Применяя к (11) критерий Гурвица, получим

$$\alpha\left[\gamma\delta - \xi + \frac{\gamma\varepsilon}{v^2}\right] - \zeta\gamma^2 > 0, \qquad \xi = \left(1 - \frac{I_2'^2}{II_2}\right)\frac{K_A K_B}{I_2}\alpha \tag{12}$$

(у автора в [1] в формуле для ξ на стр. 487 вкралась опечатка).

Вводя обозначение $p = \zeta\gamma^2 - \alpha(\gamma\delta - \delta)$, на основании (12) получим:

1) при $p < 0$ исходное движение устойчиво при всех скоростях;

2) при $p > 0$ исходное движение неустойчиво при $v_2 \geqslant \alpha\gamma\varepsilon/p$.

При критической скорости в этом случае возбуждается шимми.

Поступила в редакцию
5 IV 1950

Ленинградский политехнический
институт

ЛИТЕРАТУРА

1. Аронович Г. В. ПММ. 1949. Т. XIII. Вып. 5.

ОБ ОДНОМ СЛЕДСТВИИ ВАРИАЦИОННОГО ПРИНЦИПА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

А. П. Филин (Хабаровск)

Здесь имеется в виду доказательство положения о том, что принцип возможного изменения напряженного состояния является энергетической формой выражения условия сплошности среды.

В 1939 г. П. Ф. Папкович [1] (гл. XIV, стр. 594—596) дал исключительно простое доказательство рассматриваемого вариационного принципа наряду с доказательством всех энергетических теорем и вариационных принципов теории упругости. Его доказательство основано на представлении работы внешних сил, X_e, Y_e, Z_e приложенных к телу, в следующей форме:

$$\sum(X_e u + Y_e v + Z_e w) =$$

$$= \iint \{[\overline{X}_\nu - X_x\cos(x,\nu) - X_y\cos(y,\nu) - X_z\cos(z,\nu)]u + \cdots -$$

$$- Z_z\cos(z,\nu)]w\}\,dS + \iiint\left\{\left[X + \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}\right]u + \cdots +\right.$$

$$\left.+\frac{\partial Z_z}{\partial z}\right]w\Big\}\,dx\,dy\,dz + \iiint\left[X_x\left(\frac{\partial u}{\partial x} - e_{xx}\right) + \cdots +\right. \tag{1}$$

$$+ Z_x\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} - e_{zx}\right)\Big]\,dx\,dy\,dz + \iiint[X_x e_{xx} + \cdots + Z_x e_{zx}]\,dx\,dy\,dz$$

Здесь $\overline{X}_\nu dS$, $\overline{Y}_\nu dS$, $\overline{Z}_\nu dS$ — составляющие напряжений на поверхности тела на площадке dS с нормалью ν; $X dx\,dy\,dz$, $Y dx\,dy\,dz$, $Z dx\,dy\,dz$ — составляющие объемной силы, $X_x, \ldots, Y_z$ — компоненты тензора напряжений, $e_{xx}, \ldots, e_{yz}$ — компоненты тензора деформаций, u, v, w — составляющие перемещения.

Напомним, что в выражении (1) внешние силы, компоненты тензора напряжений, компоненты тензора деформаций и составляющие перемещений относятся к четырем различным произвольным напряженным состояниям. При этом доказательство П. Ф. Папковича дано впервые для общего случая, когда работа вариаций внешних сил на действительных перемещениях u, v, w не равна нулю [1].

[1] Обычно в литературе приводится весьма сложное доказательство этого положения, данное Саутсвеллом для частного случая, при котором вариации внешних поверхностных сил на перемещениях u, v и w не производят работы.

Остановимся на вопросе применимости доказательства П. Ф. Папковича и к любой сплошной среде, не подчиняющейся закону Гука. Сам П. Ф. Папкович считал [1] (стр. 595), что «к телам, не следующим закону Гука, начало виртуальных изменений напряженного состояния по смыслу его вывода не применимо».

Если ввести в рассмотрение функцию W' — дополнительную работу, то пользуясь предложенным П. Ф. Папковичем методом, легко доказать справедливость как самого принципа возможного изменения напряженного состояния, так и интересующего нас положения о том, что принцип возможного изменения напряженного состояния заменяет собой условия сплошности.

Не приводя доказательства самого принципа, которое можно найти у Л. М. Качанова [2], воспользуемся готовым результатом:

$$\sum [u\,\delta X_e + v\,\delta Y_e + w\,\delta Z_e] = \delta \iiint W' dx\,dy\,dz \tag{2}$$

или

$$\sum [u\,\delta X_e + v\,\delta Y_e + w\,\delta Z_e] = \delta \iiint \left[\int_0^{\sigma_i} e_i d\sigma_i + \frac{K\vartheta^2}{2} \right] dx\,dy\,dz \tag{3}$$

Здесь σ_i — интенсивность напряжений, e_i — интенсивность деформаций, K — модуль объемной деформации, ϑ — относительное объемное расширение элемента; вариация дополнительной работы в равенстве (2) определяется по формуле

$$\delta W' = e_{xx}\delta X_x + \cdots + e_{zx}\delta Z_x \tag{4}$$

Будем исходить из того, что принцип возможных изменений напряженного состояния справедлив, т. е. справедлива зависимость (2) при всяких таких

$$\delta X_e, \quad \delta Y_e, \quad \delta Z_e, \quad \delta \overline{X}_\nu, \quad \delta \overline{Y}_\nu, \quad \delta \overline{Z}_\nu, \quad \delta X, \quad \delta Y, \quad \delta Z, \quad \delta X_x, \ldots, \delta Z_x$$

которые удовлетворяют условиям равновесия.

Рассмотрим выражение, получающееся из (1) заменой

$$X_e, \quad Y_e, \quad Z_e, \quad \overline{X}_\nu, \quad \overline{Y}_\nu, \quad \overline{Z}_\nu, \quad X, \quad Y, \quad Z, \quad X_x, \ldots, Z_x$$

соответственно вариациями этих величин

$$\sum(\delta X_e u + \delta Y_e v + \delta Z_e w) = \tag{5}$$

$$= \iint \{[\delta \overline{X}_\nu - \delta X_x \cos(x,\nu) - \delta X_y \cos(y,\nu) - \delta X_z \cos(z,\nu)]\, u + \cdots -$$

$$- \delta Z_z \cos(z,\nu)]\, w\}\, dS + \iiint \left\{ \left[\delta X + \frac{\partial(\delta X_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\delta X_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\delta X_z)}{\partial z} \right] u + \cdots + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial(\delta Z_z)}{\partial z} \right] w \Big\} dx\,dy\,dz + \iiint \left[\delta X_x \left(\frac{\partial u}{\partial x} - e_{xx} \right) + \cdots + \right.$$

$$\left. + \delta Z_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} - e_{zx} \right) \right] dx\,dy\,dz + \iiint [\delta X_x e_{xx} + \cdots + \delta Z_x e_{zx}]\, dx\,dy\,dz$$

В этом равенстве первый и второй интегралы обращаются в нуль, а третий интеграл должен обратиться в нуль. Но для того чтобы третий интеграл обращался в нуль при любых малых значениях вариаций $\delta X_x, \ldots, \delta Z_x$, должны равняться нулю выражения в скобках, стоящих под интегралом, а это и обеспечивает справедливость уравнений Коши при подстановке в них деформаций и перемещений или, иными словами, подтверждает сплошность тела.

Поступила 10 X 1949

Хабаровский институт
инженеров ж.-д. транспорта

ЛИТЕРАТУРА

1. Папкович П. Ф. Теория упругости. Оборонгиз. 1939.
2. Качанов Л. М. Механика пластических сред. Гостехиздат. 1948.