ЗАМЕЧАНИЯ К СТАТЬЕ Г. В. АРОНОВИЧА „К ТЕОРИИ ШИММИ АВТОМОБИЛЯ И САМОЛЕТА"

Ю. В. Долголенко (Ленинград)

В статье Г. В. Ароновича[1] рассматриваются условия самовозбуждения колебаний передних колес автомобиля и аналогичных колебаний переднего колеса трехколесного шасси самолета. Эти явления получили название »шимми». Задача решается с помощью исследования линеаризированных уравнений малых возмущений исходного движения. К сожалению, случайные ошибки, допущенные автором в выкладках, исказили результаты Приводим необходимые исправления (двойная нумерация формул будет относиться к работе Г. В. Ароновича).

В § 2 рассматривается частный случай, когда за исходное движение принято равномерное и прямолинейное движение автомобиля при отсутствии трамплинга ($\varphi = 0$) и отсутствии вязкого трения при поворачивании передних колес вокруг вертикального их диаметра ($f_1 = 0$). Тогда, при использовании гипотезы увода для определения боковых сил реакции дороги, уравнения малых возмущений исходного движения имеют следующий вид [уравнения (2.1)]:

$$\frac{dv_x}{dt} + \frac{|\alpha|}{M} v_x = 0, \qquad \frac{dv_y}{dt} - C\omega + Dv_y + n\theta = 0$$
$$\frac{d\omega}{dt} + A\omega - Bv_y - m\theta + \frac{I_2}{I}\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0, \qquad I_2\frac{d^2\theta}{dt^2} + I_2\frac{d\omega}{dt} + k_1\theta = 0 \tag{1}$$

где A, B, C, D, m, n и α определяются формулами (1.5), а значение прочих величин, входящих в уравнения, объяснены на стр. 478. Для трех последних уравнений системы (1) автор получил характеристическое уравнение в виде (2.3)

$$(p+D)\left[(p+A)(I_2p^2+k_1) - \left(\frac{I_2}{I}p - m\right)I_2p\right] - BC(I_2p^2+k_1) - BnI_2p = 0$$

В действительности оно имеет следующий вид:

$$(p+D)\left[(p+A)(I_2p^2+k_1) - \left(\frac{I_2}{I}p^2 - m\right)I_2p\right] - BC(I_2p^2+k_1) - BnI_2p = 0 \tag{2}$$

Поэтому все дальнейшее исследование автора в § 2, является неверным.

Характеристическое уравнение (2) можно представить в виде

$$\frac{I_1I_2}{I}p^4 + I_2\left(A + D\frac{I_1}{I}\right)p^3 + [k_1 + I_2m + I_2(DA - BC)]\,p^2 +$$
$$+ [k_1(A+D) + I_2(Dm - Bn)]\,p + k_1(DA - BC) = 0 \tag{3}$$

где $I_1 = I - I_2$. На основании формул автора (1.5) получаем

$$DA - BC = \frac{1}{IMv^2}L^2K_AK_B - \frac{aK_A - bK_B}{I}, \qquad Dm - Bn = \frac{1}{IMv}LK_AK_B \tag{4}$$

В уравнении (3), как это видно на основании (4), коэффициенты при всех степенях p будут положительны, если $bK_B > aK_A$, а при $aK_A > bK_B$, если

$$v^2 < \frac{L^2K_AK_B}{M(aK_A - bK_B)} \tag{5}$$

Применяя критерий Гурвица к уравнению (3), получим

$$[k_1(A+D) + I_2(Dm - Bn)]\left\{I_2\left(A + D\frac{I_1}{I}\right)[k_1 + I_2m + I_2(DA - BC)] - \right.$$
$$\left. - \frac{I_1I_2}{I}[k_1(A+D) + I_2(Dm - Bn)]\right\} - I_2^2\left(A + D\frac{I_1}{I}\right)^2 k_1(DA - BC) > 0$$

Это неравенство после преобразований и сокращения на I_2^2 примет вид:

$$\frac{1}{I}\left[k_1(A+D)+I_2(Dm-Bn)\right]\left[(k_1+mI)A+I_1Bn\right]+$$
$$+(DA-BC)\left(A+D\frac{I_1}{I}\right)I_2\left[(Dm-Bn)+\frac{k_1}{I}D\right]>0 \qquad (6)$$

Так как $B>0$ при $aK_A>bK_B$, то первый член левой части в (6) больше нуля. При тех же условиях второй член левой части в (6) также больше нуля, пока $DA-BC>0$, т. е. пока выполнено неравенство (5). Таким образом, при $aK_A>bK_B$ единственным условием устойчивости невозмущенного движения будет условие (5). В предельном случае, когда неравенство (5) становится равенством, в нуль обращается свободный член характеристического уравнения (3), а потому при невыполнении условия (5) один корень уравнения (3) становится вещественным положительным. Это показывает, что неустойчивость исходного движения не будет иметь колебательного характера и, следовательно «шимми» не возбуждается.

Рассмотрим случай $bK_B>aK_A$. Введем обозначения

$$A_1=\frac{a^2K_A+b^2K_B}{I},\quad B_1=\frac{bK_B-aK_A}{I},\quad C_1=\frac{bK_B-aK_A}{M},\quad D_1=\frac{K_A+K_B}{M} \qquad (7)$$

Тогда согласно (7) и формулам (1.5) получим

$$A=\frac{A_1}{v},\qquad B=-\frac{B_1}{v},\qquad C=v-\frac{C_1}{v},\qquad D=\frac{D_1}{v} \qquad (8)$$

Подставляя (8) в (6), получим

$$I_2(D_1A_1-B_1C_1)(A_1I+D_1I_1)\left[I(D_1m+B_1n)+k_1D_1\right]+$$
$$+\{I\left[k_1(A_1+D_1)+I_2(D_1m+B_1n)\right]\left[(k_1+mI)A_1-I_1B_1n\right]+$$
$$+I_2B_1(A_1I+D_1I_1)\left[I(D_1m+B_1n)+k_1D_1\right]\}v^2>0 \qquad (9)$$

Если коэффициент при v^2 в (9) больше нуля, то исходное движение устойчиво при всех скоростях автомобиля. Если же

$$I\left[k_1(A_1+D_1)+I_2(D_1m+B_1n)\right]\left[(k_1+mI)A_1-I_1B_1n\right]+$$
$$+I_2B_1(A_1I+D_1I_1)\left[I(D_1m+B_1n)+k_1D_1\right]<0$$

то условие устойчивости примет вид: $\qquad v^2<\qquad$ (10)

$$<\frac{-I_2(D_1A_1-B_1C_1)(A_1I+D_1I_1)\left[I(D_1m+B_1n)+k_1D_1\right]}{I[k_1(A_1+D_1)+I_2(D_1m+B_1n)][(k_1+mI)A_1-I_1B_1n]+I_2B_1(A_1I+D_1I_1)[I(D_1m+B_1n)+k_1D_1}$$

При достижении автомобилем критической скорости, когда неравенство (10) превращается в равенство, два корня характеристического уравнения (3) будут мнимыми сопряженными, так как в нуль обращается при этом определитель Гурвица (6). Неустойчивость исходного движения будет иметь колебательный характер, т. е. происходит возбуждение шимми.

В § 3 автор рассматривает условия возбуждения шимми переднего колеса трехколесного шасси самолета. Характеристическое уравнение, при этом имеет вид

$$d_0p^4+d_1p^3+d_2p^2+d_3p+d_4=0 \qquad (11)$$

Здесь значения коэффициентов d определяются формулами (3.6).

При определении d_3 автором допущена ошибка, а потому дальнейшие его выкладки неверны. Правильное выражение для d_3 имеет следующий вид:

$$d_3=\frac{K_AK_B}{I_2v}\left(-\frac{\tau}{M}+\frac{b\tau^2}{I}-\frac{b^2\tau}{I}+\frac{I_2'L}{IM}\right)$$

Рассмотрим случай $\tau<0$ (вынос назад). Введем обозначения

$$d_1=\frac{\gamma}{v},\qquad d_2=\delta+\frac{\varepsilon}{v^2},\qquad d_3=\frac{K_AK_B}{I_2v}\alpha,\qquad d_4=\frac{K_AK_B}{I_2}\zeta$$

где γ, δ, ε, α и ζ определяются по формулам на стр. 487.

Применяя к (11) критерий Гурвица, получим

$$\alpha\left[\gamma\delta - \xi + \frac{\gamma\varepsilon}{v^2}\right] - \zeta\gamma^2 > 0, \qquad \xi = \left(1 - \frac{I_2'^2}{II_2}\right)\frac{K_A K_B}{I_2}\alpha \tag{12}$$

(у автора в [1] в формуле для ξ на стр. 487 вкралась опечатка).

Вводя обозначение $p = \zeta\gamma^2 - \alpha(\gamma\delta - \delta)$, на основании (12) получим:

1) при $p < 0$ исходное движение устойчиво при всех скоростях;

2) при $p > 0$ исходное движение неустойчиво при $v_2 \geqslant \alpha\gamma\varepsilon/p$.

При критической скорости в этом случае возбуждается шимми.

Поступила в редакцию
5 IV 1950

Ленинградский политехнический
институт

ЛИТЕРАТУРА

1. Аронович Г. В. ПММ. 1949. Т. XIII. Вып. 5.

ОБ ОДНОМ СЛЕДСТВИИ ВАРИАЦИОННОГО ПРИНЦИПА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

А. П. Филин (Хабаровск)

Здесь имеется в виду доказательство положения о том, что принцип возможного изменения напряженного состояния является энергетической формой выражения условия сплошности среды.

В 1939 г. П. Ф. Папкович [1] (гл. XIV, стр. 594—596) дал исключительно простое доказательство рассматриваемого вариационного принципа наряду с доказательством всех энергетических теорем и вариационных принципов теории упругости. Его доказательство основано на представлении работы внешних сил, X_e, Y_e, Z_e, приложенных к телу, в следующей форме:

$$\begin{gathered}\sum (X_e u + Y_e v + Z_e w) = \\ = \iint \{[\overline{X}_\nu - X_x \cos(x, \nu) - X_y \cos(y, \nu) - X_z \cos(z, \nu)]\, u + \cdots - \\ - Z_z \cos(z, \nu)]\, w\}\, dS + \iiint \left\{\left[X + \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}\right]u + \cdots + \right. \\ \left. + \frac{\partial Z_z}{\partial z}\right]w\Big\}\, dx\, dy\, dz + \iiint \left[X_x\left(\frac{\partial u}{\partial x} - e_{xx}\right) + \cdots + \right. \\ \left. + Z_x\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} - e_{zx}\right)\right] dx\, dy\, dz + \iiint [X_x e_{xx} + \cdots + Z_x e_{zx}]\, dx\, dy\, dz\end{gathered} \tag{1}$$

Здесь $\overline{X}_\nu dS$, $\overline{Y}_\nu dS$, $\overline{Z}_\nu dS$ — составляющие напряжений на поверхности тела на площадке dS с нормалью ν; $X dx\, dy\, dz$, $Y dx\, dy\, dz$, $Z dx\, dy\, dz$ — составляющие объемной силы, $X_x, \ldots, Y_z$ — компоненты тензора напряжений, $e_{xx}, \ldots, e_{yz}$ — компоненты тензора деформаций, u, v, w — составляющие перемещения.

Напомним, что в выражении (1) внешние силы, компоненты тензора напряжений, компоненты тензора деформаций и составляющие перемещений относятся к четырем различным произвольным напряженным состояниям. При этом доказательство П. Ф. Папковича дано впервые для общего случая, когда работа вариаций внешних сил на действительных перемещениях u, v, w не равна нулю [1].

---

[1] Обычно в литературе приводится весьма сложное доказательство этого положения, данное Саутвеллом для частного случая, при котором вариации внешних поверхностных сил на перемещениях u, v и w не производят работы.