Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XIV, 1950

ДИСКРИМИНАНТНАЯ КРИВАЯ И ОБЛАСТЬ АПЕРИОДИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Б. В. Булгаков
(Москва)

§ 1. Формулировка теоремы. Рассмотрим алгебраическое уравнение n-й степени

$$\Delta(z) = 0 \tag{1.1}$$

коэффициенты которого вещественны и линейно зависят от двух параметров μ, ν, так что

$$\Delta(z) \equiv P(z)\mu + Q(z)\nu + R(z) \tag{1.2}$$

Каждой точке плоскости $\mu\nu$ соответствуют определенные значения коэффициентов и, следовательно, определенные значения n корней; обратно, каждому z соответствует единственная точка (μ, ν).

Требуется выделить область плоскости $\mu\nu$, в которой все корни вещественны, и ту ее часть, где они отрицательны.

Последнюю будем называть областью апериодической устойчивости, так как если (1.1) есть характеристическое уравнение линейной колебательной системы с постоянными коэффициентами и, в частности, регулируемой системы, то в указанной области все парциальные колебания затухают по показательному закону.

Поставленную задачу нужно решать во многих вопросах синтеза регуляторов.

Пары комплексных корней могут появляться или исчезать при перемещении изображающей точки в плоскости $\mu\nu$ только при условии предварительного обращения в двойной действительный корень $z = \varepsilon$[1].

Это может случиться лишь в точках (μ, ν), где уравнение (1.1) и уравнение

$$\Delta'(z) = 0 \tag{1.3}$$

имеют общий корень $z = \varepsilon$, так что

$$\begin{aligned} P(\varepsilon)\mu + Q(\varepsilon)\nu + R(\varepsilon) = 0 \\ P'(\varepsilon)\mu + Q'(\varepsilon)\nu + R'(\varepsilon) = 0 \end{aligned} \tag{1.4}$$

Условием этого является в свою очередь обращение в нуль результанта этих уравнений, т. е. дискриминанта уравнения (1.1).

Обозначая

$$\Gamma_\mu = \begin{vmatrix} Q(\varepsilon) & R(\varepsilon) \\ Q'(\varepsilon) & R'(\varepsilon) \end{vmatrix}, \qquad \Gamma_\nu = \begin{vmatrix} R(\varepsilon) & P(\varepsilon) \\ R'(\varepsilon) & P'(\varepsilon) \end{vmatrix} \tag{1.5}$$

$$\Gamma(\varepsilon) = \begin{vmatrix} P(\varepsilon) & Q(\varepsilon) \\ P'(\varepsilon) & Q'(\varepsilon) \end{vmatrix} \tag{1.6}$$

получим параметрические уравнения дискриминантной кривой Y

$$\mu = \frac{\Gamma_\mu(\varepsilon)}{\Gamma(\varepsilon)}, \qquad \nu = \frac{\Gamma_\nu(\varepsilon)}{\Gamma(\varepsilon)} \tag{1.7}$$

в которых параметр ε должен пробегать все действительные значения от $-\infty$ до $+\infty$.

Кривая Y разбивает плоскость $\mu\nu$ на такие области $E(j)$, что во всех точках $E(j)$ полином $\Delta(z)$ имеет j пар комплексных корней. Целое число j может иметь все значения от 0 до $[n/2]$, т. е. наибольшего целого числа, заключающегося в $n/2$. В частности, $E(0)$ есть область, где все корни вещественны. Кроме точек, получающихся из (1.7) при действительных значениях ε, дискриминантная кривая может содержать конечное число изолированных точек, соответствующих кратным комплексным корням, но такие точки не входят в состав границ областей $E(j)$ и потому не будут рассматриваться.

Для того чтобы правильно наименовать области $E(j)$, т. е. указать, сколько пар комплексных корней имеет полином $\Delta(z)$ в точках каждой из них, нужно, во-первых, каким-нибудь путем, например численным разрешением уравнения, установить характер корней в какой-либо одной точке плоскости $\mu\nu$, и, во-вторых, установить такое правило штриховки кривой Y, которое позволяло бы утверждать, что при переходе с нештрихованной стороны на штрихованную два комплексных сопряженных корня обращаются в действительные. Если окажется, что число областей, образуемых кривой Y, наибольшее возможное, т. е. $[n/2]+1$, то правило штриховки достаточно для наименования областей и фактическое определение корней даже для одной точки излишне.

Задача, сформулированная таким образом, аналогична той, которую поставили и решили А. А. Андронов и А. Г. Майер [2] и Ю. И. Неймарк [3] в отношении числа корней с положительной и отрицательной действительными частями. Установленные в их работах правила позволяют найти область устойчивости.

Общая часть области $E(0)$ и области устойчивости есть область апериодической устойчивости.

Правило штриховки, доказательство которого мы дадим в следующем параграфе, состоит в следующем:

при $\Gamma(\varepsilon) > 0$ *следует штриховать ту сторону кривой* Y, *которая лежит по левую руку от наблюдателя, странствующего по кривой в направлении убывания* ε; *при* $\Gamma(\varepsilon) < 0$ *штрихуется правая сторона; при переходе с нештрихованной стороны кривой на штрихованную теряется одна пара комплексных корней.*

§ 2. **Доказательство.** Пусть (μ, ν) и $(\mu + \delta\mu_1, \ \nu + \delta\nu_1)$ — две бесконечно близкие точки дискриминантной кривой и $\varepsilon, \varepsilon + \delta\varepsilon$, соответствующие значения параметра. Требуя, чтобы уравнения (1.4) удовлетворялись для второй точки, и разлагая в ряды по степеням $\delta\varepsilon$, $\delta\mu_1$, $\delta\nu_1$, имеем

$$(P'\mu + Q'\nu + R')\,\delta\varepsilon + P\delta\mu_1 + Q\delta\nu_1 + \ldots = 0$$
$$(P''\mu + Q''\nu + R'')\,\delta\varepsilon + P'\delta\mu_1 + Q'\delta\nu_1 + \ldots = 0$$

причем под символами $P, Q, R, P', Q', R', \ldots$, написанными без указания аргументов, подразумеваются значения соответствующих функций для первой точки и $z = \varepsilon$. Кроме того,

$$\delta\mu_1 = \frac{\partial\mu}{\partial\varepsilon}\,\delta\varepsilon + \cdots, \qquad \delta\nu_1 = \frac{\partial\nu}{\partial\varepsilon}\,\delta\varepsilon + \cdots$$

Так как уравнения (1.4) удовлетворяются для первой точки, то $P'\mu + Q'\nu + R' = 0$ и

$$P\frac{\partial\mu}{\partial\varepsilon} + Q\frac{\partial\nu}{\partial\varepsilon} = 0$$
$$P'\frac{\partial\mu}{\partial\varepsilon} + Q'\frac{\partial\nu}{\partial\varepsilon} = -(P''\mu + Q''\nu + R'') = -\Delta''$$

Отсюда

$$\delta\mu_1 \approx \frac{Q\Delta''}{\Gamma}\,\delta\varepsilon, \qquad \delta\nu_1 \approx -\frac{P\Delta''}{\Gamma}\,\delta\varepsilon \tag{2.1}$$

Положим теперь

$$z = \varepsilon + i\omega \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned} P(\varepsilon + i\omega) &= P_1(\varepsilon, \omega) + iP_2(\varepsilon, \omega) \\ Q(\varepsilon + i\omega) &= Q_1(\varepsilon, \omega) + iQ_2(\varepsilon, \omega) \\ R(\varepsilon + i\omega) &= R_1(\varepsilon, \omega) + iR_2(\varepsilon, \omega) \end{aligned} \tag{2.3}$$

Уравнение (1.1) после отделения действительной и мнимой частей дает два следующих:

$$\begin{aligned} P_1(\varepsilon, \omega)\,\mu + Q_1(\varepsilon, \omega)\,\nu + R_1(\varepsilon, \omega) &= 0 \\ P_2(\varepsilon, \omega)\,\mu + Q_2(\varepsilon, \omega)\,\nu + R_2(\varepsilon, \omega) &= 0 \end{aligned} \tag{2.4}$$

При этом так как

$$P(\varepsilon + i\omega) = P(\varepsilon) + \frac{1}{1!}P'(\varepsilon)\,i\omega - \frac{1}{2!}P''(\varepsilon)\,\omega^2 - \ldots$$

то

$$\begin{aligned} P_1(\varepsilon, \omega) &= P(\varepsilon) - \frac{1}{2!}P''(\varepsilon)\,\omega^2 + \frac{1}{4!}P^{(4)}(\varepsilon)\,\omega^4 - \cdots \\ P_2(\varepsilon, \omega) &= \frac{1}{1!}P'(\varepsilon)\,\omega - \frac{1}{3!}P'''(\varepsilon)\,\omega^3 + \frac{1}{5!}P^{(5)}(\varepsilon)\,\omega^5 - \cdots \end{aligned} \tag{2.5}$$

Отсюда при $\omega = 0$

$$\begin{aligned} &P_1 = P, \quad \frac{\partial P_1}{\partial\omega} = 0, \quad \frac{\partial^2 P_1}{\partial\omega^2} = -P'', \quad \frac{\partial^3 P_1}{\partial\omega^3} = 0, \ldots \\ &P_2 = 0, \quad \frac{\partial P_2}{\partial\omega} = P', \quad \frac{\partial^2 P_2}{\partial\omega^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 P_2}{\partial\omega^3} = -P''', \ldots \end{aligned} \tag{2.6}$$

Рассмотрим третью бесконечно близкую точку $(\mu+\delta\mu_2,\ \nu+\delta\nu_2)$, где количества $\delta\mu_2$, $\delta\nu_2$ выбираются так, чтобы корень $z=\varepsilon$ обратился в $z+\delta z=\varepsilon+i\delta\omega$. Требуя, чтобы уравнения (2.4) удовлетворялись для этой точки, и разлагая в ряды по степеням $\delta\omega$, $\delta\mu_2$, $\delta\nu_2$, имеем

$$\left(\frac{\partial P_1}{\partial\omega}\mu+\frac{\partial Q_1}{\partial\omega}\nu+\frac{\partial R_1}{\partial\omega}\right)\delta\omega+P_1\delta\mu_2+Q_1\delta\nu_2+$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 P_1}{\partial\omega^2}\mu+\frac{\partial^2 Q_1}{\partial\omega^2}\nu+\frac{\partial^2 R_1}{\partial\omega^2}\right)\delta\omega^2+\frac{\partial P_1}{\partial\omega}\delta\omega\,\delta\mu_2+$$
$$+\frac{\partial Q_1}{\partial\omega}\delta\omega\delta\nu_2+\frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3 P_1}{\partial\omega^3}\mu+\frac{\partial^3 Q_1}{\partial\omega^3}\nu+\frac{\partial^3 R_1}{\partial\omega^3}\right)\delta\omega^3+$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 P_1}{\partial\omega^2}\delta\omega^2\delta\mu_2+\frac{\partial^2 Q_1}{\partial\omega^2}\delta\omega^2\delta\nu_2\right)+\cdots=0$$

$$\left(\frac{\partial P_2}{\partial\omega}\mu+\frac{\partial Q_2}{\partial\omega}\nu+\frac{\partial R_2}{\partial\omega}\right)\delta\omega+P_2\delta\mu_2+Q_2\delta\nu_2+$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 P_2}{\partial\omega^2}\mu+\frac{\partial^2 Q_2}{\partial\omega^2}\nu+\frac{\partial^2 R_2}{\partial\omega^2}\right)\delta\omega^2+\frac{\partial P_2}{\partial\omega}\delta\omega\,\delta\mu_2+$$
$$+\frac{\partial Q_2}{\partial\omega}\delta\omega\delta\nu_2+\frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3 P_2}{\partial\omega^3}\mu+\frac{\partial^3 Q_2}{\partial\omega^3}\nu+\frac{\partial^3 R_2}{\partial\omega^3}\right)\delta\omega^3+$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 P_2}{\partial\omega^2}\delta\omega^2\delta\mu_2+\frac{\partial^2 Q_2}{\partial\omega^2}\delta\omega^2\delta\nu_2\right)+\cdots=0$$

Если же воспользоваться (2.6) и аналогичными соотношениями для Q_1, Q_2, R_1, R_2, то

$$P\delta\mu_2+Q\delta\nu_2-\frac{1}{2}\Delta''\delta\omega^2-\frac{1}{2}(P''\delta\mu_2+Q''\delta\nu_2)\,\delta\omega^2+\cdots=0$$

$$\Delta'\delta\omega+(P'\delta\mu_2+Q'\delta\nu_2)\,\delta\omega-\frac{1}{6}\Delta'''\delta\omega^3+\cdots=0$$

Полагая

$$\delta\mu_2=\frac{\partial\mu}{\partial\omega}\delta\omega+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\mu}{\partial\omega^2}\delta\omega^2+\frac{1}{6}\frac{\partial^3\mu}{\partial\omega^3}\delta\omega^3+\cdots$$

$$\delta\nu_2=\frac{\partial\nu}{\partial\omega}\delta\omega+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\nu}{\partial\omega^2}\delta\omega^2+\frac{1}{6}\frac{\partial^3\nu}{\partial\omega^3}\delta\omega^3+\cdots$$

и подставляя в предыдущие уравнения, имеем

$$P\left(\frac{\partial\mu}{\partial\omega}\delta\omega+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\mu}{\partial\omega^2}\delta\omega^2+\frac{1}{6}\frac{\partial^3\mu}{\partial\omega^3}\delta\omega^3+\cdots\right)+$$
$$+Q\left(\frac{\partial\nu}{\partial\omega}\delta\omega+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\nu}{\partial\omega^2}\delta\omega^2+\frac{1}{6}\frac{\partial^3\nu}{\partial\omega^3}\delta\omega^3+\cdots\right)-$$
$$-\frac{1}{2}\Delta''\delta\omega^2-\frac{1}{2}\left[P''\left(\frac{\partial\mu}{\partial\omega}\delta\omega+\cdots\right)+Q''\left(\frac{\partial\nu}{\partial\omega}\delta\omega+\cdots\right)\right]\delta\omega^2+\cdots=0$$

$$\Delta'\delta\omega+\left[P'\left(\frac{\partial\mu}{\partial\omega}\delta\omega+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\mu}{\partial\omega^2}\delta\omega^2+\cdots\right)+\right.$$
$$\left.+Q'\left(\frac{\partial\nu}{\partial\omega}\delta\omega+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\nu}{\partial\omega^2}\delta\omega^2+\cdots\right)\right]\delta\omega-\frac{1}{6}\Delta'''\delta\omega^3+\cdots=0$$

Приравнивая нулю коэффициенты при $\delta\omega$, $\delta\omega^2$, $\delta\omega^3$, . . . , находим

$$P\frac{\partial\mu}{\partial\omega}+Q\frac{\partial\nu}{\partial\omega}=0$$

$$\Delta'=0$$

$$\frac{1}{2}\left(P\frac{\partial^2\mu}{\partial\omega^2}+Q\frac{\partial^2\nu}{\partial\omega^2}\right)-\frac{1}{2}\Delta''=0$$

$$P'\frac{\partial\mu}{\partial\omega}+Q'\frac{\partial\nu}{\partial\omega}=0$$

$$\frac{1}{6}\left(P\frac{\partial^3\mu}{\partial\omega^3}+Q\frac{\partial^3\nu}{\partial\omega^3}\right)-\frac{1}{2}\left(P''\frac{\partial\mu}{\partial\omega}+Q''\frac{\partial\nu}{\partial\omega}\right)=0$$

$$\frac{1}{2}\left(P'\frac{\partial^2\mu}{\partial\omega^2}+Q'\frac{\partial^2\nu}{\partial\omega^2}\right)-\frac{1}{6}\Delta'''=0$$

. . . .

Если $\Gamma\neq 0$, то из первого и четвертого уравнений имеем $\partial\mu/\partial\omega=0$, $\partial\nu/\partial\omega=0$, второе уравнение совпадает со вторым уравнением (1.4), а третье и шестое получают вид:

$$P\frac{\partial^2\mu}{\partial\omega^2}+Q\frac{\partial^2\nu}{\partial\omega^2}=\Delta'',\qquad P'\frac{\partial^2\mu}{\partial\omega^2}+Q'\frac{\partial^2\nu}{\partial\omega^2}=\frac{1}{3}\Delta'''$$

Отсюда

$$\frac{\partial^2\mu}{\partial\omega^2}=\frac{1}{\Gamma}\begin{vmatrix}\Delta'' & Q\\ \frac{1}{3}\Delta''' & Q'\end{vmatrix},\qquad \frac{\partial^2\nu}{\partial\omega^2}=\frac{1}{\Gamma}\begin{vmatrix}P & \Delta''\\ P' & \frac{1}{3}\Delta'''\end{vmatrix}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\delta\mu_2&\approx\frac{1}{2\Gamma}\left(\Delta''Q'-\frac{1}{3}\Delta'''Q\right)\delta\omega^2\\ \delta\nu_2&\approx\frac{1}{2\Gamma}\left(\frac{1}{3}\Delta'''P-\Delta''P'\right)\delta\omega^2\end{aligned}\tag{2.7}$$

Абсолютная величина определителя

$$\begin{vmatrix}\delta\mu_1 & \delta\nu_1\\ \delta\mu_2 & \delta\nu_2\end{vmatrix}=\frac{(\Delta'')^2}{2\Gamma}\delta\varepsilon\,\delta\omega^2\tag{2.8}$$

вычисляемого с помощью (2.1) и (2.7), равна удвоенной площади треугольника, образованного тремя точками (μ,ν), $(\mu+\delta\mu_1,\ \nu+\delta\nu_1)$, $(\mu+\delta\mu_2,\ \nu+\delta\nu_2)$. Если ось ν получается из оси μ вращением на 90° против часовой стрелки, то знак определителя будет положительным, когда направление вектора $(\delta\mu_2,\delta\nu_2)$ получается из направления $(\delta\mu_1,\delta\nu_1)$ вращением в ту же сторону, и отрицательным в противном случае. Так как $(\Delta'')^2\delta\omega^2/2>0$, то при $\Gamma>0$ двойной корень ε обращается в пару комплексных $\varepsilon\pm i\omega$ в тех точках плоскости $\mu\nu$, которые лежат слева от вектора $(\delta\mu_1,\delta\nu_1)$, направленного при $\delta\varepsilon>0$ по дискриминантной кривой в сторону роста ε. Если же принять за положительное направление убывания ε, то получим правило, сформулированное в конце предыдущего параграфа.

§ 3. Кривые равных частот. В некоторых задачах теории регулирования, кроме дискриминантной кривой, могут быть весьма полезны кривые равных частот, предложенные Н. Т. Кузовковым, т. е. кривые в плоскости $\mu\nu$, на которых мнимая часть одной из пар комплексных корней имеет данное значение ω. Обозначая

$$\Lambda_\mu(\varepsilon, \omega) = \begin{vmatrix} Q_1(\varepsilon, \omega) & R_1(\varepsilon, \omega) \\ Q_2(\varepsilon, \omega) & R_2(\varepsilon, \omega) \end{vmatrix}$$

$$\Lambda_\nu(\varepsilon, \omega) = \begin{vmatrix} R_1(\varepsilon, \omega) & P_1(\varepsilon, \omega) \\ R_2(\varepsilon, \omega) & P_2(\varepsilon, \omega) \end{vmatrix} \tag{3.1}$$

$$\Lambda(\varepsilon, \omega) = \begin{vmatrix} P_1(\varepsilon, \omega) & Q_1(\varepsilon, \omega) \\ P_2(\varepsilon, \omega) & Q_2(\varepsilon, \omega) \end{vmatrix}$$

и разрешая (2.4) относительно μ, ν, найдем

$$\mu = \frac{\Lambda_\mu(\varepsilon, \omega)}{\Lambda(\varepsilon, \omega)}, \qquad \nu = \frac{\Lambda_\nu(\varepsilon, \omega)}{\Lambda(\varepsilon, \omega)} \tag{3.2}$$

При фиксированном $\omega > 0$ и переменном ε это суть параметрические уравнения кривой равной частоты. Правило штриховки не нуждается в особом выводе, так как оно представляет частный случай правила Ю. И. Неймарка: *принимая за положительное направление на кривой равной частоты направление убывания* ε, *следует штриховать при* $\Lambda(\varepsilon, \omega) > 0$ *левую, а при* $\Lambda(\varepsilon, \omega) < 0$ *правую сторону; при переходе с нештрихованной стороны на штрихованную теряется пара комплексных корней с мнимой частью, бо́льшей* ω.

Поступила 29 V 1950

Институт механики
Академии наук СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Мейман Н. Н. Некоторые вопросы расположения нулей полиномов. Успехи математических наук. 1949. Т. IV. Вып. 6 (34). Стр. 154.
2. Андронов А. А., Майер А. Г. Простейшие линейные системы с запаздыванием. Автоматика и телемеханика. 1946. Т. VII. № 2—3. Стр. 95.
3. Неймарк Ю. И. Об определении значений параметров, при которых система автоматического регулирования устойчива. Автоматика и телемеханика. 1948. Т. IX. № 3. Стр. 190.