случае  $\Delta + a_{22}a > 0$  на основании (4.15) и корни

$$\xi_1 = i\sqrt{\Delta + a_{22}a}, \quad \xi_2 = -i\sqrt{\Delta + a_{22}a} \quad (4.16)$$

будут чисто мнимые. Наконец, возможно

$$a = -(a_{11} + a_{22}) = -\frac{\Delta}{a_{22}}, \quad \text{или} \quad a_{22}^2 + a_{12}a_{21} = 0 \quad (4.17)$$

Тогда

$$\xi_1 = \xi_2 = 0 \quad (4.18)$$

### § 5. Рассмотрим теперь систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y + f(x), \quad \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y \quad (5.1)$$

где постоянные  $a_{ik}$  удовлетворяют неравенствам (4.3) и

$$f(0) = 0, \quad f(x) \neq 0 \quad \text{при} \quad x \neq 0 \quad (5.2)$$

Кроме того, будем предполагать:

в случае  $a_{22} > 0$

$$-\frac{x\Delta}{a_{22}} < f(x) < -(a_{11} + a_{22})x \quad (x > 0) \quad (5.3)$$

$$-(a_{11} + a_{22})x < f(x) < -\frac{x\Delta}{a_{22}} \quad (x < 0) \quad (5.4)$$

или

$$-\frac{x^2\Delta}{a_{22}} < xf(x) < -(a_{11} + a_{22})x^2 \quad (x \neq 0) \quad (5.5)$$

в случае  $a_{22} < 0$

$$f(x) < -\frac{x\Delta}{a_{22}}, \quad f(x) < -(a_{11} + a_{22})x \quad (x > 0) \quad (5.6)$$

$$-\frac{x\Delta}{a_{22}} < f(x), \quad -(a_{11} + a_{22})x < f(x) \quad (x < 0), \quad (5.7)$$

или

$$xf(x) < -\frac{x^2\Delta}{a_{22}}, \quad xf(x) < -(a_{11} + a_{22})x^2 \quad (x \neq 0) \quad (5.8)$$

в случае  $a_{22} = 0$

$$f(x) < -a_{11}x \quad (x > 0) \quad (5.9)$$

$$-a_{11}x < f(x) \quad (x < 0) \quad (5.10)$$

или

$$xf(x) < -a_{11}x^2 \quad (x \neq 0) \quad (5.11)$$

### § 6. Найдем решения системы уравнений

$$a_{11}x + a_{12}y + f(x) = 0, \quad a_{21}x + a_{22}y = 0 \quad (6.1)$$

Отсюда находим

$$y = \frac{a_{21}f(x)}{\Delta}, \quad x = -\frac{a_{22}f(x)}{\Delta} \quad (6.2)$$

Второе из этих равенств можно записать в виде

$$x\Delta + a_{22}f(x) = 0 \quad (6.3)$$

Согласно (5.2) при  $x=0$  это выполнено. Но равенство (6.3) невозможно при  $x \neq 0$ , как это следует из (5.3), (5.4) и (5.6), (5.7), когда  $a_{22} \neq 0$ .

Если же  $a_{22} = 0$ , то естественно считать  $a_{21} \neq 0$ , а тогда второе из уравнений (6.1) дает  $x=0$  и первое  $y=0$ .

Таким образом, система уравнений (6.1) имеет единственное решение  $x=0$ ,  $y=0$ . Отсюда имеем теорему.

**Теорема 6.1.** Система (5.1) при сделанных предположениях относительно  $f(x)$  имеет только одну точку равновесия  $x=0$ ,  $y=0$ .

### § 7. Рассмотрим прямую

$$a_{21}x + a_{22}y = 0 \quad (7.1)$$

и кривую

$$a_{11}x + a_{12}y + f(x) = 0 \quad (7.2)$$

представляющие собой правые части уравнений (5.1).

По теореме 6.1 прямая (7.1) и кривая (7.2) пересекаются только в точке  $x=0$ ,  $y=0$ . Из (7.1) и (7.2) имеем

$$a_{12}a_{22}y = -a_{12}a_{21}x$$

$$a_{12}a_{22}y = -a_{11}a_{22}x - a_{22}f(x) \quad (7.3)$$

Будем предполагать

$$a_{22} < 0, \quad a_{12} > 0, \quad a_{21} > 0 \quad (7.4)$$

В силу (7.3) имеем, следовательно,  $a_{11} < 0$ . Из (5.6) при  $x > 0$

$$f(x) < -\frac{x\Delta}{a_{22}} \quad \text{или} \quad a_{22}f(x) + xa_{11}a_{22} > xa_{12}a_{21} \quad (7.5)$$

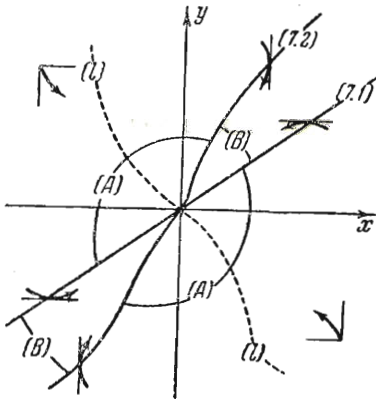
Сравнивая это с (7.3), получаем  $y^* > y$  при  $x > 0$ ,  $y^* < y$  при  $x < 0$ , где  $y^*$  и  $y$  — ординаты кривой (7.2) и прямой (7.1) соответственно.

Отсюда видим, что кривая (7.2) расположена выше прямой (7.1), когда  $x > 0$ . При  $x < 0$  будет согласно (5.7) наоборот. Заметим еще, что прямая (7.1) в силу (7.4) проходит в первой и третьей четвертях.

Рассматривая уравнения (5.1), легко убеждаемся на основании (7.4) в том (фиг. 4), что:

в зоне (B) в первой четверти

$$\frac{dx}{dt} < 0, \quad \frac{dy}{dt} < 0 \quad (7.6)$$



Фиг. 4

в зоне (А) ниже прямой (7.1) и кривой (7.2)

$$\frac{dx}{dt} < 0, \quad \frac{dy}{dt} > 0 \quad (7.7)$$

При  $x > 0$  на кривой (7.2)  $x(t)$  достигает максимума, а на прямой (7.1)  $y(t)$  достигает максимума. При  $x < 0$  все будет наоборот.

На основании этого видим, что все движения, проходящие вблизи прямой (7.1) и кривой (7.2), входят в зону (В) при возрастающих  $t$ . И после вхождения в зону (В) траектория необходимо входит в точку равновесия при  $t \rightarrow \infty$ .

Пусть теперь движение проходит через точку  $(x_0, y_0)$ , лежащую в зоне (А) ниже прямой (7.1) и кривой (7.2) в момент  $t = t_0$ .

В силу (7.7) точка  $(x(t), y(t))$  движения при  $t > t_0$  входит в область, ограниченную прямыми  $x = x_0$ ,  $y = y_0$ , а также прямой (7.1) и кривой (7.2), и остается в этой области при  $t \rightarrow \infty$  или пересекает прямую (7.1) или кривую (7.2).

Если точка остается в этой ограниченной области, то по теореме 4 Бендиксона она необходимо входит в точку равновесия при  $t \rightarrow \infty$ .

Напомним, что в этих рассуждениях мы предполагаем теорему единственности выполненной, так как иначе точка  $M(t)$  движения может войти в точку равновесия в конечный отрезок времени.

Таким образом, получена следующая теорема.

**Теорема 7.1.** Если выполнены условия (7.4), то все движения, определяемые уравнениями (5.1), входят в точку равновесия  $x = 0$ ,  $y = 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Мы видим, что некоторые движения, проходящие зону (А), пересекают прямую (7.1), другие пересекают кривую (7.2). По теореме 2.1 в зонах (А) существуют движения, входящие в точку равновесия при  $t \rightarrow \infty$  [и не выходящие из зоны (А)].

В силу теоремы 7.1 при условиях (7.4) периодических решений нет; поэтому на основании теоремы 1.2 все движения в этом случае уходят в бесконечность при  $t \rightarrow -\infty$ . Мы видели, что при  $a_{22} < 0$  может встретиться один из трех случаев: (4.14) (4.15) или (4.17). Однако при сделанных предположениях (7.4), случаи (4.15) и (4.17) не имеют места.

Поэтому при дальнейшем уточнении характера движения будем рассматривать случаи (4.14). Вследствие этого мы должны функцию  $f(x)$  в уравнениях (5.1) подчинить первым условиям (5.6), (5.7). Но вместо первых неравенств (5.6) и (5.7) можно написать

$$f(x) = -\frac{x\Delta}{a_{22}} - \gamma(x) \quad \left( \begin{array}{l} \gamma(x) > 0 \text{ при } x > 0 \\ \gamma(x) < 0 \text{ при } x < 0 \end{array} \right) \quad (7.8)$$

Принимая во внимание значение  $\Delta$  согласно (7.8), представим систему (5.1) в виде

$$\frac{dx}{dt} = \frac{a_{12}a_{21}x + a_{12}a_{22}y - a_{22}\gamma(x)}{a_{22}}, \quad \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y$$



Умножая правые части на положительное число  $-a_{22}$ , мы получим эквивалентную систему

$$\frac{dx}{dt} = -a_{12}a_{21}x - a_{12}a_{22}y + a_{22}\gamma(x), \quad \frac{dy}{dt} = -a_{21}a_{22}x - a_{22}^2y \quad (7.9)$$

Здесь коэффициенты при линейных членах снова удовлетворяют условиям (7.4), поэтому имеем то же поле направлений, как и раньше.

Предположим для дальнейшего, что

$$\frac{d\gamma(x)}{dx} \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow 0 \quad (7.10)$$

Составляя для системы (7.9) уравнение (2.2), найдем критические направления  $u_1 = -a_{21}/a_{22}$ ,  $u_2 = a_{22}/a_{12}$  и, согласно (2.3), функцию

$$\Pi(u) = -a_{12}a_{21} - a_{12}a_{22}u$$

При этом оказывается, что  $\Pi(u_1) = 0$ , т. е.  $-a_{21}/a_{22}$  определяет особое критическое направление.

Мы видели, что траектории входят в зону (B) и там они входят в точку равновесия (0,0) вдоль направления  $u_1$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Значение  $u_2 = a_{22}/a_{12}$  определяет обыкновенное критическое направление, так как  $\Pi(u_2) = -(a_{22}^2 + a_{12}a_{21}) < 0$ .

Составляя функцию  $\Phi(u, x)$  согласно (2.5) для системы (7.9), легко убедиться, принимая во внимание (7.10), что для  $u_2$  выполняется условие (2.7). Поэтому вдоль направления  $u_2$  входит единственная траектория при  $t \rightarrow \infty$ . Уравнение этой траектории можно получить следующим образом. Из (7.9) получаем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{21}a_{22}x + a_{22}^2y}{a_{12}a_{21}x + a_{12}a_{22}y - a_{22}\gamma(x)} \quad (7.11)$$

Отсюда

$$y = \int_0^x \frac{a_{21}a_{22}x + a_{22}^2y}{a_{12}a_{21}x + a_{12}a_{22}y - a_{22}\gamma(x)} dx \quad (7.12)$$

Теперь можно искать  $y$  методом последовательных приближений. Положим в соответствии с тем, что  $u_2 = a_{22}/a_{12}$ , первое приближение равным  $y_0 = (a_{22}/a_{12})x$ . Из (7.12) получим

$$y_1(x) = \int_0^x \frac{(a_{21}a_{12} + a_{22}^2)x}{(a_{12}a_{21} + a_{22}^2)x - a_{22}\gamma(x)} \frac{a_{22}}{a_{12}} dx \quad (7.13)$$

Дальнейшие приближения найдем из рекуррентной формулы

$$y_n(x) = \int_0^x \frac{a_{21}a_{22}x + a_{22}^2y_{n-1}(x)}{a_{12}a_{21}x + a_{12}a_{22}y_{n-1}(x) - a_{22}\gamma(x)} dx \quad (7.14)$$

Заметим, что здесь нужно использовать задание  $\gamma(x)$  при  $x > 0$  или при  $x < 0$  в зависимости от того, получаем мы движение, входящее в точку равновесия при  $t \rightarrow \infty$  справа от оси  $y$  или слева. Можно доказать, на чем мы останавливаться не будем, что если  $\gamma(x)$  голоморфная

функция, то уравнение (7.11) имеет голоморфное решение, и притом единственное, вида

$$y = \frac{a_{22}}{a_{12}} x + \dots \quad (7.15)$$

Таким образом, мы получили следующий результат. Если в уравнениях (5.1) постоянные  $a_{ik}$  удовлетворяют условиям (7.4) и  $\gamma(x)$  в равенстве (7.8) подчинена условию (7.10), то все движения, начинающиеся справа от кривой ( $l$ ) (см. фиг. 4), входят в зону ( $B$ ) при  $t \rightarrow \infty$  в в первой четверти и в этой зоне входят в точку равновесия  $(0,0)$ , касаясь прямой (7.1). Движения, начинающиеся слева от кривой ( $l$ ), входят в точку равновесия  $(0,0)$ , касаясь прямой (7.1), в зоне ( $B$ ) слева от оси  $y$ .

Движения, начинающиеся на кривой ( $l$ ), входят в точку равновесия при  $t \rightarrow \infty$  по кривой ( $l$ ). Кривую ( $l$ ) можно строить или по формулам (7.13), (7.14) или в случае голоморфной функции  $\gamma(x)$  в виде степенного ряда вблизи  $x = 0$ .

Заметим еще, что, продолжая, например, ряд (7.15), представляющий кривую ( $l$ ), вдоль вещественной оси  $x$ , мы не встретим особой точки, так как знаменатель уравнения (7.11) при этом остается отличным от нуля. В самом деле, знаменатель уравнения (7.11) обращается в ноль только на кривой (7.2), от которой мы удаляемся, продолжая функцию, представляющую кривую ( $l$ ), вдоль оси  $x$ .

Необходимо отметить еще, что характеристические числа первого приближения уравнений (7.9) равны  $\xi_1 = 0$ ,  $\xi_2 = 2a_{12}a_{22}$ , т. е. здесь мы имеем дело с так называемым сомнительным случаем. Делая предположение (7.10), мы считали, что функция  $\gamma(x)$  не содержит линейных членов от  $x$ . Отбросим это предположение. Именно, в первом уравнении (7.9) в соответствии с необходимым условием (7.8)  $\gamma(x) > 0$  при  $x > 0$  можно положить

$$a_{22} \gamma(x) = -\alpha x + \omega(x) \quad (7.16)$$

где в силу  $a_{22} < 0$  постоянная  $\alpha > 0$  и

$$\omega(x) - \alpha x < 0 \text{ при } x > 0, \omega(x) - \alpha x > 0 \text{ при } x < 0$$

Кроме того, мы предположим, что как и (7.10)]

$$\frac{d\omega(x)}{dx} \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow 0 \quad (7.17)$$

Тогда система (7.9) запишется в виде

$$\frac{dx}{dt} = -(a_{12}a_{21} + \alpha)x - a_{12}a_{22}y + \omega(x), \quad \frac{dy}{dt} = -a_{21}a_{22}x - a_{22}^2y \quad (7.18)$$

Характеристические числа первого приближения получаем в виде

$$\xi_{1,2} = \frac{-(a_{22}^2 + a_{12}a_{21} + \alpha) \pm \sqrt{(a_{22}^2 + a_{12}a_{21} + \alpha)^2 - 4\alpha a_{22}^2}}{2} \quad (7.19)$$

Можно показать, что здесь под корнем будет величина, положительная при всяком  $\alpha > 0$ , так как  $a_{12}a_{21} > 0$ .

Так как еще и  $a_{22}^2 + a_{12}a_{21} + \alpha > 0$ , то, очевидно,  $\xi_1 < 0$  и  $\xi_2 < 0$ .

Таким образом, здесь нет сомнительного случая. Составляя уравнения (2.2) для системы (7.18), легко находим критические направления:

$$u_{1,2} = \frac{a_{12}a_{21} + \alpha - a_{22}^2 \pm \sqrt{(a_{12}a_{21} + \alpha - a_{22}^2)^2 + 4a_{22}^2 a_{12}a_{21}}}{-2a_{12}a_{22}}$$

Отсюда видим, что одно критическое направление положительное и другое отрицательное.

Повторяя предыдущие рассуждения, получим то же самое, что и ранее, с той лишь разницей, что теперь кривая ( $l$ ) и положение прямой, вдоль которой входят траектории в точку равновесия, зависят от  $\alpha$ .

§ 8. Установим теперь факт устойчивости решения  $x = 0$ ,  $y = 0$  системы (5.1) при условиях (7.4) по второму методу Ляпунова. Это позволит нам увидеть существенное отличие этого случая от всех последующих. Из уравнений (5.1) имеем

$$\frac{1}{2}(x^2 + \lambda y^2)'_t = a_{11}x^2 + (a_{12} + \lambda a_{21})xy + a_{22}\lambda y^2 + xf(x) \quad (8.1)$$

На основании (5.8)

$$xf(x) < -\frac{x^2 \Delta}{a_{22}} \quad (x \neq 0)$$

Поэтому из (8.1) получим

$$\frac{1}{2}(x^2 + \lambda y^2)'_t < \frac{1}{a_{22}} [a_{12}a_{21}x^2 + a_{22}(a_{12} + \lambda a_{21})xy + a_{22}^2\lambda y^2] \quad (8.2)$$

Здесь квадратная скобка будет при  $\lambda = a_{12}/a_{21}$  (и только при таком  $\lambda$ ) полным квадратом и мы получаем

$$\frac{1}{2}(x^2 + \frac{a_{12}}{a_{21}}y^2)'_t < \frac{a_{12}}{a_{21}a_{22}}(a_{21}x + a_{22}y)^2 \quad (8.3)$$

Отсюда видим, что если  $a_{12}a_{21} > 0$  и  $a_{22} < 0$ , то квадратичная положительная форма

$$V = x^2 + \frac{a_{12}}{a_{21}}y^2 \quad (8.4)$$

убывает при  $t \rightarrow \infty$ . Следовательно, в этом случае точка  $M(t)$  всякого движения приближается к началу координат при  $t \rightarrow \infty$ .

Заметим, что точка  $M(t)$  не может оставаться вне эллипса

$$x^2 + \lambda y^2 = a^2 \quad (8.5)$$

Действительно, это могло бы быть только в том случае, если бы точка  $M(t)$  приближалась одновременно к какой-нибудь точке эллипса (8.5) и прямой

$$a_{22}y + a_{21}x = 0 \quad (8.6)$$

т. е. точка  $M(t)$  приближалась бы к точке пересечения эллипса (8.5) и прямой (8.6). Но это невозможно, так как, кроме  $(0,0)$ , нет точек равновесия.

Если не предполагать в уравнениях (5.1) функцию  $f(x)$  такой, что имеем теорему единственности, то из проведенных как сейчас, так и



ранее рассуждений следует, что точка  $M(t)$  приближается к началу координат, но при этом может случиться, что точка  $M(t)$  войдет в начало координат в конечный промежуток времени.

Обратим теперь внимание на то, что ранее в условиях (7.4) мы предполагали  $a_{12} > 0$  и  $a_{21} > 0$ , теперь же  $a_{12}$  и  $a_{21}$  в условиях  $a_{12}a_{21} > 0$  и  $a_{22} < 0$  могут быть оба и отрицательные. Однако случай отрицательных  $a_{12}$  и  $a_{21}$  легко приводится к случаю (7.4).

В самом деле, вводя новую переменную  $x_1$  в уравнениях (5.1) по формуле  $x_1 = -x$ , мы и переведем случай отрицательных  $a_{12}$ ,  $a_{21}$  в случай положительных  $a_{12}$ ,  $a_{21}$  (при этом знак  $a_{22}$  не изменится). Это замечание позволяет нам в дальнейшем считать, например,

$$a_{12} > 0, \quad \text{если } a_{12} \neq 0 \quad (8.7)$$

§ 9. Если  $a_{12} = a_{21} = 0$ , то система (5.1) распадается на два отдельных уравнения. Пусть  $a_{12} = 0$  и  $a_{21} \neq 0$ . Тогда имеем

$$\frac{dx}{dt} = a_{11}x + f(x), \quad \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y \quad (9.1)$$

На основании (4.3) получаем  $a_{11} < 0$  и  $a_{22} < 0$ . Если  $f(x) < -a_{11}x$  ( $x > 0$ ) и  $f(x) > -a_{11}x$  ( $x < 0$ ), то легко видеть, что всегда имеем  $x \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Легко показать, что тогда и  $y \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Таким образом, в дальнейшем нужно рассмотреть предположение

$$a_{22} < 0, \quad a_{12}a_{21} < 0 \quad (9.2)$$

Затем  $a_{22} > 0$ ; при этом  $a_{11} < 0$  в силу второго неравенства (4.3) и, следовательно,  $a_{12}a_{21} < 0$  по первому условию (4.3). Таким образом, второй случай будет

$$a_{22} > 0, \quad a_{11} < 0, \quad a_{12}a_{21} < 0 \quad (9.3)$$

при этом согласно (8.7)  $a_{13} > 0$ .

Заметим здесь, что при  $a_{22} > 0$  невозможно величину  $(x^2 + \lambda y^2)'_t$ , когда  $\lambda > 0$ , ограничить сверху полным отрицательным квадратом или квадратичной отрицательной формой, подчиняя функцию  $f(x)$  только условиям (5.3), (5.4). Поэтому здесь потребуются другие методы исследования.

Наконец, можно предполагать  $a_{22} = 0$ . Тогда, принимая во внимание условия (4.3), будем иметь

$$a_{22} = 0, \quad a_{11} < 0, \quad a_{12} > 0, \quad a_{21} < 0 \quad (9.4)$$

Но в этом случае из (8.1) на основании (5.11) при  $\lambda = -a_{12}/a_{21} > 0$  имеем  $(x^2 + \lambda y^2)'_t < 0$ . Следовательно, при условиях (9.4) всегда  $x \rightarrow 0$  и  $y \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Подставляя в этом случае в уравнения (5.1)  $f(x) = -a_{11}x - \gamma(x)$ , получим систему

$$\frac{dx}{dt} = a_{12}y - \gamma(x), \quad \frac{dy}{dt} = a_{21}x \quad \begin{cases} \gamma(x) > 0 \text{ при } x > 0 \\ \gamma(x) < 0 \text{ при } x < 0 \end{cases} \quad (9.5)$$



Отсюда легко докажется, что если  $\gamma(x)$  не содержит линейных членов от  $x$ , то мы имеем фокус и точка  $M(t)$  всякого движения приближается безгранично к точке равновесия  $(0,0)$  при  $t \rightarrow \infty$  по спирали. (Характеристические числа первого приближения уравнений (9.5) будут чисто мнимые.) Если же

$$\gamma(x) = -\alpha x + \omega(x) \quad (9.6)$$

где постоянная  $\alpha > 0$  и  $d\omega(x)/dx \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow 0$ , то имеем узел (докритический). Траектории будут располагаться так же, как в случае (7.4).

§ 10. Переходим к изучению случая (9.2). Итак, пусть

$$a_{22} < 0, \quad a_{12} > 0, \quad a_{21} < 0 \quad (10.1)$$

Здесь возможны три случая: (4.14), (4.15) и (4.17); сначала проведем некоторые общие рассуждения, не учитывая, какой из них имеет место.

При условиях (10.1), так же как и в случае (7.4), получим  $y^* > y$  при  $(x > 0)$ ,  $y^* < y$  при  $(x < 0)$ , где  $y^*$  — ордината кривой (7.2) и  $y$  — ордината прямой (7.1). Однако теперь уже прямая (7.1) проходит во второй и четвертой четвертях (фиг. 5) так как  $a_{22} < 0$  и  $a_{21} < 0$ .

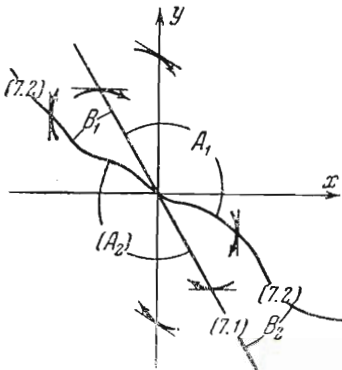
На основании условий (10.1) имеем

$$\text{в зоне } B_1 \quad \frac{dx}{dt} > 0, \quad \frac{dy}{dt} > 0 \quad (10.2)$$

$$\text{в зоне } A_1 \quad \frac{dx}{dt} > 0, \quad \frac{dy}{dt} < 0 \quad (10.3)$$

$$\text{в зоне } B_2 \quad \frac{dx}{dt} < 0, \quad \frac{dy}{dt} < 0 \quad (10.4)$$

$$\text{в зоне } A_2 \quad \frac{dx}{dt} < 0, \quad \frac{dy}{dt} > 0 \quad (10.5)$$



Фиг. 5

На фиг. 5 показано, как в силу с этих неравенств пересекают траектории при  $t \rightarrow \infty$  кривую (7.2) и прямую (7.1).

При пересечении траекторией прямой (7.1) функция  $y(t)$  достигает максимума при  $y(t) > 0$  и достигает минимума при  $y(t) < 0$ . При пересечении кривой (7.2)  $x(t)$  достигает максимума, когда  $x(t) > 0$  и минимума при  $x(t) < 0$ .

Выведем некоторые неравенства, которые нам потребуются в дальнейшем. Из первого уравнения системы (5.1) получаем

$$x = \int_{t_0}^t [a_{11}x + a_{12}y + f(x)] dt \quad (10.6)$$

Здесь  $t_0$  — тот момент времени, в который точка движения пересекает ось  $y$ . При  $x > 0$  согласно (5.6) имеем  $f(x) < -x\Delta/a_{22}$ . Поэтому из (10.6) найдем для  $x > 0$

$$x < \frac{a_{12}}{a_{22}} \int (a_{21}x + a_{22}y) dt = \frac{a_{12}}{a_{22}} (y - y_0) \quad (10.7)$$

Здесь мы воспользовались вторым уравнением системы (5.1),  $y_0$  — ордината на положительной полуоси  $y$ , через которую проходит движение в момент  $t = t_0$ . На основании (5.7) мы получим также из (10.6)

$$x > \frac{a_{12}}{a_{22}} (y - y_0) \quad (x < 0) \quad (10.8)$$

где  $y_0$  — ордината на отрицательной полуоси  $y$ , которую проходит движение в момент  $t = t_0$ .

При  $x > 0$  согласно (5.6) имеем  $f(x) < -x(a_{11} + a_{22})$ . Поэтому на основании (7.2) получаем

$$a_{12}y^* - xa_{22} > 0 \quad (x > 0) \quad (10.9)$$

где  $y^*$  — ордината кривой (7.2).

Пользуясь (5.7), мы получим также

$$a_{12}y^* - xa_{22} < 0 \quad (x < 0) \quad (10.10)$$

Проследим теперь за движением точки  $M(t)$  при  $t \rightarrow \infty$ . Пусть  $M(t)$  пересекает прямую (7.1) в точке  $C$ , переходя в зону  $(A_1)$ . На основании (10.3) заключаем, что при дальнейшем движении точка  $M(t)$  либо входит в начало координат (так как другой точки равновесия, кроме точки  $(0,0)$  нет), либо пересекает ось  $y$ . Предположим, что точка  $M(t)$  пересекает ось  $y$ .

Покажем, что при дальнейшем движении точка  $M(t)$  обязательно пересекает кривую (7.2), если  $x(t)$  неограниченно. Из (10.7) получаем

$$y(t) < \frac{a_{22}}{a_{21}} x + y_0 \quad (10.11)$$

т. е. точка  $M(t)$  при  $x > 0$  движется ниже прямой

$$y = \frac{a_{22}}{a_{12}} x + y_0 \quad (10.12)$$

С другой стороны, из (10.9)

$$y^* > \frac{a_{22}}{a_{12}} x \quad (10.13)$$

т. е. кривая (7.2) находится выше прямой

$$y = \frac{a_{22}}{a_{12}} x \quad (10.14)$$

которая параллельна прямой (10.12). Но по неравенству  $y^* > y$  при  $x > 0$  имеем

$$-\frac{a_{21}}{a_{22}} x < y^* \quad (x > 0) \quad (10.15)$$

Предположим

$$\frac{a_{22}}{a_{12}} x < -\frac{a_{21}}{a_{22}} x \quad (x > 0) \quad (10.16)$$

что имеем при

$$a_{22}^2 + a_{12}a_{21} > 0 \quad (10.17)$$

Таким образом, предположено, что прямая (7.1) выше прямой (10.14).

Если точка  $M(t)$  при движении не пересекает кривую (7.2), то  $y^* < y(t) (x > 0)$ ; на основании (10.15) и (10.11) получаем

$$-\frac{a_{21}}{a_{22}}x < \frac{a_{22}}{a_{12}}x + y_0 \quad (x > 0) \quad (10.18)$$

Но при  $x \rightarrow \infty$  это невозможно на основании (10.16). Следовательно, точка  $M(t)$  обязательно пересекает кривую (7.2) при условии (10.17).

Предположим теперь  $a_{22}^2 + a_{12}a_{21} < 0$ . Тогда прямая (7.1) будет лежать (фиг. 6) ниже прямой (10.14) для  $x > 0$ . Из уравнений (5.1) имеем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{21}x + a_{22}y}{a_{11}x + a_{12}y + f(x)} \quad (10.19)$$

Пусть точка  $M(t)$  при всех  $t \rightarrow \infty$  выше кривой (7.2)

$$y^* < y(t) \quad (x > 0) \quad (10.20)$$

Тогда

$$y = y^* + h(x), \quad 0 < h(x) < y_0 \quad (10.21)$$

Здесь  $y_0$  — ордината на положительной полуоси  $y$ , из которой вышла точка  $M(t)$ , а неравенство  $0 < h(x) < y_0$  имеем в силу (10.11), (10.13) и (10.20). Напишем уравнение кривой (7.2)

$$f(x) + a_{11}x + a_{12}y^* = 0 \quad (10.22)$$

На основании (10.21) и (10.22) можно оценить знаменатель выражения (10.19). Имеем

$$0 < a_{11}x + a_{12}y + f(x) = a_{12}h(x) < a_{12}y_0 \quad (10.23)$$

С другой стороны, так как прямая (7.1) при  $x > 0$  лежит ниже прямой (10.14), а точка  $M(t)$  движется выше прямой (10.14), то расстояние точки  $M(t)$  до прямой (7.1) неограниченно растет при  $x \rightarrow \infty$ ; поэтому для числителя выражения (10.19) имеем

$$a_{21}x + a_{22}y(x) \rightarrow -\infty \quad \text{при } x \rightarrow \infty$$

Но тогда из (10.19) на основании (10.23) можем написать

$$\frac{dy}{dx} < \frac{a_{22}}{a_{12}} - \varepsilon, \quad \varepsilon = \text{const} > 0 \quad (10.24)$$

Отсюда

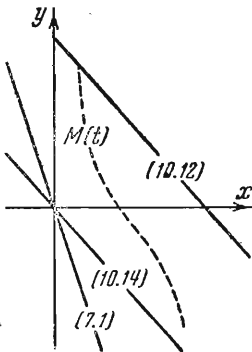
$$y(t) < \left( \frac{a_{22}}{a_{12}} - \varepsilon \right) (x - x_1) + y_1 \quad (10.25)$$

где  $(x_1, y_1)$  — координаты точки  $M(t_1)$  в некоторый момент  $t_1$ , когда (10.24) уже выполняется.

Из (10.20), (10.25) и (10.13) получаем

$$\frac{a_{22}}{a_{12}}x < y_1 + \left( \frac{a_{22}}{a_{12}} - \varepsilon \right) (x - x_1) \quad \text{или} \quad 0 < y_1 - \frac{a_{22}}{a_{12}}x_1 - \varepsilon(x - x_1)$$

что невозможно при  $x \rightarrow \infty$ . Отсюда видим, что неравенство (10.20) невозможно и точка  $M(t)$  пересекает кривую (7.2).



Фиг. 6

Случай  $a_{22}^2 + a_{12}a_{21} = 0$  будет рассматриваться позднее.

Из доказанного следует, что в зоне  $A_1$  точка  $M(t)$  либо входит в точку равновесия  $(0, 0)$ , либо пересекает кривую (7.2).

Предположим, точка  $M(t)$  пересекает кривую (7.2) и входит в зону  $B_2$ . Тогда на основании (10.4) заключаем, что в зоне  $B_2$  точка  $M(t)$  либо входит в точку равновесия, либо пересекает прямую (7.1).

Предположим, точка  $M(t)$  пересекает прямую и входит в зону  $A_2$ . Повторяя рассуждения, проведенные для зоны  $A_1$ , на основе (10.8), (10.10) мы получим, что в зоне  $A_2$  точка  $M(t)$  либо входит в точку равновесия  $(0, 0)$ , либо пересекает кривую (7.2).

В зоне  $B_1$  повторяются рассуждения, проведенные в зоне  $B_2$ . Это приводит к теореме.

**Теорема 10.1.** Для точки  $M(t)$  всякого движения системы (5.1) имеет место один из двух случаев:

- а) точка  $M(t)$  входит в положение равновесия  $(0, 0)$  при  $t \rightarrow \infty$ ;
- б) полярный угол  $\varphi$  точки  $M(t)$  неограниченно возрастает.

*Замечание.* Если система уравнений (5.1) имеет периодическую траекторию, то она будет выпуклой (т. е. всякая прямая пересекает ее не более чем в двух точках). Это следует из того, что координаты  $x(t)$ ,  $y(t)$  всякой траектории при увеличении полярного угла  $\varphi$  на  $2\pi$  имеют один максимум и один минимум, именно  $x(t)$  имеет один максимум в точке пересечения с кривой (7.2) при  $x > 0$  и один минимум в точке пересечения с этой кривой при  $x < 0$ ,  $y(t)$  имеет максимум в точке пересечения с прямой (7.1) при  $y > 0$  и минимум в точке пересечения с этой прямой при  $y < 0$ .

**§ 11.** Рассмотрим теперь вопрос о поведении траекторий системы уравнений (5.1) в целом при помощи одного частного приема. При этом мы будем предполагать

$$a_{22} < 0, \quad a_{12} > 0, \quad a_{21} < 0; \quad (11.1)$$

$$a_{22}^2 + 2a_{12}a_{21} > 0$$

Отсюда

$$-\frac{a_{12}a_{21}}{a_{22}^2 + a_{12}a_{21}} \leq 1 \quad (a_{22}^2 + a_{12}a_{21} > 0) \quad (11.2)$$

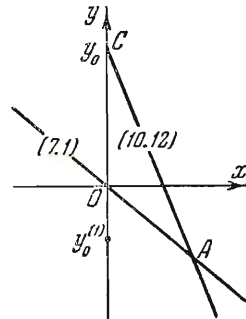
Пусть точка  $M(t)$  некоторого движения, определенных уравнениями (5.1), пересекает ось  $y$  в точке  $C$  (согласно предыдущим рассуждениям по часовой стрелке) с ординатой  $y_0 > 0$  (фиг. 7).

Мы показали ранее, что далее (при  $x > 0$ ) точка  $M(t)$  остается ниже прямой (10.12). Найдем координаты точки пересечения  $A$  прямых (10.12) и (7.1). Получим

$$x_1 = -\frac{y_0 a_{12} a_{22}}{D}, \quad y_1 = \frac{y_0 a_{12} a_{21}}{D} \quad (D = a_{22}^2 + a_{12} a_{21})$$

Так как при  $x > 0$  точка  $M(t)$  движется ниже прямой (10.12), то она пересекает (если пересекает<sup>1</sup>) прямую (7.1) выше точки  $A$ , т. е.

<sup>1</sup> Точка  $M(t)$  может входить в точку  $(0, 0)$ , не доходя до прямой (7.1).



Фиг. 7



координата  $y_2$  точки пересечения движения с прямой (7.1) больше  $y_1$ , т. е.  $y_1 < y_2$ .

В этой точке пересечения, как мы видели ранее (фиг. 5), ордината движения достигает минимума. Отсюда следует, что движение пересекает (если пересекает) отрицательную полуось  $y$  в точке с ординатой  $y_0^{(1)} > y_2$ . Следовательно,

$$y_1 = \frac{y_0 a_{12} a_{21}}{a_{22}^2 + a_{12} a_{21}} < y_0^{(1)} < 0 \quad (11.3)$$

Поэтому, если выполнено условие (11.2), то  $|y_0^{(1)}| < y_0$  или точка  $M(t)$  пересекает отрицательную полуось  $y$  ближе от точки равновесия  $(0, 0)$  чем  $y_0$ .

Так как при  $x < 0$  можно повторить эти рассуждения, то ясно, что в этом случае точка  $M(t)$  безгранично приближается к точке равновесия  $(0, 0)$  при  $t \rightarrow \infty$ . Таким образом доказана теорема.

*Теорема 11.1.* Если выполнены условия (11.1), то всякое движение системы уравнений (5.1) обладает свойством  $x(t) \rightarrow 0$ ,  $y(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Чтобы выяснить качественную картину в целом в этом случае, необходимо исследовать качественную картину в окрестности точки равновесия. Если окажется, что точка  $(0, 0)$  есть узел, то всякое движение системы приближается к точке  $(0, 0)$  вдоль критического направления, но не по спирали (теорема 1.5). Наоборот, если точка  $(0, 0)$  есть фокус, то всякое движение приближается к точке  $(0, 0)$  по спирали (согласно теореме 1.4).

Ниже мы изучим качественную картину в окрестности точки  $(0, 0)$ .

Таким образом, мы разрешили полностью вопрос о поведении траекторий системы (5.1) в целом при условиях  $a_{22} < 0$ ,  $a_{12} a_{21} > 0$  или  $a_{22} < 0$ ,  $a_{12} > 0$ ,  $a_{21} < 0$ ,  $a_{22}^2 + 2a_{12} a_{21} > 0$ .

Далее во многих случаях мы сначала будем рассматривать вопрос о поведении траекторий в окрестности точки равновесия  $(0, 0)$ . В связи с этим мы рассмотрим, какие предположения нужно делать относительно функции  $f(x)$  в уравнениях (5.1) дополнительно к тем, которые даны неравенствами (5.3), (5.4), (5.6), (5.7) и (5.9), (5.10).

§ 12. Пусть дано, что

$$f(x) < ax \quad (x > 0), \quad f(x) > ax \quad (x < 0) \quad (12.1)$$

Тогда можно записать

$$f(x) = ax - \alpha(x) \quad (12.2)$$

где

$$\alpha(x) > 0 \quad (x > 0), \quad \alpha(x) < 0 \quad (x < 0) \quad (12.3)$$

Если

$$f(x) > ax \quad (x > 0), \quad f(x) < ax \quad (x < 0) \quad (12.4)$$

то в равенстве (12.2)

$$\alpha(x) < 0 \quad (x > 0), \quad \alpha(x) > 0 \quad (x < 0) \quad (12.5)$$

За постоянную  $a$ , как видно из неравенств (5.3), (5.6) и (5.9), можно брать

$$a = -(a_{11} + a_{22}) \quad (12.6)$$

$$a = -\frac{\Delta}{a_{22}} \quad (12.7)$$

$$a = -\frac{\Delta}{a_{22}} = -(a_{11} + a_{22}) \quad (12.8)$$

или

$$a = -a_{11} \quad (12.9)$$

Заменяя  $f(x)$  по формуле (12.2), вместо системы (5.1) получим

$$\frac{dx}{dt} = (a_{11} + a)x + a_{12}y - \alpha(x), \quad \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y \quad (12.10)$$

Здесь в согласии с (4.16), (4.13) и (4.18) характеристические числа линейной системы будут:

в случае (12.6)

$$\xi_1 = i\sqrt{-D}, \quad \xi_2 = -i\sqrt{-D} \quad \left( \begin{array}{l} D = a_{22}^2 + a_{12}a_{21} < 0 \\ \text{в силу (4.15)} \end{array} \right) \quad (12.11)$$

в случае (12.7)

$$\xi_1 = 0, \quad \xi_2 = \frac{D}{a_{22}} < 0 \quad \left( \begin{array}{l} D < 0 \text{ при } a_{22} > 0 \text{ согласно (4.9)} \\ D > 0 \text{ при } a_{22} < 0 \text{ согласно (4.14)} \end{array} \right) \quad (12.12)$$

в случае (12.8)

$$\xi_1 = 0, \quad \xi_2 = 0 \quad (12.13)$$

в случае (12.9)

$$\xi_1 = i\sqrt{-a_{12}a_{21}}, \quad \xi_2 = i\sqrt{-a_{12}a_{21}} \quad \left( \begin{array}{l} -a_{12}a_{21} > 0 \\ \text{согласно (4.3)} \end{array} \right) \quad (12.14)$$

Предположим теперь, что функция  $\alpha(x)$  в первом уравнении (12.10) содержит линейный член от  $x$ , т. е.

$$\alpha(x) = \beta x + \omega(x) \quad (12.15)$$

Здесь полагаем  $d\omega/dx \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow 0$  (или  $x^{-1}\omega(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow 0$ ), что и означает, в частности, что  $\omega(x)$  не содержит линейный член в окрестности  $x = 0$ . В случае (12.1)  $\beta > 0$ , а в случае (12.4)  $\beta < 0$ .

Заменяя в уравнениях (12.10)  $\alpha(x)$  по формуле (12.15), получим

$$\frac{dx}{dt} = (a_{11} + a - \beta)x + a_{12}y - \omega(x), \quad \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y \quad (12.16)$$

Характеристические числа линейной системы здесь найдутся в виде

$$\xi_{1,2} = \frac{a_{11} + a_{22} + a - \beta \pm \sqrt{(a_{11} + a_{22} + a - \beta)^2 - 4[\Delta + (a - \beta)a_{22}]}}{2} \quad (12.17)$$

Покажем, что при всех возможных значениях  $a$  вещественные части характеристических чисел  $\xi_1, \xi_2$  будут отрицательны. Пусть согласно (4.6), когда  $a_{22} > 0$ , имеем (12.6)  $a = -(a_{11} + a_{22})$ . Тогда

$$\xi_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4[\Delta - (a_{11} + a_{22} + \beta)a_{22}]}}{2} \quad (12.18)$$

Подставим  $f(x)$ , данное формулой (12.2) и (12.15), в левое неравенство (5.3). Получим

$$\Delta - (a_{11} + a_{22} + \beta) a_{22} - a_{22} \frac{\omega(x)}{x} > 0 \quad (12.19)$$

Так как  $x^{-1}\omega(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow 0$ , то

$$\Delta - (a_{11} + a_{22} + \beta) a_{22} \geq 0 \quad (12.20)$$

т. е.

$$\beta \leq -\frac{D}{a_{22}}, \quad D = a_{22}^2 + a_{12}a_{21} < 0 \quad (12.21)$$

Если в (12.20) имеем неравенство, то  $\xi_1, \xi_2$ , данные формулой (12.18), могут быть или вещественные отрицательные, или комплексные с отрицательными вещественными частями.

Предположим  $\beta = -D/a_{22}$ , при этом, как видно из (12.19),  $\omega(x) < 0$  при  $x > 0$ . На основании (12.2) и (12.6) имеем

$$f(x) = -\frac{\Delta}{a_{22}}x - \omega(x) \quad (12.22)$$

Это приводит, таким образом, к случаю, когда в равенстве (12.2)  $\alpha$  дано равенством (12.7) и  $\alpha(x)$  не содержит линейного члена; при этом, так как  $\omega(x) < 0$  при  $x > 0$ , функция  $\alpha(x)$  обладает свойством (12.4), как и должно быть в согласии с (5.3), (5.4) Предположим теперь

$$a = -\frac{\Delta}{a_{22}}, \quad a_{22} > 0; \quad f(x) = -\frac{\Delta}{a_{22}}x + \beta x + \omega(x), \quad \beta > 0 \quad (12.23)$$

Вместо (12.18) получим

$$\xi_{1,2} = \frac{D + \beta a_{22} \pm \sqrt{(D + \beta a_{22})^2 - 4\beta a_{22}^3}}{2a_{22}} \quad (12.24)$$

Подставляя  $f(x)$  согласно (12.23) в (5.3), мы получим, так же как в предыдущем случае,  $D + \beta a_{22} \leq 0$ . В случае неравенства  $\xi_1$  и  $\xi_2$ , данные формулой (12.24), или будут вещественные отрицательные, или комплексные с отрицательной вещественной частью. Если же  $\beta = -D/a_{22}$ , то мы имеем в сущности случай

$$f(x) = -(a_{11} + a_{22})x - \alpha(x) \quad (12.25)$$

где  $\alpha(x)$  не содержит линейного члена. Это последнее доказывается так же, как и (12.22).

Если  $a = -(a_{11} + a_{22})$  или  $a = -\Delta/a_{22}$  при  $a_{22} < 0$ , то в случае, когда  $\alpha(x)$  в (12.2) содержит линейный член от  $x$ ,  $\xi_1$  и  $\xi_2$  будут иметь отрицательные вещественные части.

Во всех этих случаях, следовательно, решение  $x = 0, y = 0$  уравнений (5.1) асимптотически устойчиво по Ляпунову. Этим доказана.

*Теорема 12.1.* Если  $\alpha(x)$  в равенстве (12.2), где  $a$  дано одним из равенств (12.6), (12.7), (12.8) или (12.9), содержит линейный член от  $x$ , то либо всякое решение системы уравнений (5.1), начинающееся в окрестности точки равновесия  $(0, 0)$ , обладает свойством  $x(t) \rightarrow 0, y(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ , либо эта система уравнений приводится снова к случаю, когда в равенстве (12.2)  $\alpha(x)$  не содержит линейный от  $x$  член.



Последнее возможно только при  $a_{22} > 0$ , и этот случай мы будем называть вырожденным.

*Замечание.* Относительно качественной картины уравнений (5.1) здесь можно сказать следующее.

Если  $\xi_1$  и  $\xi_2$  — вещественные отрицательные, то точка равновесия  $(0, 0)$  будет узлом (см. [2], стр. 92). Когда же  $\xi_1$  и  $\xi_2$  — комплексные с отрицательной вещественной частью, то точка  $(0, 0)$  есть фокус.

Что можно сказать здесь о поведении траекторий в целом? Для решения этого вопроса необходимо выяснить, существует или нет периодическое решение рассматриваемой системы.

Переходим к выяснению этого вопроса для уравнений (12.10).

§ 13. Для уравнений (12.10) интеграл Бендиксона получаем в виде

$$J = \iint_{\Gamma} (a_{11} + a_{22} + a) dx dy - \iint_{\Gamma} d\alpha(x) dy \quad (13.1)$$

где пусть область  $\Gamma$  ограничена замкнутой интегральной кривой  $C$  уравнений (12.10). Мы видели, что вещественная часть характеристических чисел  $\xi_1, \xi_2$  линейной системы, соответствующей уравнениям (12.10), не больше нуля. Поэтому

$$a_{11} + a_{22} + a \leq 0 \quad (13.2)$$

Но тогда

$$J_1 = \iint_{\Gamma} (a_{11} + a_{22} + a) dx dy = (a_{11} + a_{22} + a) S \leq 0 \quad (13.3)$$

где  $S$  — площадь области  $\Gamma$ .

Предположим  $\alpha(x)$  — монотонная функция. Тогда на основании (12.3) и того, что согласно (5.2)  $\alpha(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow 0$ , имеем  $d\alpha(x) \geq 0$ . Отсюда следует, что  $J < 0$  и, следовательно, периодического решения нет.

Пусть теперь  $d\alpha(x)/dx$  существует. Тогда (13.1) можно записать в виде

$$J = \iint_{\Gamma} (a_{11} + a_{22} + a - \alpha'(x)) dx dy \quad (13.4)$$

Предположим

$$a_{11} + a_{22} + a - \alpha'(x) \leq 0 \quad (13.5)$$

Тогда снова имеем  $J < 0$  и замкнутого решения нет. Этим доказана: *Теорема 13.1.* Система уравнений (12.10) не имеет периодического решения, если  $\alpha(x)$  монотонная или выполнено условие (13.5).

Теперь можно высказать и следующую теорему.

*Теорема 13.2.* Предположим:

1. Функция  $\alpha(x)$  в равенстве (12.2) содержит линейный член и при  $a_{22} > 0$  это не вырожденный случай.

2. Периодических решений уравнения (5.1) не имеют.

Тогда всякое решение уравнений (5.1) обладает свойством  $x(t) \rightarrow 0, y(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Эта теорема следует из теоремы 1.3 в силу теорем 12.1 и 10.1.

Например, если выполнены условия теоремы 13.1 и первое условие теоремы 13.2, то решения уравнений (5.1) обладают свойством  $x(t) \rightarrow 0, y(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .



§ 14. Покажем теперь, что во всяком случае можно указать некоторую ковечную область, окружающую точку  $(0, 0)$ , в которую не заходит периодическое решение системы уравнений (12.10). Для уравнений (12.10) семейство экстремалей  $l(\lambda)$  согласно (3.1) дается уравнением

$$D(x, y) = a_{11} + a_{22} + a - \alpha'(x) = \lambda \quad (14.1)$$

Следовательно, семейство  $l(\lambda)$  есть семейство прямых

$$x = x_k = \psi_k(\lambda) \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (14.2)$$

Уравнение кривой контактов семейства  $l(\lambda)$  здесь будет на основании (3.16)

$$(a_{11} + a)x + a_{12}y - \alpha(x) = 0 \quad (14.3)$$

т. е. кривая (7.2).

Так как  $\alpha(x)$  определена при всех  $x$ , то кривая контактов (14.3) уходит в бесконечность справа и слева от оси  $y$ . Если  $\psi_k(0)$  не существует, то  $J \neq 0$  и периодическое решение не существует. Этот случай рассмотрен предположением (13.5).

Предположим, что

$$x_k(0) = \psi_k(0) \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (14.4)$$

конечное или бесконечное число; пусть  $x_1(0)$ ,  $x_2(0)$  суть два наименьшие по модулю и  $x_1(0) < 0$ ,  $x_2(0) > 0$ .

Тогда можно утверждать, что в полосе  $x = x_1(0)$ ,  $x = x_2(0)$  не может целиком лежать периодическое решение.

Действительно, так как  $\alpha(0) = 0$ , то на основании (13.2) не может быть

$$a_{11} + a_{22} + a - \alpha'(x) > 0 \quad (14.5)$$

в промежутке  $(x_1(0), 0)$  или  $(0, x_2(0))$ , так как  $\alpha(x) > 0$  при  $x > 0$  и  $\alpha(x) < 0$  при  $x < 0$ .

В самом деле, при (14.5) в силу (13.2) имеем  $\alpha'(x) < 0$  и потому невозможно  $\alpha(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow 0$ . Следовательно, в указанной полосе  $D(x, y) < 0$  и периодическое решение не может целиком лежать в этой полосе.

Из уравнения (14.3) при  $x = x_2(0)$  находим ординату  $y = y_2(0)$  контакта прямой  $x = x_2(0)$ .

Построим уравнение прямой (10.12), проходящей через точку  $C(x_2(0), y_2(0))$ , т. е. возьмем прямую

$$y = \frac{a_{22}}{a_{12}}x + y_0, \quad a_{12}y_0 = \alpha(x_2(0)) - (a_{11} + a_{22} + a)x_2(0) > 0 \quad (14.6)$$

Рассмотрим интегральную кривую  $L$ , проходящую через точку  $C(x_2(0), y_2(0))$ . Мы показали ранее, что интегральная кривая, проходящая через точку  $(0, y_0)$  оси  $y$ , расположена ниже прямой (10.12) при  $x > 0$  и в точке пересечения с кривой (7.2) абсцисса  $x$  интегральной кривой достигает максимума.

Отсюда следует, что кривая  $L$  расположена до встречи с прямой (14.6) выше этой прямой и после встречи с прямой (14.6) левее прямой  $x = x_2(0)$ .

Но тогда ясно, что движения, пересекающие положительную полуось в точках ниже  $y_0$ , определенного в (14.6), расположены левее прямой  $x = x_2(0)$  при  $x > 0$  и не могут быть периодическими. Можно сказать, что вообще периодическое движение не заходит в область, ограниченную осью  $y$  прямой (14.6) и прямой  $y = y_0(0)$ . Будем называть эту область (фиг. 8) областью  $A^+$ .

Обозначим через  $A^-$  область, ограниченную прямой

$$y = \frac{a_{22}}{a_{12}}x + y_0^{(1)}, \quad a_{12}y_0^{(1)} = \alpha(x_1(0)) - (a_{11} + a_{22} + a)x_1(0) < 0 \quad (14.7)$$

осью  $y$  и прямой  $y = y_1(0)$ , где величина  $y_1(0)$  дается равенством

$$(a_{11} + a)x_1(0) + a_{12}y_1(0) - \alpha(x_1(0)) = 0$$

Тогда можно утверждать, что периодическое движение, если оно есть, не заходит в области  $A^+$  и  $A^-$ . Отсюда на основании теоремы 10.1 и теоремы 1.3 следует

*Теорема 14.1.* Если  $\alpha(x)$  в равенстве (12.2) содержит линейный член и при  $a_{22} > 0$  это не вырожденный случай, то всякое решение уравнений (5.1), начинающееся в зоне  $A^+$  или  $A^-$ , обладает свойством  $x(t) \rightarrow 0, y(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

На самом деле, зона асимптотической устойчивости шире, она будет ограничена, например при  $x > 0$ , интегральной кривой, проходящей через точку  $(x_2(0), y_2(0))$ , прямой (7.1) и осью  $y$ .

Отметим еще, что можно предполагать  $y_2(0) < 0$  и  $y_1(0) > 0$ . Это будет ясно из дальнейшего (см. § 19 и теорему 19.1).

*Замечание.* Предполоим, что в уравнении (5.1) мы подчиним  $f(x)$  не условиям (5.3), (5.4) или (5.6), (5.7) или (5.9), (5.10), а более жесткому, взяв вместо  $a$  величину  $a - \epsilon$ , где  $\epsilon > 0$  и  $a$  дано равенствами (12.6), или (12.7), или (12.8).

Тогда будем иметь, например,

$$f(x) < (a - \epsilon)x \quad \text{при } x > 0 \quad \text{или} \quad f(x) = (a - \epsilon)x - \alpha(x)$$

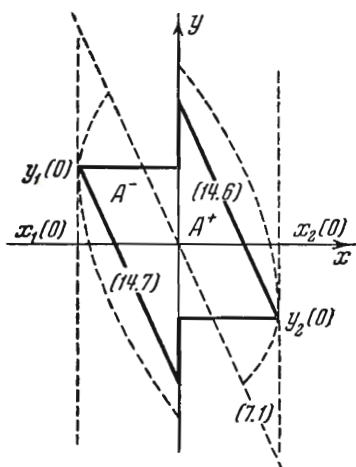
где  $\alpha(x) > 0$  при  $x > 0$ .

Мы получим соответственно вместо (12.10) уравнения вида (12.16), где вместо  $\beta > 0$  будет  $\epsilon > 0$  и вместо функции  $\omega(x)$  неопределенного знака, функция  $\alpha(x) > 0$  при  $x > 0$ . Следовательно, изменение величины  $a$  (см. замечание М. А. Айзермана во введении) на  $\epsilon$  равносильно изменению линейного члена функции  $\alpha(x)$ .

Как при этом изменится качественная картина или явление устойчивости, видно из теоремы 13.2 и замечания к теореме 12.1. В частности, такое изменение  $a$  приводит всегда к асимптотической устойчивости, когда  $a_{22} < 0$ .

Заметим, что в последующих рассуждениях можно предполагать

$$x^{-1}\omega(x) \rightarrow 0 \quad \text{или} \quad d\omega(x)/dx \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow 0$$



Фиг. 8

§ 15. Будем снова рассматривать уравнения (5.1), предполагая

$$a_{22} < 0, \quad a_{12} > 0, \quad a_{21} < 0; \quad D = a_{22}^2 + a_{12}a_{21} > 0 \quad (15.1)$$

где последнее равносильно неравенству

$$a = -\frac{\Delta}{a_{22}} < -(a_{11} + a_{22}) \quad (15.2)$$

В уравнениях (5.1) можно, следовательно, положить

$$f(x) = ax - \alpha(x) \quad \begin{cases} \alpha(x) > 0 & \text{при } x > 0 \\ \alpha(x) < 0 & \text{при } x < 0 \end{cases} \quad (15.3)$$

Для такой функции  $f(x)$  уравнения (5.1) принимают вид:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{a_{12}a_{21}}{a_{22}}x + a_{12}y - \alpha(x), \quad \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y \quad (15.4)$$

Заменим эту систему эквивалентной, умножая правые части на положительное число  $-a_{22}$ . Получим

$$\frac{dx}{dt} = -a_{12}a_{21}x - a_{12}a_{22}y - \alpha(x), \quad \frac{dy}{dt} = -a_{21}a_{22}x - a_{22}^2y \quad (15.5)$$

Здесь  $\alpha(x)$  отличается от прежнего  $\alpha(x)$  положительным множителем  $-a_{22}$ . Напомним, что характеристические числа линейной системы здесь суть  $\xi_1 = 0$ ,  $\xi_2 = -D < 0$ . Введем новые переменные

$$X = a_{22}x - a_{12}y, \quad Y = a_{21}x + a_{22}y$$

Тогда вместо уравнений (15.5) получим

$$\frac{dX}{dt} = -a_{22}\alpha\left(\frac{a_{22}X + a_{12}Y}{D}\right), \quad \frac{dY}{dt} = -DY - a_{21}\alpha\left(\frac{a_{22}X + a_{12}Y}{D}\right) \quad (15.6)$$

Предположим,  $\alpha(p)$  в окрестности  $p = 0$  задано рядом

$$\alpha(p) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu}p^{2\nu+1} \quad (a_1 > 0) \quad (15.7)$$

в согласии с (15.3). На основании прежних рассуждений  $\alpha(p)$  может не содержать линейный член от  $p$ .

При таком задании  $\alpha(p)$  система (15.6) легко изучается по Ляпунову. В обозначениях Ляпунова здесь будет

$$X^{(0)} = -a_{22}\alpha\left(\frac{a_{22}X + a_{12}Y}{D}\right)\Big|_{Y=0} = -a_1\frac{a_{22}^4}{D^3}X^3 + \dots \quad (15.8)$$

При этом на основании (15.1) и (15.7) коэффициент при  $X^3$

$$g = -a_1\frac{a_{22}^4}{D^3} < 0 \quad (15.9)$$

Если в (15.7)  $a_1 = a_2 = \dots = a_{m-1} = 0$  и  $a_m > 0$  в силу (15.3), то коэффициент при нижней степени  $X$  в  $X^{(0)}$  снова будет отрицательным. По теореме Ляпунова<sup>[4]</sup> (стр. 126) невозмущенное движение  $X = 0$ ,  $Y = 0$  системы (15.6), а следовательно, и (5.1) будет устойчивое и притом асимптотически. Принимая во внимание теоремы 10.1 и 1.3,



**Теорема 15.1.** Если  $\alpha(p)$  дано рядом (15.7), то все решения системы (5.1), начинающиеся<sup>1</sup> в области  $A^+$  или  $A^-$ , обладают свойством  $x \rightarrow 0$ ,  $y \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

*Замечание.* Если в ряде, представляющем  $\alpha(p)$ , имеется первая степень  $p$ , то теорема 15.1 остается в силе на основании теоремы 12.1.

**§ 16.** Пусть теперь  $\alpha(x)$  в первом уравнении (15.5) задана рядом типа (15.7), в котором суммирование может начинаться и с  $\nu = 0$ .

Мы показали, что в этом случае для уравнений (15.5) имеет место асимптотическая устойчивость по Ляпунову.

Предположим, что интегральная кривая уравнений (15.5) проходит<sup>2</sup> на положительной полуоси  $y$  в зоне  $A^+$  точку  $M_0(0, y_0)$  с ординатой  $y_0 > 0$  и после этого приходит в точку  $M_1(0, y_0^{(1)})$  отрицательной полуоси  $y$  с ординатой  $y_0^{(1)} < 0$ . Покажем, что при этом должно быть  $-y_0^{(1)} < y_0$ .

Предположим обратное, т. е.  $-y_0^{(1)} \geq y_0$ . Продолжим тогда интегральную кривую далее. Так как при  $x < 0$  условия симметричны, то интегральная кривая вернется на положительную полуось  $y$  в точку  $M(0, y^0)$  с ординатой  $y^0 \geq y_0$ . Но это противоречит асимптотической устойчивости, так как ось  $y$  пересекается движениями по часовой стрелке. Следовательно, обязательно, будет  $OM < OM_1 < OM_0$ . Таким образом, мы имеем теорему.

**Теорема 16. 1.** Всякое движение (15.5), где  $\alpha(p)$  задано рядом

$$\alpha(p) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} p^{2\nu+1} \quad (16.1)$$

после пересечения положительной полуоси  $y$  в зоне  $A^+$  или входит в точку равновесия, не доходя до отрицательной полуоси, или пересекает отрицательную полуось  $y$  в точке  $M_1$  ближе от точки  $(0, 0)$ , чем  $M_0$ .

*Следствие.* Если при  $p < 0$  функция  $\alpha(p)$  задана рядом типа (16.1), но отличным от того, который определяет  $\alpha(p)$  при  $p > 0$ , то теорема 15.1 остается в силе.

**§ 17.** Для дальнейшего сделаем одно замечание относительно полиномов наилучшего приближения непрерывных функций. Пусть  $\varphi(x)$  есть непрерывная и нечетная функция в промежутке  $(-1, +1)$ .

Возьмем полином Бернштейна<sup>[6]</sup> (стр. 22, 23) для функции  $\varphi(x)$ .

$$\varphi(x) \approx B_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \varphi\left(\frac{2k-n}{n}\right) C_n^k (1+x)^k (1-x)^{n-k} \quad (17.1)$$

Так как  $\varphi(x)$  нечетная, то  $\varphi(x) + \varphi(-x) = 0$ . Поэтому

$$2^n B_n(0) = \sum_{k=0}^n \varphi\left(\frac{2k-n}{n}\right) C_n^k = 0 \quad (17.2)$$

$$2^n B_n'(0) = \sum_{k=0}^n \varphi\left(\frac{2k-n}{n}\right) C_n^k [2k-n] < 0 \quad (17.3)$$

если  $\varphi(x) < 0$  при  $x > 0$ , так как  $x\varphi(x) < 0$  при  $x \neq 0$ .

<sup>1</sup> Слова «начинающиеся в области  $A^+$  или  $A^-$ » можно опустить, если нет периодических решений, например, если  $\alpha(p)$  монотонная или имеем условие (13.5).

<sup>2</sup> См. примечание к теореме 15.1.



Таким образом, свободный член полинома  $B_n(x)$  будет равен нулю и коэффициент при первой степени всегда будет отрицательным в случае  $\varphi(x) < 0$  при  $x > 0$ .

Известно, что  $B_n(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  равномерно стремится к  $\varphi(x)$ .

Предположим теперь, что  $\alpha(x)$  в первом уравнении (15.5) непрерывная нечетная функция и согласно (15.3)  $\alpha(x) > 0$  при  $x > 0$ . Тогда можно написать

$$-\alpha(x) = B_n(x) + S_n(x) \quad (17.4)$$

где полином  $B_n(x)$  построен для промежутка  $(-l, l)$  и  $|S_n(x)| < \varepsilon$  на отрезке  $(-l \leq x \leq l)$  для  $n \geq N$ .

На основании (17.3) коэффициент  $g$  при первой степени  $x$  в  $B_n(x)$  будет отрицательным:  $g < 0$ .

§ 18. Рассмотрим две системы уравнений:

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} = -a_{12}a_{21}x^{(1)} - a_{12}a_{22}y^{(1)} + B_n(x^{(1)}), \quad \frac{dy^{(1)}}{dt} = -a_{21}a_{22}x^{(1)} - a_{22}^2y^{(1)} \quad (18.1)$$

и

$$\frac{dx}{dt} = -a_{12}a_{21}x - a_{12}a_{22}y + B_n(x) + S_n(x), \quad \frac{dy}{dt} = -a_{21}a_{22}x - a_{22}^2y \quad (18.2)$$

где  $|S_n(x)| < \varepsilon_n$  на отрезке  $(-l \leq x \leq l)$  для  $n \geq N$ .

Тогда, как известно (см. [1], а также [2], стр. 21), если  $x(\tau) - x^{(1)}(\tau) = 0$  и  $y(\tau) - y^{(1)}(\tau) = 0$ , то

$$\begin{aligned} x(t) - x^{(1)}(t) &= E_1 \varepsilon_n \frac{e^{W(t-\tau)} - 1}{W} \\ y(t) - y^{(1)}(t) &= E_2 \varepsilon_n \frac{e^{W(t-\tau)} - 1}{W} \end{aligned} \quad (t > \tau) \quad (18.3)$$

Здесь  $|E_1|, |E_2| < 1$ , величина  $W$  — постоянная для фиксированного промежутка  $(-l, l)$  и  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Пусть  $x(t), y(t)$  — некоторое движение системы (18.2), проходящее точку  $M_0(0, y_0)$  на положительной полуоси  $y$  в момент  $t = \tau$  и проходящее в точку  $M_1(0, y_1)$  отрицательной полуоси  $y$  в момент  $t = T$ .

Возьмем движение системы (18.1)  $x^{(1)}(t), y^{(1)}(t)$ , также проходящее точку  $M_0(0, y_0)$  в момент  $t = \tau$ . Мы видели (теорема 16.1), что все движения системы (18.1) либо входят в точку равновесия  $(0, 0)$  при  $t \rightarrow \infty$ , не доходя до отрицательной полуоси  $y$ , либо пересекают отрицательную полуось  $y$  в таких точках  $M_1^{(1)}(0, y_1^{(1)})$ , что  $-y_1^{(1)} < y_0$ .

Докажем теперь, что должно быть и  $-y_1 \leq y_0$ .

Предположим, это не так и, наоборот,  $y_0 < -y_1$ . Пусть при  $n \rightarrow \infty$  мы имеем также уравнения (18.1), для которых решения  $x^{(1)}(t), y^{(1)}(t)$  входят в точку равновесия до пересечения с отрицательной полуосью  $y$ . Тогда, применяя формулы (18.3) для  $t = T + \delta$  ( $\delta > 0$ ), мы увидим, что для всех  $n \geq N$  (когда  $\varepsilon_n$  будут достаточно малы) движения  $x^{(1)}(t), y^{(1)}(t)$  уравнений (18.1) пересекают отрицательную полуось  $y$ , так как входят в как угодно малую окрестность точки  $x(T + \delta), y(T + \delta)$ , лежащей в третьей четверти. Но это противоречит предположению о том,

что траектории  $x'(t)$ ,  $y^{(1)}(t)$  входят в точку  $(0, 0)$ , не доходя до отрицательной полуоси  $y$ .

Если, наоборот, при  $n \rightarrow \infty$  имеем движения системы (18.1), пересекающие отрицательную полуось, то снова при достаточно больших  $n$  (и, следовательно, малых  $\varepsilon_n$ ) эти траектории в силу (18.3) и принятого допущения  $y_0 < -y_1$  пересекают отрицательную полуось  $y$  в точках  $y_1^{(1)} < -y_0$ , что невозможно, так как  $-y_1^{(1)} < y_0$ . Таким образом, допущение  $y_0 < -y_1$  невозможно.

Случай  $y_0 = -y_1$  также невозможен, если нет периодического решения. Действительно, если имеем  $y_0 = -y_1$ , то в силу симметрии условия  $\alpha(x) + \alpha(-x) = 0$  точка  $x(t)$ ,  $y(t)$  возвратится на положительную полуось в точку  $M(0, y_0)$  и, следовательно,  $x(t)$ ,  $y(t)$  будет периодическим решением, которое не должно быть по предположению.

Утверждение  $-y_1 \leq y_0$  доказано<sup>1</sup>. Этим доказана и общая теорема.

*Теорема 18.1.* Всякое движение уравнений (15.5), а тем самым и уравнений (5.1), начинающееся<sup>2</sup> в зоне  $A^+$  и  $A^-$ , при условиях (15.1), т. е. (15.2), обладает свойством  $x(t) \rightarrow 0$  и  $y(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Напомним, что здесь предполагается непрерывность  $\alpha'(x)$ , так как это необходимо при построении зон  $A^+$  и  $A^-$  [например, при рассмотрении уравнения (14.1)].

**§ 19.** Переходим к исследованию вопроса при помощи некоторых геометрических соображений, основанных на дополнительных предположениях относительно  $f(x)$ . Этот метод позволяет не только показать устойчивость движения (в случаях, не охваченных предыдущими рассуждениями), но и построить некоторые мажорантные элементарные кривые.

Мы будем снова предполагать условия (15.1). Тогда следует рассматривать уравнения (15.5), которые запишем так:

$$\frac{dx}{dt} = -a_{12}a_{21}x - a_{12}a_{22}y - a_{12}\alpha(x), \quad \frac{dy}{dt} = -a_{21}a_{22}x - a_{22}^2y \quad (19.1)$$

Отсюда имеем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{21}x + a_{22}y}{a_{21}x + a_{22}y + \alpha(x)} \frac{a_{22}}{a_{12}} \quad \left( \begin{array}{l} \alpha(x) > 0 \quad (x > 0) \\ \alpha(x) < 0 \quad (x < 0) \end{array} \right) \quad (19.2)$$

Введем в рассмотрение прямые  $(X)$  и  $(Y)$ :

$$(X) \quad a_{12}y - a_{22}x = 0 \quad (19.3)$$

$$(Y) \quad a_{21}x + a_{22}y = 0 \quad (19.4)$$

Рассмотрим фиг. 9. Прямая (19.4) лежит выше прямой  $(X)$  при  $x > 0$ , так как  $D = a_{22}^2 + a_{12}a_{21} > 0$  по условию (15.1).

Предположим, точка  $M(t)$  некоторого движения пересекает положительную полуось  $y$  в точке с ординатой  $y_0$ . Тогда, как показано ранее,

<sup>1</sup> Симметрию задания  $\alpha(x)$ , очевидно, можно отбросить. См. следствие из теоремы 16.1.

<sup>2</sup> См. примечание к теореме 15.1.





Предположим теперь, что кривая (19.6) имеет точку  $(x^\circ, y^\circ)$  при  $x^\circ > 0$  не ниже прямой (19.11) и точку  $(x_1^\circ, y_1^\circ)$  при  $x_1^\circ < 0$  не выше прямой (19.11). Проведем через эти точки прямые типа (19.5)

$$y = y_0 + \frac{a_{22}}{a_{12}} x \quad \left( y_0 = \frac{a_{12}y^\circ - a_{22}x^\circ}{a_{12}} \right) \quad (19.12)$$

$$y = y_0 + \frac{a_{22}}{a_{12}} x \quad \left( y_0 = \frac{a_{12}y_1^\circ - a_{22}x_1^\circ}{a_{12}} \right) \quad (19.13)$$

Пусть  $Y_0$  — наименьший из модулей  $y_0$ , данных в равенствах (19.12) и (19.13). Проведем прямые

$$y = Y_0, \quad y = -Y_0; \quad x = x_1^\circ, \quad x = x^\circ \quad (19.14)$$

Обозначим через  $P$  область, ограниченную прямыми (19.12), (19.13) и прямыми (19.14). Тогда согласно (19.10) и теореме 10.1 имеем теорему.

**Теорема 19.1.** Всякое движение, определяемое уравнениями (19.1) и проходящее через точку области  $P$ , обладает свойством  $x(t) \rightarrow 0, y(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

*Следствие.* Если на кривой (19.6) имеются точки, лежащие не ниже прямой (19.11) при сколь угодно больших  $x$  и лежащие не выше этой прямой при сколь угодно больших по модулю, отрицательных  $x$ , то всякое решение уравнений (19.1) обладает свойством  $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

**§ 20.** Теперь будем предполагать, что все точки кривой (19.6) (сплошная линия на фиг. 9) расположены ниже прямой (19.11).

Пусть  $\beta \geq y/x$  при  $x > 0$  для всех точек кривой (19.6). В дальнейшем будем предполагать  $\beta < D/a_{12}a_{22}$ . Таким образом, все точки кривой (19.6) лежат не выше прямой  $y = \beta x$  при  $x > 0$ .

Пусть прямая  $y = \beta x$  проходит (фиг. 9) через точку  $b_1$  на прямой (19.5). Запишем абсциссу  $x_{b_1}$  точки  $b_1$  в виде

$$x_{b_1} = -\alpha_1 \frac{a_{12}a_{22}y_0}{D} \quad \left( \alpha = -\frac{D}{a_{12}a_{21}} < \alpha_1 < 1 \right) \quad (20.1)$$

При  $\alpha_1 = 1$  мы получаем абсциссу точки  $A$  и при  $\alpha_1 = \alpha$  абсциссу точки  $b$ . Ордината  $y_{b_1}$  точки  $b_1$  будет

$$y_{b_1} = y_0 \frac{D - \alpha_1 a_{22}^2}{D} \quad (20.2)$$

Следовательно, уравнение прямой  $y = \beta x$  можно записать в виде

$$y = -\frac{D - \alpha_1 a_{22}^2}{\alpha_1 a_{12} a_{22}} x \quad (20.3)$$

Запишем уравнение кривой (19.6) в виде

$$y = -\frac{a_{21}}{a_{22}} x - \frac{\alpha(x)}{a_{22}} \quad (20.4)$$

Предположим, что точки кривой (20.4) находятся не ниже прямой, проходящей через точки  $(0, 0)$  и  $b_2$ , уравнение которой имеет вид

$$y = -\frac{D - \alpha_2 a_{22}^2}{\alpha_2 a_{12} a_{22}} x \quad (\alpha_1 < \alpha_2 < 1) \quad (20.5)$$



Здесь при  $\alpha_2 = \alpha_1$  получаем прямую (20.3) и при  $\alpha_2 = 1$  прямую (Y) согласно (19.4).

Так как кривая (20.4) проходит между прямыми (20.3) и (20.5), то мы легко получим неравенства

$$\gamma_2 x < \alpha(x) < \gamma_1 x \quad \left( \gamma_2 = \frac{1 - \alpha_2}{\alpha_2 a_{12}} D, \quad \gamma_1 = \frac{1 - \alpha_1}{\alpha_1 a_{12}} D \right) \quad (20.6)$$

Обращаемся теперь к уравнению (19.2). Отметим прежде всего, что при  $x > 0$  будет:

$$a_{21}x + a_{22}y < 0 \quad \text{для точек, лежащих выше прямой (Y)} \quad (20.7)$$

$$a_{21}x + a_{22}y + \alpha(x) < 0 \quad \text{для точек, лежащих выше кривой (19.6)} \quad (20.8)$$

$$a_{21}x + a_{22}y + \alpha(x) > 0 \quad \text{для точек, лежащих ниже кривой (19.6)} \quad (20.9)$$

Для производной  $dy/dx$ , определенной (19.1), имеем

$$\frac{dy}{dx} < 0 \quad \text{в точках, лежащих выше кривой (19.6)} \quad (20.10)$$

$$\frac{dy}{dx} = \infty \quad \text{в точках, лежащих на кривой (19.6)} \quad (20.11)$$

$$\frac{dy}{dx} > 0 \quad \text{в точках, лежащих ниже кривой (19.6)} \\ \text{и выше прямой (19.4)} \quad (20.12)$$

$$\frac{dy}{dx} < 0 \quad \text{в точках, лежащих ниже прямой (19.4)} \quad (20.13)$$

Из уравнения (19.2) на основании выше описанных неравенств от (20.6) до (20.13) имеем

$$\frac{dy}{dx} < \frac{a_{21}x + a_{22}y}{a_{21}x + a_{22}y + \gamma_2 x} \frac{a_{22}}{a_{12}} \quad \left( \begin{array}{c} \text{в точках, лежащих выше} \\ \text{прямой (19.4)} \end{array} \right) \quad (20.14)$$

$$\frac{dy}{dx} < \frac{a_{21}x + a_{22}y}{a_{21}x + a_{22}y + \gamma_1 x} \frac{a_{22}}{a_{12}} \quad \left( \begin{array}{c} \text{в точках, лежащих ниже} \\ \text{прямой (19.4)} \end{array} \right) \quad (20.15)$$

Рассмотрим теперь дифференциальные уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{21}x + a_{22}y}{a_{21}x + a_{22}y + \gamma_2 x} \frac{a_{22}}{a_{12}}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{a_{21}x + a_{22}y}{a_{21}x + a_{22}y + \gamma_1 x} \frac{a_{22}}{a_{12}} \quad (20.16)$$

Предположим, интегральная кривая первого уравнения (20.16) прошла через точку  $y_0$  положительной полуоси  $y$  и встретила с прямой (Y) в точке  $(x_*, y_*)$ . Проведем далее из этой точки  $(x_*, y_*)$  интегральную кривую второго уравнения (20.16) до встречи с отрицательной полуосью  $y$  в точке  $y_0^{(1)}$ . Тогда в силу неравенств (20.14) и (20.15) точка встречи интегральной кривой уравнения (19.2), проходящей через точку  $y_0$ , с отрицательной полуосью расположена от начала координат ближе, чем  $y_0^{(1)}$ .

Уравнения (20.16) вообще можно представить в виде

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Ax + By}{Cx + Dy} \quad (20.17)$$

где

$$A = a_{21}a_{22}, \quad B = a_{22}^2, \quad C = (a_{21} + \gamma) a_{12}, \quad D = a_{12}a_{22} \quad (20.18)$$

Для установления качественной картины расположения интегральных кривых уравнения (20.17) необходимо найти, как известно [2] (стр. 85), корни квадратного уравнения

$$-a_{12}a_{22}z^2 + (a_{22}^2 - a_{12}a_{21} - \gamma a_{12})z + a_{21}a_{22} = 0 \quad (20.19)$$

Решая это уравнение и заменяя  $\gamma = \gamma_1$  по формуле (20.6), имеем

$$z_{1,2} = \frac{(a_{12}a_{21} - a_{22}^2)\alpha_1 + (1 - \alpha_1)D \pm \sqrt{\Delta}}{-2a_{12}a_{22}\alpha_1} \quad (20.20)$$

где

$$\Delta = \alpha_1^2 D^2 + 2D\alpha_1(1 - \alpha_1)(a_{12}a_{21} - a_{22}^2) + D^2(1 - \alpha_1)^2 \quad (20.21)$$

Здесь следует различать три случая:  $\Delta > 0$ ,  $\Delta = 0$ ,  $\Delta < 0$ . Покажем, что все эти случаи возможны. Представим (20.21) в виде

$$\Delta = \alpha_1^2 D^2 \left[ \tau^2 + 2\tau \frac{a_{12}a_{21} - a_{22}^2}{D} + 1 \right] \quad \left( \tau = \frac{1 - \alpha_1}{\alpha_1} \right) \quad (20.22)$$

Значения  $\tau = \tau_{1,2}$ , при которых  $\Delta = 0$ , будут

$$\tau_{1,2} = \frac{-(a_{12}a_{21} - a_{22}^2) \mp \sqrt{(a_{12}a_{21} - a_{22}^2)^2 - D^2}}{D} \quad (D = a_{22}^2 + a_{12}a_{21}) \quad (20.23)$$

Так как  $a_{22}^2 - a_{12}a_{21} > a_{22}^2 + a_{12}a_{21}$  в силу  $a_{12}a_{21} < 0$ , то значения  $\tau_1$  и  $\tau_2$  будут вещественными. И так как  $a_{22}^2 - a_{12}a_{21} > 0$ , то значения  $\tau_1$  и  $\tau_2$  будут положительными.

Легко показать, что  $\tau_1 < 1$  в силу  $D = a_{22}^2 + a_{12}a_{21} > 0$  и  $\tau_2 > 1$  на основании  $a_{12}a_{21} < 0$ . Таким образом, имеем

$$\Delta > 0 \quad \text{при } \tau < \tau_1 \text{ и при } \tau > \tau_2 \quad (20.24)$$

$$\Delta = 0 \quad \text{при } \tau = \tau_1 \text{ и при } \tau = \tau_2 \quad (20.25)$$

$$\Delta < 0 \quad \text{при } \tau_1 < \tau < \tau_2 \quad (20.26)$$

Случай (20.24), очевидно, возможен, так как  $1 - \alpha_1$  может быть как угодно малой величиной.

На основании (20.1) видим, что наибольшее значение  $\tau = \tau_0$  будет

$$\tau_0 = \frac{-a_{22}^2 + 2a_{12}a_{21}}{D} \quad (20.27)$$

Найдем условия, при которых будет  $\tau_1 < \tau_0$ . Подставляя сюда значения  $\tau_1$  согласно (20.23) и  $\tau_0$  согласно (20.27), получим

$$2a_{22}^2 + a_{12}a_{21} < \sqrt{-4a_{12}a_{21}a_{22}^2}$$

Отсюда, возводя в квадрат и учитывая, что  $a_{12}a_{21} < 0$ , имеем

$$\tau_1 < \tau_0 \quad \text{при } 2a_{22}^2 + (2 + \sqrt{3})a_{12}a_{21} < 0 \quad (20.28)$$

$$\tau_0 \leq \tau_1 \quad \text{при } 2a_{22}^2 + (2 + \sqrt{3})a_{12}a_{21} \geq 0 \quad (20.29)$$

Найдем условия, при которых будет

$$\tau_0 = -\frac{a_{22}^2 + 2a_{12}a_{21}}{D} \leq 1 \quad (D = a_{22}^2 + a_{12}a_{21}) \quad (20.30)$$

Очевидно, это имеем при

$$2a_{22}^2 + 3a_{12}a_{21} \geq 0 \quad (20.31)$$

Так как  $\tau < \tau_0$ , то при выполнении условий (20.31) имеем  $\tau < 1$ , а при условии

$$2a_{22}^2 + 3a_{12}a_{21} < 0 \quad (20.32)$$

возможно  $\tau > 1$ .

Покажем, наконец, что всегда будет  $\tau < \tau_2$ . Для этого достаточно показать, что  $\tau_0 < \tau_2$ .

Подставляя в неравенство  $\tau_0 < \tau_2$  значение  $\tau_0$  и  $\tau_2$  согласно (20.27) и (20.23), получим

$$-2a_{22}^2 - a_{12}a_{21} < \sqrt{(a_{22}^2 - a_{12}a_{21})^2 - D^2}$$

Но это выполнено, так как  $a_{22}^2 + a_{12}a_{21} > 0$ . Таким образом, неравенство  $\tau < \tau_2$  доказано.

Возвращаясь к осуществлению неравенств (20.24), (20.25) и (20.26), мы можем утверждать следующее. Если имеем (20.29), то будем иметь (20.24), так как  $\tau < \tau_0$ ; при этом  $\tau_1 < 1$  и, следовательно,

$$\frac{1 - \alpha_1}{\alpha_1} < 1, \quad \text{или} \quad \frac{1}{2} < \alpha_1 \quad (20.33)$$

Если выполнено (20.28), то возможен и случай (20.24), когда

$$\frac{1 - \alpha_1}{\alpha_1} < \frac{a_{22}^2 - a_{12}a_{21} - \sqrt{(a_{22}^2 - a_{12}a_{21})^2 - D^2}}{D} = \tau_1 \quad (20.34)$$

при этом будет и случай (20.33), так как  $\tau_1 < 1$ , и случай (20.25), когда

$$\frac{1 - \alpha_1}{\alpha_1} = \frac{a_{22}^2 - a_{22}a_{21} - \sqrt{(a_{22}^2 - a_{12}a_{21})^2 - D^2}}{D} = \tau_1 \quad (20.35)$$

а также случай (20.26), когда

$$\frac{1 - \alpha_1}{\alpha_1} > \tau_1 \quad (20.36)$$

Неравенство  $(1 - \alpha_1)/\alpha_1 < \tau_2$ , как показано, всегда выполнено.

§ 21. Рассмотрим случай (20.24). Найдем величины  $K_1$  и  $K_2$  (см.<sup>[2]</sup> стр. 85):

$$K_\nu = \frac{a_{21} + \gamma + z_\nu a_{22}}{a_{22}(z_1 - z_2)} \quad (\nu = 1, 2) \quad (21.1)$$

Подставляя сюда значение  $\gamma = \gamma_1$  из (20.6), получим

$$K_\nu = \frac{a_{12}a_{21}\alpha_1 + D(1 - \alpha_1) + a_{12}a_{22}\alpha_1 z_\nu}{a_{12}a_{22}\alpha_1(z_1 - z_2)} \quad (\nu = 1, 2)$$

Составим отношение  $K_1/K_2$ . Используя выражения (20.20) для  $z_1$  и  $z_2$ , получим

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{D - \sqrt{\alpha_1^2 D^2 + 2D\alpha_1(1 - \alpha_1)(a_{12}a_{21} - a_{22}^2)} + D^2(1 - \alpha_1)^2}{D + \sqrt{\alpha_1^2 D^2 + 2D\alpha_1(1 - \alpha_1)(a_{12}a_{21} - a_{12}^2)} + D^2(1 - \alpha_1)^2} \quad (21.2)$$

Легко показать, что

$$\sqrt{\alpha_1^2 D^2 + 2D\alpha_1(1 - \alpha_1)(a_{12}a_{21} - a_{22}^2)} + D^2(1 - \alpha_1)^2 < D$$

Действительно, возводя в квадрат, получим  $4 a_{22}^2 D \alpha_1 (\alpha_1 - 1) < 0$ , что выполнено, в силу  $\alpha_1 < 1$ . Следовательно, числитель и знаменатель отношения (21.2) положительные и, очевидно,

$$0 < \frac{K_1}{K_2} < 1 \quad (21.3)$$

Отсюда следует, что интегральные кривые второго из уравнений (20.16) входят в точку  $(0, 0)$  вдоль прямой  $y = z_1 x$ , где  $z_1$  дано формулой (20.20), когда перед корнем берется плюс.

Покажем, что прямая  $y = z_1 x$  расположена в четвертой четверти ниже прямой  $(Y)$ , определенной согласно (19.4) уравнением  $y = -(a_{21}/a_{22})x$ . С этой целью рассмотрим разность угловых коэффициентов

$$\delta = -\frac{a_{21}}{a_{22}} - z_1 = \frac{D[\alpha_1 - (1 - \alpha_1)] - \sqrt{\alpha_1^2 D^2 + 2\alpha_1 D(1 - \alpha_1)D_1 + D^2(1 - \alpha_1)^2}}{-2a_{12}a_{22}\alpha_1} \quad (21.4)$$

где

$$D_1 = a_{12}a_{21} - a_{22}^2$$

На основании (20.32) имеем  $\alpha_1 - (1 - \alpha_1) > 0$ . Опираясь на это, легко показать, что числитель выражения (21.4) есть величина положительная, а тогда ясно, что и

$$-\frac{a_{21}}{a_{22}} - z_1 > 0 \quad (21.5)$$

Этим показано, что в четвертой четверти прямая  $y = z_1 x$  ниже прямой  $(Y)$ .

Пользуясь (20.1) и тем, что  $a_{22} < 0$ , также легко докажем неравенство

$$\frac{a_{22}}{a_{12}} - z_1 < 0 \quad (21.6)$$

Это показывает, что прямая  $(X)$ , определенная (19.3), лежит ниже прямой  $y = z_1 x$  в четвертой четверти.

Таким образом, мы имеем следующий результат.

В случае (20.24), который имеем, когда выполнено (20.29) или (20.34), интегральные кривые второго уравнения (20.16) после пересечения прямой  $(Y)$ , на которой  $dy/dx = 0$ , входят в начало координат вдоль прямой  $y = z_1 x$ , которая расположена ниже прямой  $(Y)$  и выше прямой  $(X)$  в четвертой четверти. Но тогда на основании (20.15) имеем теорему.

**Теорема 21.1.** Если выполнено условие (20.29) или (20.33), то движения, определяемые уравнениями (19.1), пересекающие положительную полуось  $y$ , входят в точку  $(0, 0)$  при  $t \rightarrow \infty$  в секторе между прямой  $(Y)$ , определенной (19.4), и прямой  $y = z_1 x$ , где  $z_1$  дано формулой (20.20).

В теореме 21.1 предполагается, что кривая (19.6) расположена в четвертой четверти ниже прямой  $y = \beta x$ , где  $\beta < D/a_{12}a_{22}$ .

Из общей теории критических направлений известно, что интегральные кривые могут входить в начало координат или вдоль прямой  $(Y)$ , или вдоль прямой  $(X)$ . Но вдоль прямой  $(X)$  эти кривые входить в



точку  $(0,0)$  не могут, так как они не заходят за прямую  $y = z_1 x$ . Далее мы уточним расположение интегральных кривых.

Отметим, однако, сейчас одно важное обстоятельство. Соединим дугой окружности ось  $x$  с осью  $y$  в четвертой четверти. Тогда точки этой дуги можно разделить на два класса. Первый класс составляют те точки, через которые проходят интегральные кривые, входящие в точку  $(0,0)$  вдоль прямой  $(Y)$ . Второй класс составляют точки, через которые проходят интегральные кривые, пересекающие отрицательную полуось. Существование второго класса следует из прежних рассуждений.

Отсюда следует, что общая граничная точка этих классов принадлежит к первому классу (в силу теоремы 1 Бендиксона). Через эту точку проходит интегральная кривая  $L$ , входящая в начало координат вдоль прямой  $(Y)$  и не пересекающая ни оси  $y$  ни оси  $x$ , так как согласно теореме 21.1 интегральные кривые, проходящие через точки оси  $x$ , входят в точку  $(0,0)$ .

Эта интегральная кривая  $L$  проходит ниже кривой (19.6), так как интегральные кривые, пересекающие кривую (19.6), при  $t \rightarrow -\infty$  необходимо пересекают и ось  $x$ .

§ 22. Теперь будем предполагать, что имеется равенство (20.25), т. е.  $z_1 = z_2$ . Это возможно в том случае, когда выполнено равенство (20.35). Если имеем (20.25), то согласно (20.20)

$$z_1 = \frac{(a_{12}a_{21} - a_{22}^2)\alpha_1 + (1 - \alpha_1)D}{-2a_{12}a_{22}\alpha_1} \quad (22.1)$$

На основании (20.35) это можно переписать в виде

$$z_1 = \frac{V(a_{22}^2 - a_{12}a_{21})^2 - D^2}{2a_{12}a_{22}} = \frac{V - a_{12}a_{21}}{a_{12}} \quad (22.2)$$

Известно, что если выполнено равенство (20.25), то все интегральные кривые уравнения вида (20.16) входят в начало координат вдоль прямой  $y = z_1 x$ .

Как и раньше, легко убедиться в том, что прямая  $y = z_1 x$  расположена ниже прямой  $(Y)$  и выше прямой  $(X)$  в четвертой четверти. Это доставляет нам в силу (20.15) теорему.

*Теорема 22.1.* Если имеем равенство (20.35)

$$\frac{1 - \alpha_1}{\alpha_1} = \frac{a_{22}^2 - a_{12}a_{21} - V(a_{22}^2 - a_{12}a_{21})^2 - (a_{22}^2 + a_{12}a_{21})^2}{a_{22}^2 + a_{12}a_{21}}$$

или

$$\alpha_1 = \frac{a_{22} + V - a_{12}a_{21}}{2a_{22}} \quad (22.3)$$

то все движения системы (19.1), пересекающие положительную полуось  $y$ , входят в начало координат при  $t \rightarrow \infty$  в секторе между прямыми  $y = z_1 x$  и  $(Y)$  вдоль прямой  $(Y)$ .

Здесь снова существует интегральная кривая, входящая при  $t \rightarrow \infty$  в точку  $(0,0)$  вдоль прямой  $(Y)$  и целиком расположенная в четвертой четверти.

§ 23. Переходим к рассмотрению случая (20.26). При этом, как мы видели, выполняются неравенства (20.28) и (20.36). Если имеем (20.26), то  $z_1$  и  $z_2$  будут комплексными:

$$z_1 = a + ib, \quad z_2 = a - ib \quad (23.1)$$

где

$$a = \frac{(a_{12}a_{21} - a_{22}^2)\alpha_1 + D(1-\alpha_1)}{-2a_{12}a_{22}\alpha_1}, \quad b = \frac{\sqrt{-\Delta}}{-2a_{12}a_{22}\alpha_1} \quad (23.2)$$

и  $\Delta$  дано формулой (20.21).

Интегральные кривые уравнения типа (20.16) в этом случае даются формулой (см. [2], стр. 91)

$$\sqrt{b^2x^2 + (y - ax)^2} = C \exp \left\{ k \operatorname{arctg} \frac{y - ax}{bx} \right\} \quad (23.3)$$

где

$$k = - \frac{(a_{21} + \gamma) a_{12} + a a_{12} a_{22}}{b a_{12} a_{22}} \quad (23.4)$$

или подставляя  $\gamma = \gamma_1$  по формуле (20.6):

$$k = - \frac{a_{12} a_{21} \alpha_1 + D(1 - \alpha_1) + a a_{12} a_{22} \alpha_1}{b a_{12} a_{22} \alpha_1} \quad (23.5)$$

Заменяя здесь  $a$  и  $b$  их значениями по формулам (23.2), найдем

$$k = \frac{D}{\sqrt{-\Delta}} > 0 \quad (23.6)$$

Пусть интегральная кривая (23.3) проходит через точку  $(x_1, y_1)$  прямой  $(Y)$ , уравнение которой  $y = - (a_{21} / a_{22}) x$  согласно (19.4)

$$y = - \frac{a_{21}}{a_{22}} x$$

Тогда

$$C = x_1 \sqrt{b^2 + \left( a + \frac{a_{21}}{a_{22}} \right)^2} \exp \left\{ k \operatorname{arctg} \frac{a_{21} + a a_{22}}{b a_{22}} \right\} \quad (23.7)$$

Найдем ординату, отсекаемую кривой (23.3) на отрицательной полуоси  $y$ . Для этого в равенстве (23.3) полагаем  $x = 0$  и находим

$$y_0^{(1)} = - C \exp \frac{-k\pi}{2} \quad (23.8)$$

где  $C$  дается равенством (23.7).

Заменим в выражении (23.7)  $a$  и  $b$  их значениями из (23.2). Тогда получим после упрощений

$$C = x_1 \sqrt{\frac{(\alpha_1 - 1) a_{21} D}{a_{12} a_{22}^2 \alpha_1}} \exp \left\{ k \operatorname{arctg} \frac{D(1 - 2\alpha_1)}{\sqrt{-\Delta}} \right\} \quad (23.9)$$

Следовательно, вместо (23.8) можно написать

$$y_0^{(1)} = - x_1 \sqrt{\frac{(\alpha_1 - 1) a_{21} D}{a_{12} a_{22}^2 \alpha_1}} \exp \left\{ k \left[ \operatorname{arctg} \frac{D(1 - 2\alpha_1)}{\sqrt{-\Delta}} - \frac{\pi}{2} \right] \right\} \quad (23.10)$$

Здесь возможен случай

$$- y_0^{(1)} \leq y_0 \quad (23.11)$$

и тогда мы имеем теорему.

**Теорема 23.1.** Если имеем неравенство (23.11), то движение, определяемое уравнениями (19.1) и пересекающее положительную полуось  $y$  в точке  $y_0$ , или входит в точку  $(0,0)$  при  $t \rightarrow \infty$ , не доходя до отрицательной полуоси  $y$ , или приходит в точку отрицательной полуоси  $y$ , отстоящую от начала координат ближе, чем  $y_0$ .

*Следствие.* Если имеем неравенство типа (23.11) и в области  $x < 0$ , то для уравнений (19.1) имеем: всякое движение  $x, y$  обладает свойством  $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

§ 24. Укажем частные случаи, когда выполняется условие (23.14). Отметим, однако, сначала следующее. Чтобы найти значение  $x_1$  для формулы (23.10), можно написать следующее равенство:

$$y_0 = x_1 \sqrt{\frac{(\alpha_2 - 1)a_{21}D}{a_{12}a_{22}^2\alpha_2}} \exp \left\{ k_2 \left[ \operatorname{arctg} \frac{D(1 - 2\alpha_2)}{\sqrt{-\Delta_2}} + \frac{\pi}{2} \right] \right\} \quad (24.1)$$

где  $k_2$  и  $\Delta_2$  получаем из  $k$  и  $\Delta$  заменой  $\alpha_1$  величиной  $\alpha_2$ . Это равенство мы получаем из общего решения вида (23.3) первого уравнения (20.16), которое в силу (20.14) мажорирует интегральные кривые уравнения (19.2) выше прямой  $(Y)$ , определенной уравнением (19.4).

Здесь надо только заметить, что в уравнении (23.3) будем иметь

$$\operatorname{arctg} \frac{y - ax}{bx} \Big|_{x=0} = \frac{\pi}{2}$$

так как при  $x = 0$  должно быть  $y = y_0 > 0$ , в то время как ранее ввиду  $y_0^{(1)} < 0$  получали  $-\frac{1}{2}\pi$ . Равенство (24.1) можно писать независимо от того, будет ли  $\Delta_2 > 0$  или  $\Delta_2 < 0$  (и при  $\Delta_2 = 0$  берем предельное значение), так как окончательное выражение справа в формуле (24.1) будет вещественное, в чем нетрудно убедиться. Вместо (24.1) можно брать другие выражения в зависимости от того, какой из случаев (20.24) (20.25) или (20.26) имеем. Из (23.10) и (24.1) имеем

$$y_0^{(1)} = y_0 \sqrt{\frac{(\alpha_1 - 1)\alpha_2}{\alpha_1(\alpha_2 - 1)}} \exp \left\{ \frac{D}{\sqrt{-\Delta}} \left[ \operatorname{arctg} \frac{D(1 - 2\alpha_1)}{\sqrt{-\Delta}} - \frac{\pi}{2} \right] \exp \frac{-D}{\sqrt{-\Delta}} \left[ \operatorname{arctg} \frac{D(1 - 2\alpha_2)}{\sqrt{-\Delta_2}} + \frac{\pi}{2} \right] \right\} \quad (24.2)$$

Предположим кривая, (19.6) пересекается с прямой (19.5) в точке  $b_1$ , т. е. там же, где пересекается и прямая (20.3) с прямой (19.5). Абсцисса точки  $b_1$  согласно (20.1) есть

$$x_{b_1} = -\alpha_1 \frac{a_{12}a_{22}y_0}{D}$$

На кривой (19.6) абсцисса всякого движения достигает максимума. Поэтому

$$x_1 < -\alpha_1 \frac{a_{12}a_{22}y_0}{D}$$

Но тогда из (23.10) имеем

$$|y_0^{(1)}| = y_0 \sqrt{\frac{\alpha_1(\alpha_1 - 1)a_{12}a_{21}}{D}} \exp \left\{ k \left[ \operatorname{arctg} \frac{D(1 - 2\alpha_1)}{\sqrt{-\Delta}} - \frac{\pi}{2} \right] \right\} \quad (24.3)$$

Здесь показательная функция ввиду (23.6) меньше единицы. Выражение под корнем будет меньше единицы при  $\alpha_1$ , близком к единице, и, следовательно, имеем случай (23.11).



Или подкоренное выражение достигает максимума при  $\alpha_1 = \frac{1}{2}$  и будет равно  $-a_{12}a_{21}/4D$ . Но тогда, если

$$-\frac{a_{12}a_{21}}{4D} \leq 1, \text{ или } 4a_{22}^2 + 5a_{12}a_{21} \geq 0 \quad (24.4)$$

то случай (23.11) будет независимо от величины  $\alpha_1$ . Имеем теорему.

**Теорема 24.1.** Если для уравнений (19.1) кривая (19.6) расположена не выше прямой (20.3) ( $\alpha < \alpha_1 < 1$ ) при  $x > 0$  и не ниже прямой (20.3) при  $x < 0$  и имеет с прямой (20.3) общие точки для каких угодно больших  $|x|$  (и при  $x < 0$  и при  $x > 0$ ), то при выполнении условия (24.4) все движения (19.1) обладают свойствами  $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

*Замечание.* Если кривая (19.6) имеет общие точки с прямой (20.3) только при ограниченных  $|x|$  при  $x < 0$  и при  $x > 0$ , то указанным в теореме свойством решения обладают, если они начинаются в соответствующей ограниченной области (которую легко указать). Отметим еще, что указанным способом мажоранты для интегральных кривых можно строить не только с внешней стороны, но и с внутренней. Эти мажоранты можно строить отдельно по участкам, используя на разных участках  $x$  разные неравенства типа (20.6).

**§ 25.** Уточним качественную картину поведения интегральных кривых уравнений (15.5) в окрестности точки (0,0) при условиях (15.1)

Пусть  $\varphi$  — полярный угол и  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  — радиус-вектор точки  $x(t), y(t)$  движения (15.5). Тогда из уравнений (15.5) получим

$$\frac{d\varphi}{dt} = (a_{12} \sin \varphi - a_{22} \cos \varphi)(a_{22} \sin \varphi + a_{21} \cos \varphi) + \frac{\alpha(r \cos \varphi)}{r} \sin \varphi \quad (25.1)$$

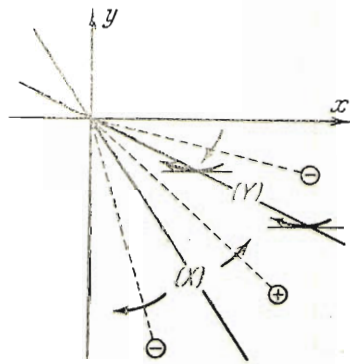
Введем в рассмотрение (фиг. 10) прямые (X) и (Y) согласно (19.3) и (19.4).

Легко видеть, что в силу (15.1) имеем

$$\begin{aligned} a_{22} \sin \varphi + a_{21} \cos \varphi & \begin{cases} < 0 \text{ справа от } (Y) \\ > 0 \text{ слева от } (Y) \end{cases} \\ a_{12} \sin \varphi - a_{22} \cos \varphi & \begin{cases} > 0 \text{ справа от } (X) \\ < 0 \text{ слева от } (X) \end{cases} \end{aligned} \quad (25.2)$$

Предположим

$$\frac{\alpha(p)}{p} \rightarrow 0 \text{ при } p \rightarrow 0 \quad (25.3)$$



Фиг. 10

Пользуясь этим, запишем (25.1) согласно (25.3) короче:

$$\frac{d\varphi}{dt} = F(\varphi) + \alpha_1(r, \varphi) \quad \left( \begin{array}{l} F(\varphi) - \text{свободный член} \\ \alpha_1(r, \varphi) \rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow 0 \end{array} \right) \quad (25.4)$$

Рассмотрим значения  $F(\varphi)$  в четвертой четверти. В силу (25.2) имеем

- $F(\varphi) < 0$  в секторе  $[x, (Y)]$  между осью  $x$  и прямой (Y);
- $F(\varphi) > 0$  в секторе  $[(Y), (X)]$  между прямыми (Y) и (X);
- $F(\varphi) < 0$  между прямой (X) и осью  $y$ .

Отсюда, пользуясь равенствами (25.4), заключаем, что всякий луч в секторе  $[x, (Y)]$  при достаточно малых  $r$  пересекается движе-



ниями по часовой стрелке, в секторе  $[(Y), (X)]$  против часовой стрелки и в секторе  $[(X), y]$  по часовой стрелке. Это показывает, что точка  $(0,0)$  не может быть центром или фокусом. Но мы доказали ранее, что для уравнений (15.5) всегда имеется асимптотическая устойчивость, а тогда здесь, очевидно, будет узел. Мы убедились ранее еще и в том, что прямая  $(Y)$  пересекается движениями с касательной, параллельной оси  $x$ , и после пересечения прямой  $(Y)$  ордината  $|y(t)|$  убывает.

Прямые  $(Y)$  и  $(X)$  являются, как легко видеть, критическими направлениями. Следовательно, движения входят в сектор  $[(Y), (X)]$ , затем после достижения углом  $\varphi$  некоторого минимального значения (по модулю максимального) точка  $M(t)$  приближается к точке  $(0,0)$  и к прямой  $(Y)$ . Критическое направление  $(X)$  есть обыкновенное критическое направление, в чем легко убедиться на основании (15.1).

Следовательно, вдоль прямой  $(X)$  входит в точку  $(0,0)$  единственная интегральная кривая и ее уравнение легко строится по вышеуказанному методу. Движения, проходящие справа от этой интегральной кривой, входят в точку  $(0,0)$  вдоль прямой  $(Y)$  справа от оси  $y$  и движения, начинающиеся слева, входят в точку  $(0,0)$  вдоль прямой  $(Y)$  в области  $x < 0$ . Мы можем, следовательно, записать теорему.

*Теорема 25.1.* Точка  $(0,0)$  для уравнений (15.5) есть узел.

Ранее в некоторых теоремах, относящихся к системе (15.5), мы доказали, что решения обладают свойством  $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ , но не могли сказать, имеется ли здесь фокус или узел.

Такие же рассуждения приводят нас к теореме.

*Теорема 25.2* Пусть дана система

$$\frac{dx}{dt} = ax + by + P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy + Q(x, y) \quad (25.5)$$

где

$$(a - d)^2 + 4bc > 0 \quad (25.6)$$

$$\frac{P(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \rightarrow 0, \quad \frac{Q(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \rightarrow 0 \quad \text{при } x^2 + y^2 \rightarrow 0 \quad (25.7)$$

для которой невозмущенное движение  $x = 0, y = 0$  устойчиво в смысле Ляпунова. Тогда точка  $(0,0)$  есть узел и вдоль одного критического направления входит единственная интегральная кривая.

§ 26. До сих пор мы рассматривали случай  $D = a_{22}^2 + a_{12}a_{21} > 0$ . Теперь будем предполагать

$$a_{22} < 0, \quad a_{12} > 0, \quad a_{21} < 0; \quad D = a_{22}^2 + a_{12}a_{21} < 0 \quad (26.1)$$

Это последнее предположение равносильно предположению

$$-(a_{11} + a_{22}) < -\frac{\Delta}{a_{22}} \quad (26.2)$$

Поэтому согласно с (5.6) и (5.7) функцию  $f(x)$  подчиняем условию

$$f(x) < -(a_{11} + a_{22})x \quad (x > 0) \quad (26.3)$$

$$f(x) > -(a_{11} + a_{22})x \quad (x < 0) \quad (26.4)$$

или 
$$f(x) = -(a_{11} + a_{22})x - \alpha(x) \quad \left( \begin{array}{l} \alpha(x) > 0 \text{ при } x > 0 \\ \alpha(x) < 0 \text{ при } x < 0 \end{array} \right) \quad (26.5)$$

На основании (26.5) уравнения (5.1) перепишем в виде

$$\frac{dx}{dt} = -a_{22}x + a_{12}y - \alpha(x), \quad \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y \quad (26.6)$$

Характеристические числа линейной системы здесь будут

$$\xi_1 = i\lambda, \quad \xi_2 = -i\lambda \quad (\lambda = \sqrt{-D} > 0) \quad (26.7)$$

Введем новые неизвестные функции равенствами

$$X = \frac{a_{21}(\lambda + 1)x + a_{22}y}{a_{21}\lambda(2\lambda + 1 - a_{12}a_{21})}, \quad Y = \frac{a_{21}a_{22}x + (\lambda - a_{12}a_{21})y}{a_{21}\lambda(2\lambda + 1 - a_{12}a_{21})} \quad (26.8)$$

$$x = (\lambda - a_{12}a_{21})X - a_{22}Y, \quad y = a_{21}(\lambda + 1)Y - a_{22}a_{21}X \quad (26.9)$$

Тогда уравнения (26.6) перейдут в уравнения

$$\frac{dX}{dt} = -\lambda Y - \frac{a_{21}(\lambda + 1)}{d} \alpha [(\lambda - a_{12}a_{21})X - a_{22}Y] \quad (26.10)$$

$$\frac{dY}{dt} = \lambda X - \frac{a_{21}a_{22}}{d} \alpha [(\lambda - a_{12}a_{21})X - a_{22}Y]$$

$$d = a_{21}\lambda[2\lambda + 1 - a_{12}a_{21}] < 0 \quad (26.11)$$

Предположим в согласии с (26.5), что

$$\alpha(p) = \sum_{k=m}^{\infty} a_k p^{2k+1} \quad (a_m > 0) \quad (26.12)$$

Здесь  $m \geq 1$ ; случай  $m = 0$  рассмотрен ранее. Положим

$$d_1 = -\frac{1 + \lambda}{\lambda(2\lambda + 1 - a_{12}a_{21})}, \quad d_2 = -\frac{a_{22}}{\lambda(2\lambda + 1 - a_{12}a_{21})} \quad (26.13)$$

Уравнения (26.10) в предположении (26.12) запишем в виде

$$\frac{dX}{dt} = -\lambda Y + d_1 \sum_{k=m}^{\infty} a_k [(\lambda - a_{12}a_{21})X - a_{22}Y]^{2k+1} \quad (26.14)$$

$$\frac{dY}{dt} = \lambda X + d_2 \sum_{k=m}^{\infty} a_k [(\lambda - a_{12}a_{21})X - a_{22}Y]^{2k+1}$$

Рассмотрим предварительно систему

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda y + d_1 \sum_{k=m}^{\infty} a_k (ax + by)^{2k+1} \quad (26.15)$$

$$\frac{dy}{dt} = \lambda x + d_2 \sum_{k=m}^{\infty} a_k (ax + by)^{2k+1}$$

Чтобы решить вопрос об устойчивости невозмущенного решения  $x = 0, y = 0$ , обратимся к известному правилу Ляпунова<sup>[4]</sup> (стр. 172). Вводя полярные координаты  $(r, \theta)$ , мы получим из уравнений (26.15)

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} = & \frac{a_m}{\lambda} \{ d_1 (a \cos \theta + b \sin \theta)^{2m+1} \cos \theta + \\ & + d_2 (a \cos \theta + b \sin \theta)^{2m+1} \sin \theta \} r^{2m+1} + (r^{4m+1}) \end{aligned} \quad (26.16)$$

Будем искать решение этого уравнения в виде ряда по степеням произвольного постоянного  $c$

$$r = c + uc^{2m+1} + \dots \quad (26.17)$$

Подставляя ряд (26.17) в (26.16) и сравнивая коэффициенты в правой и левой частях при  $c^{2m+1}$ , получим

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{a_m}{\lambda} \{d_1 (a \cos \theta + b \sin \theta)^{2m+1} \cos \theta + d_2 (a \cos \theta + b \sin \theta)^{2m+1} \sin \theta\}$$

Отсюда найдем  $u$  в виде

$$u = g\theta + v(\theta) \quad (26.18)$$

где  $v$  — периодическая функция с периодом  $2\pi$  и постоянная  $g$  равна

$$g = \frac{a_m}{2\pi\lambda} \int_0^{2\pi} \{d_1 (a \cos \theta + b \sin \theta)^{2m+1} \cos \theta + d_2 (a \cos \theta + b \sin \theta)^{2m+1} \sin \theta\} d\theta$$

Легко получить равенства

$$\int_0^{2\pi} (a \cos \theta + b \sin \theta)^{2m+1} \cos \theta d\theta = \frac{\pi a (2m+1)!!}{2^m (m+1)!} (a^2 + b^2)^m$$

$$\int_0^{2\pi} (a \cos \theta + b \sin \theta)^{2m+1} \sin \theta d\theta = \frac{\pi b (2m+1)!!}{2^m (m+1)!} (a^2 + b^2)^m$$

на основании которых имеем

$$g = \frac{a_m (2m+1)!! (a^2 + b^2)^m}{2^m (m+1)! \lambda} (ad_1 + bd_2) \quad (26.19)$$

Согласно Ляпунову при  $g < 0$  имеем асимптотическую устойчивость. Учитывая равенства (26.13) для системы (26.14), получим

$$g = - \frac{a_m (2m+1)!! (a^2 + b^2)^m}{2^{m+1} (m+1)! (2\lambda + 1 - a_{12} a_{21}) \lambda^2} [(1 + \lambda) (\lambda - a_{12} a_{21}) - a_{22}^2]$$

или, так как  $(1 + \lambda) (\lambda - a_{12} a_{21}) - a_{22}^2 = \lambda (2\lambda + 1 - a_{12} a_{21})$  в силу (26.7), то на основании (26.12)

$$g = - \frac{a_m (2m+1)!! (a^2 + b^2)^m}{2^{m+1} (m+1)! \lambda} < 0 \quad (26.20)$$

Таким образом, для системы (26.14) имеем асимптотическую устойчивость и точка  $(x, y)$  приближается к началу координат при  $t \rightarrow \infty$  по спирали, так как начало для системы (26.14) будет, очевидно, фокусом.

Запишем систему уравнений (26.6), предполагая, что  $\alpha(p)$  задано рядом (16.1), в котором первый отличный от нуля коэффициент будет положительным, как отмечено в (26.12):

$$\frac{dx}{dt} = -a_{22}x + a_{12}y - \sum_{k=m \geq 0}^{\infty} a_k x^{2k+1}, \quad \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y \quad (26.21)$$

Тогда имеем теорему, аналогичную теореме (16.1).



**Теорема 26.1.** Всякое движение уравнений (26.21) после пересечения положительной полуоси  $y$  в точке  $M_0$  в зоне  $A^+$  пересекает отрицательную полуось  $y$  в точке  $M_1$  ближе от точки  $(0,0)$ , чем  $M_0$ . Аналогичное заключение, конечно, справедливо и для области  $x < 0$ . Эта теорема следует из последних рассуждений и теоремы 1.1.

На основании теоремы 26.1 получаем теорему, аналогичную 15.1.

**Теорема 26.2.** Если в уравнениях (26.6) функция  $\alpha(p)$  задана рядом типа (16.1) как при  $p > 0$ , так и при  $^1 p < 0$ , то решения системы (26.6), начинающиеся в области  $A^+$  или  $^2 A^-$ , обладают свойством  $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Мы имеем также теорему, аналогичную теореме 18.1.

**Теорема 26.3.** Всякое движение уравнений (26.6) (где  $\alpha'(x)$  — непрерывная функция<sup>3</sup>), начинающееся в зоне  $A^+$  или  $A^-$ , обладает свойством<sup>4</sup>  $x(t) \rightarrow 0, y(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Эта теорема докажется с помощью систем уравнений, аналогичных (18.1) и (18.2), и на основании теоремы 26.1, так же как и теорема 18.1.

**§ 27.** Теперь мы докажем асимптотическую устойчивость невозмущенного движения  $x = 0, y = 0$  уравнений (26.10), не связывая себя с зонами  $A^+$  и  $A^-$ , которых может и не быть, если корни уравнения (14.1)  $\phi_k(0)$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) сгущаются к точке 0. Защищем уравнения (26.10) в полярных координатах

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r[P \cos \theta + Q \sin \theta]}{\lambda r + Q \cos \theta - P \sin \theta} \quad (27.1)$$

где

$$P = -\frac{1 + \lambda}{\lambda(2\lambda + 1 - a_{12} a_{21})} \alpha [(\lambda - a_{12} a_{21}) X - a_{22} Y] \quad (27.2)$$

$$Q = -\frac{a_{22}}{\lambda(2\lambda + 1 - a_{12} a_{21})} \alpha [(\lambda - a_{12} a_{21}) X - a_{22} Y]$$

Предположим

$$\alpha(p) = ap^{1+\alpha} \quad (p \geq 0) \quad (27.3)$$

где  $a > 0$  и  $\alpha > 0$ . Тогда уравнение (27.1) можно записать в виде

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{-Br^{1+\alpha} [(1 + \lambda) \cos \theta + a_{22} \sin \theta] [(\lambda - a_{12} a_{21}) \cos \theta - a_{22} \sin \theta]^{1+\alpha}}{\lambda + [(1 + \lambda) \sin \theta - a_{22} \cos \theta] [(\lambda - a_{12} a_{21}) \cos \theta - a_{22} \sin \theta]^{1+\alpha} Br^\alpha} \quad (27.4)$$

где

$$B = \frac{a}{\lambda(2\lambda + 1 - a_{12} a_{21})} \quad (27.5)$$

Пользуясь уравнениями типа (18.1) и (18.2), мы, как и раньше, докажем для уравнений (26.10), неравенство  $-y_1 \leq y_0$  (где остается и возможность равенства), из которого следует устойчивость невозмущенного движения  $x = 0, y = 0$  уравнений (26.10).

<sup>1</sup> См. следствие из теоремы 16.1.

<sup>2</sup> См. примечание в сноске к теореме 15.1.

<sup>3</sup> Непрерывность  $\alpha'(x)$  необходима при построении зоны  $A^+$ .

<sup>4</sup> См. примечание в сноске к теореме 15.1.



Отсюда следует, что решение  $r(\theta)$  уравнения (27.4) остается как угодно малым при изменении  $\theta$  в промежутке  $(0, 2\pi)$ , если начальное значение  $r(0)$  достаточно малое. Мы докажем, однако, что для уравнений (26.10) в неравенстве  $-y_1 \leq y_0$  знак равенства невозможен для движений, начинающихся в окрестности точки  $(0, 0)$ . Рассмотрим прямую

$$(\lambda - a_{12} a_{21})x - a_{22}y = 0 \quad (27.6)$$

Траектории уравнения (27.4) пересекают прямую (27.6) по направлению возрастания угла  $\theta$ . [Это легко видеть из уравнений (26.10)]. Прямая (27.6) проходит под углом

$$\theta_0 = \arctg \frac{\lambda - a_{12} a_{21}}{a_{22}} \quad (27.7)$$

Пусть траектория уравнения (27.4) пересекает прямую (27.6) последовательно на расстояниях  $r_0$  и  $r$  от начала координат. Из (27.4) имеем

$$J_r = \frac{1}{\alpha} \left[ \frac{1}{r^\alpha} - \frac{1}{r_0^\alpha} \right] = B \int_{\theta_0}^{\theta_0 + \pi} \frac{[(1 + \lambda) \cos \theta + a_{22} \sin \theta][(\lambda - a_{12} a_{21}) \cos \theta - a_{22} \sin \theta]^{1+\alpha} d\theta}{\lambda + [(1 + \lambda) \sin \theta - a_{22} \cos \theta][(\lambda - a_{12} a_{21}) \cos \theta - a_{22} \sin \theta]^{1+\alpha} r^\alpha B} \quad (27.8)$$

Мы рассмотрим величину

$$J = \int_{\theta_0}^{\theta_0 + \pi} [(1 + \lambda) \cos \theta + a_{22} \sin \theta][(\lambda - a_{12} a_{21}) \cos \theta - a_{22} \sin \theta]^{1+\alpha} d\theta \quad (27.9)$$

Покажем, что  $J > 0$ , а тогда при малых  $r$ , очевидно, будет и  $J_r > 0$ . Рассмотрим предварительно

$$J_1 = \int_{\theta_0}^{\theta_0 + \pi} (a_1 \cos \theta + b_1 \sin \theta)(a_2 \cos \theta + b_2 \sin \theta)^m d\theta \quad (27.10)$$

где  $a_1, b_1, a_2, b_2$  и  $m$  — постоянные и

$$\theta_0 = \arctg \left( -\frac{a_2}{b_2} \right) \quad (27.11)$$

Введем новую переменную  $z$  при помощи равенств

$$a_2 \cos \theta + b_2 \sin \theta = r_1 z \quad (27.12)$$

$$(b_2 \cos \theta - a_2 \sin \theta) d\theta = r_1 dz \quad (r_1 = \sqrt{a_2^2 + b_2^2}) \quad (27.13)$$

Равенства (27.12) и (27.13) позволяют найти

$$\cos \theta d\theta = \frac{1}{r_1} (a_2 z d\theta + b_2 dz), \quad \sin \theta d\theta = \frac{1}{r_1} (b_2 z d\theta - a_2 dz) \quad (27.14)$$

В соответствии с (27.11) полагаем

$$\frac{a_2}{r_1} = \cos \left( \theta_0 + \frac{\pi}{2} \right), \quad \frac{b_2}{r_1} = \sin \left( \theta_0 + \frac{\pi}{2} \right) \quad (27.15)$$

и равенство (27.12) перепишем в виде

$$\cos \left( \theta - \theta_0 - \frac{\pi}{2} \right) = z \quad (27.16)$$

Отсюда видим, что промежуток  $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + \frac{1}{2}\pi$  переходит в  $0 \leq z \leq 1$ , а промежуток  $\theta_0 + \frac{1}{2}\pi \leq \theta \leq \theta_0 + \pi$  переходит в  $1 \geq z \geq 0$ . Для областей  $0 \leq z \leq 1$  и  $1 \geq z \geq 0$  соответственно имеем

$$d\theta = \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}, \quad d\theta = -\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} \quad (27.17)$$

Пользуясь равенствами (27.12) и (27.14), из (27.10) получаем

$$J_1 = \frac{1}{r_1} \int_0^1 \{(a_1 a_2 + b_1 b_2) z d\theta + (a_1 b_2 - b_1 a_2) dz\} r_1^m z^m + \\ + \frac{1}{r_1} \int_1^0 \{(a_1 a_2 + b_1 b_2) z d\theta + (a_1 b_2 - b_1 a_2) dz\} r_1^m z^m$$

или на основании (27.17)

$$J_1 = 2r_1^{m-1} (a_1 a_2 + b_1 b_2) \int_0^1 \frac{z^{m-1}}{\sqrt{1-z^2}} dz$$

Заменяя здесь  $z^2 = \tau$ , получим

$$J_1 = r_1^{m-1} (a_1 a_2 + b_1 b_2) \int_0^1 (1-\tau)^{-\frac{1}{2}} \tau^{\frac{1}{2}m} d\tau \quad (27.18)$$

или

$$J_1 = r_1^{m-1} (a_1 a_2 + b_1 b_2) B\left(1 + \frac{m}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad (27.19)$$

где  $B(a, b)$  — эйлерова функция. Подставляя сюда соответствующие значения  $a_k$ ,  $b_k$  и  $m$  из (27.9), получим

$$J = [(\lambda - a_{12}a_{21})^2 + a_{22}^2]^{1/2} [(1 + \lambda)(\lambda - a_{12}a_{21}) - a_{22}^2] B\left(\frac{3 + \alpha}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

или, учитывая значения  $\lambda$  согласно (26.7):

$$J = [(\lambda - a_{12}a_{21})^2 + a_{22}^2]^{1/2} [2\lambda^2 + \lambda - \lambda a_{12}a_{21}] B\left(\frac{3 + \alpha}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad (27.20)$$

Так как  $a_{12}a_{21} < 0$ , то  $J > 0$ , а следовательно, и  $J_r > 0$ . Заметим, что при доказательстве мы пользовались значениями  $\alpha(p)$  согласно (27.3) для положительных значений  $p$ , т. е. пользовались только свойствами (26.5) (именно первым из них). Ясно, что на основании того, что  $\alpha(p) < 0$  при  $p < 0$ , мы получим то же самое для области, лежащей по другую сторону от прямой (27.6). Из  $J_r > 0$  следует, что  $r < r_0$ .

Если вместо (27.3) будем иметь

$$\alpha(p) = ap^{1+\alpha} + \Theta(p) \quad \text{при } p > 0 \quad (27.21)$$

где  $a > 0$ ,  $\alpha > 0$  и  $p^{-(1+\alpha)}\Theta(p) \rightarrow 0$  при  $p \rightarrow 0$ , то также получим (27.20) и будет  $r < r_0$ , т. е.  $r(\Theta + \pi) < r(\Theta_0)$ . Отсюда следует теорема.

**Теорема 27.1.** Если в системе (26.6) функция  $\alpha(p)$  или при  $p > 0$ , или при  $p < 0$  обладает свойством типа (27.21), то точка движения, определяемого уравнениями (26.6) и начинающегося вблизи точки  $(0,0)$ , приближается к точке  $(0,0)$  по спирали, так как  $-y_1 < y_0$ .

Учитывая в равенстве (27.8) коэффициент  $B$ , данный равенством (27.5), получим

$$d = \frac{1}{r^\alpha} - \frac{1}{r_0^\alpha} = \frac{\alpha\alpha}{\lambda} [\lambda - a_{12}a_{21}]^2 + a_{22}^2]^{\alpha/2} B\left(\frac{3+\alpha}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad (27.22)$$

Величина  $d$  характеризует быстроту приближения точки к началу координат. Величину (27.22) естественно назвать *мерой устойчивости*.

При  $\lambda \rightarrow 0$  имеем  $d \rightarrow \infty$ , и, следовательно, спираль быстрее закручивается к началу координат при малых  $\lambda$ . Об устойчивости в большем можно судить на основании теорем 13.1 и 14.1.

§ 28. Переходим к рассмотрению случая

$$a_{22} < 0, \quad a_{12} > 0, \quad a_{21} < 0; \quad D = a_{22}^2 + a_{12}a_{21} = 0 \quad (28.1)$$

Последнее условие равносильно равенству

$$-(a_{11} + a_{22}) = -\frac{\Delta}{a_{22}} \quad (28.2)$$

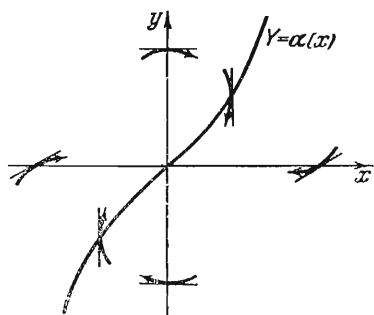
Следовательно, берем  $a = -(a_{11} + a_{22})$  и полагаем

$$f(x) = ax - \alpha(x) \quad \left( \begin{array}{l} \alpha(x) > 0 \text{ при } x > 0 \\ \alpha(x) < 0 \text{ при } x < 0 \end{array} \right) \quad (28.3)$$

Заменяя в уравнениях (5.1)  $f(x)$  по формуле (28.3), получаем

$$\frac{dx}{dt} = -a_{22}x + a_{12}y - \alpha(x), \quad \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y \quad (28.4)$$

Характеристическое уравнение линейной системы здесь будет



$$\begin{vmatrix} -a_{22} - \xi & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \xi \end{vmatrix} = \xi^2 - a_{22}^2 - a_{12}a_{21} = 0$$

Отсюда в силу (28.1)

$$\xi^2 = 0, \quad \xi_1 = 0, \quad \xi_2 = 0$$

Введем новое переменное  $Y$ :

$$Y = a_{12}y - a_{22}x, \quad y = \frac{a_{22}}{a_{12}}x + \frac{1}{a_{12}}Y \quad (28.5)$$

Тогда система (28.4) примет вид

$$\frac{dx}{dt} = Y - \alpha(x), \quad \frac{dY}{dt} = a_{22}\alpha(x) \quad (28.6)$$

Введем в рассмотрение кривую  $Y = \alpha(x)$ . Из (28.6) получаем

$$\frac{dY}{dx} = \frac{a_{22}\alpha(x)}{Y - \alpha(x)} \quad \left( \frac{dY}{dx} \Big|_{Y=0} = -a_{22} \right) \quad (28.7)$$

Легко видеть, что уравнения (28.6) определяют следующее поле направлений (фиг. 11). Все движения пересекают ось  $x$  под одним углом в силу (28.7). На кривой  $Y = \alpha(x)$  абсцисса  $x$  всякого движения достигает максимума при  $x > 0$  и минимума при  $x < 0$ . На оси  $y$  ордината  $Y$  достигает максимума при  $Y > 0$  и минимума при  $Y < 0$ .



Из (28.7) при  $Y > 0, x > 0$  и сверху от кривой  $Y = \alpha(x)$  имеем

$$\frac{dY}{dx} < \frac{a_{22}\alpha(x)}{Y} \quad (28.8)$$

При  $x > 0$  и  $Y < 0$  снова имеем (28.8).

Пусть точка  $M_1(t)$  движения (28.16) пересекает положительную полуось  $Y$  на высоте  $Y_0$  (согласно фиг. 11 по часовой стрелке) и приходит в точку  $Y_0^{(1)} > 0$  отрицательной полуоси  $y$ .

Теперь рассмотрим следующую траекторию. Точка  $M_2(t)$  пересекает положительную полуось  $y$  на высоте  $Y_0$  и далее двигается по кривой, определяемой уравнением

$$\frac{dY}{dx} = \frac{a_{22}\alpha(x)}{Y} \quad (28.9)$$

до встречи с кривой  $Y = \alpha(x)$ , далее продолжаем траекторию после пересечения кривой  $Y = \alpha(x)$  параллельно оси  $Y$  до встречи с осью  $x$  и затем снова по интегральной кривой уравнения (28.9) до пересечения с отрицательной полуосью  $Y$  в точке  $Y_0^{(2)} < 0$ . На основании (28.8) мы заключаем, что

$$Y_0^{(2)} < Y_0^{(1)} \text{ или } -Y_0^{(1)} < -Y_0^{(2)} \quad (28.10)$$

Из (28.9) найдем

$$Y^2 \Big|_{Y_0}^{\alpha(x_1)} = 2a_{22} \int_0^{x_1} \alpha(x) dx, \text{ или } \alpha^2(x_1) - Y_0^2 = 2a_{22} \int_0^{x_1} \alpha(x) dx \quad (28.11)$$

где  $x_1$  — абсцисса точки пересечения интегральной кривой уравнения (28.9) с кривой  $Y = \alpha(x)$ . Согласно предыдущему точка  $M_2(t)$  попадает (фиг. 12), таким образом, на ось  $x$  в точку  $(x_1, 0)$ , где  $x_1$  определяется равенством (28.11).

Дальнейший путь точки  $M_2(t)$  получаем снова из уравнения (28.9)

$$Y^2 \Big|_0^{Y_0^{(2)}} = 2a_{22} \int_{x_1}^0 \alpha(x) dx, \text{ или } (Y_0^{(2)})^2 = -2a_{22} \int_0^{x_1} \alpha(x) dx \quad (28.12)$$

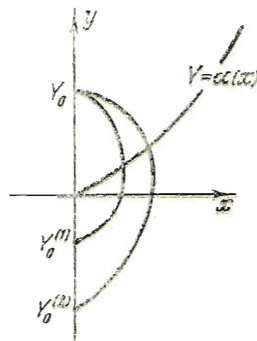
Отсюда на основании (28.11) имеем

$$(Y_0^{(2)})^2 = Y_0^2 - \alpha^2(x_1) \quad (28.13)$$

Из (28.13) получаем  $-Y_0^{(2)} < Y_0$  и на основании (28.10)  $-Y_0^{(1)} < Y_0$ . Таким образом, мы имеем теорему.

**Теорема 28.1.** Все движения, определяемые уравнениями (28.4), обладают свойством  $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Мы не будем заниматься уточнением качественной картины, укажем, однако, что если точка  $M(t)$  приближается к началу координат по спирали, то быстрота приближения ее характеризуется равенством (28.13) и определяется поведением функции  $\alpha(x)$ .



Фиг. 12

§ 29. Изучим случай  $a_{22} > 0$ ,  $a_{12} > 0$ ,  $a_{21} < 0$ . В согласии с (4.6) и (4.9) здесь нужно предполагать  $a_{22}^2 + a_{12}a_{21} < 0$ .

Можно взять  $a = -(a_{11} + a_{22})$  и функцию  $f(x)$  в виде

$$f(x) = -(a_{11} + a_{22})x - \alpha(x) \quad (29.1)$$

Здесь на основании (5.3) и (5.4)

$$0 < \alpha(x) < -\frac{a_{22}^2 + a_{12}a_{21}}{a_{22}}x \quad \text{при } x > 0 \quad (29.2)$$

$$-\frac{a_{22}^2 + a_{12}a_{21}}{a_{22}}x < \alpha(x) < 0 \quad \text{при } x < 0 \quad (29.3)$$

Выражение (29.1) совпадает с (26.5), поэтому имеем систему вида (26.6). Характеристические числа соответствующей линейной системы будут чисто мнимые, так как  $a_{22}^2 + a_{12}a_{21} < 0$ . Здесь  $\alpha(x)$  ограничено с двух сторон неравенствами (29.2), (29.3), в то время как ранее оно было ограничено только с одной стороны (26.5). Следовательно, система уравнений в данном случае есть частный случай системы (26.6), если  $\alpha(x)$  не содержит линейного члена от  $x$ . Разница еще в том, что ранее в уравнениях (26.6) было  $a_{22} < 0$ , а здесь  $a_{22} > 0$ . Но при исследованиях уравнений (26.6) мы нигде не пользовались знаком величины  $a_{22}$ . Следовательно, к системе уравнений в данном случае применимы все выводы, полученные для системы (26.6). Таким образом, в случае, например, (27.21) точка  $M(t)$  всякого движения вблизи начала координат приближается к началу координат по спирали при  $t \rightarrow \infty$ . Мера устойчивости дана величиной (27.22). Если же  $\alpha(x)$  содержит и линейный член от  $x$ , то согласно прежним рассуждениям (теорема 12.1) либо имеем асимптотически устойчивое решение  $x = 0$ ,  $y = 0$ , либо (когда имеем вырожденный случай) это приводится к выражению

$$f(x) = -\frac{\Delta}{a_{22}}x + \alpha(x)$$

где  $\alpha(x) > 0$  при  $x > 0$  и  $\alpha(x) < 0$  при  $x < 0$  и  $\alpha(x)$  не содержит линейный член от  $x$ . В этом последнем случае также можно провести исследование качественной картины и доказательства асимптотической устойчивости решения  $x = 0$ ,  $y = 0$ . Качественную картину и устойчивость в большом можно выяснить на основе методов, изложенных выше.

Поступила 23 V 1950

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Айзерман М. А. Об одной проблеме, касающейся устойчивости «в большом» динамических систем. Успехи математических наук. 1949. Т. IV. Вып. 4.
2. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. ГИТТЛ. М.—Л. 1949.
3. Бендиксон И. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. Успехи математических наук. 1941. Вып. IX.
4. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. ОНТИ. 1935.
5. Андронов А. А., Хайкин С. С. Теория колебаний. ч. 1. ОНТИ. 1937.
6. Натансон И. П. Конструктивная теория функций. ГИТТЛ. М.—Л. 1949.
7. Боль П. О некоторых дифференциальных уравнениях общего характера, применимых в механике. Юрьев. 1900.