

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ОПАСНЫХ И БЕЗОПАСНЫХ УЧАСТКОВ НА ГРАНИЦЕ
 УСТОЙЧИВОСТИ

М. А. Айзерман
 (Москва)

Известны случаи, когда параметры системы автоматического регулирования выбираются так, что условия устойчивости выполняются с незначительным запасом. Динамические системы такого рода в общем виде исследованы Н. Н. Баутиным [1,2]. В его работах показано, что при малом нарушении условий устойчивости:

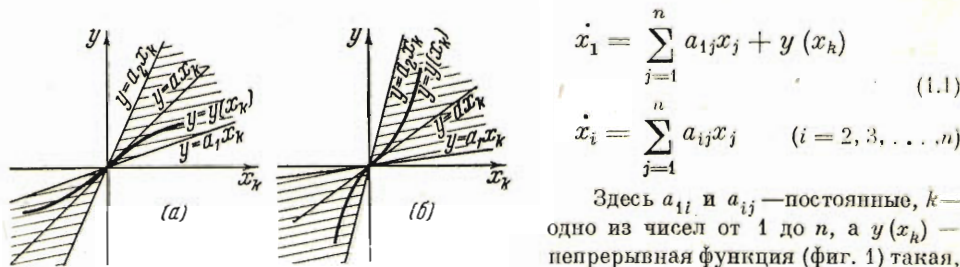
а) в системе могут генерироваться незазухающие колебания, амплитуда которых может быть сделана сколь угодно малой, если нарушения устойчивости достаточно малы, либо

б) система может перейти к новому положению равновесия или в ней могут генерироваться колебания, амплитуда которых не может быть сделана меньше некоторого числа, как бы мало ни были нарушены условия устойчивости.

В соответствии с этим Н. Н. Баутин предложил выделять на границе устойчивости *безопасные* (случай «а») и *опасные* (случай «б») участки.

Здесь указанная задача Н. Н. Баутина рассматривается для весьма частного, но встречающегося случая, когда уравнения, описывающие процесс регулирования, содержат только одну нелинейную функцию от одного аргумента и когда график этой функции протекает в соответствии с фиг. 1. В этом случае задача может быть решена без дополнительных вычислений.

1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений следующего вида;



Фиг. 1

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j + y(x_k) \\ \dot{x}_i &= \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \quad (i = 2, 3, \dots, n) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь a_{1i} и a_{ij} — постоянные, k — одно из чисел от 1 до n , а $y(x_k)$ — непрерывная функция (фиг. 1) такая, что $y(0) = 0$ и

$$\left[\frac{dy(x_k)}{dx_k} \right]_{x_k=0} = a > 0$$

и знак ее второй производной меняется в точке $x_k = 0$.

Уравнения линейного приближения в этом случае имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j + ax_k \\ \dot{x}_i &= \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \quad (i = 2, 3, \dots, n) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Если система (1.2) устойчива и если, не меняя значений a_{1i} и a_{ij} , изменять значения a , то могут быть найдены два числа a_1 и a_2 такие, что система (1.2)

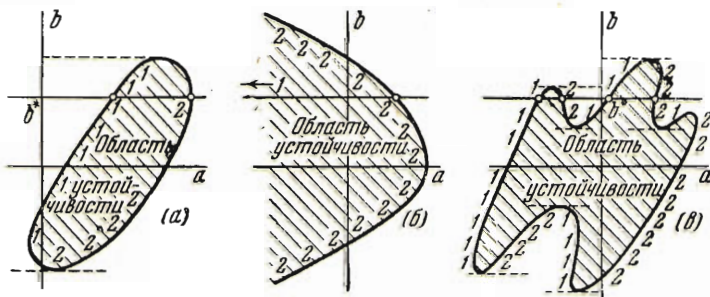
устойчива при любом $a_1 < a < a_2$ и неустойчива, если $a < a_1 - \varepsilon$ или $a > a_2 + \varepsilon$ по крайней мере для достаточно малого $\varepsilon > 0$.

Часть плоскости $x_k y$, заключенную между этими прямыми $y = a_1 x_k$ и $y = a_2 x_k$, назовем лучом (фиг. 1).

По крайней мере при малых x_k кривая $y = y(x_k)$ лежит между касательной $y = ax_k$ и одной из прямых $y = a_1 x_k$ или $y = a_2 x_k$. Ту прямую, между которой и касательной $y = ax_k$ лежит кривая $y = y(x_k)$, назовем *определяющей* (смысл этого названия выяснится ниже).

Выберем среди коэффициентов a_{1j} и a_{2j} какое-либо одно и, чтобы выделить среди остальных, обозначим его буквой b . Не меняя остальных коэффициентов, изменим значение b . Тогда для этого нового значения b найдутся новые значения a_1 и a_2 , т. е. новые прямые (новый луч) на плоскости $x_k y$.

Если теперь непрерывно изменять b , то и значения a_1 и a_2 будут непрерывно меняться. Граница устойчивости по b будет достигнута тогда, когда a_1 или a_2 станет равно a , т. е. когда одна из прямых $y = a_1 x_k$ или $y = a_2 x_k$ совпадает с касательной $y = ax_k$ к кривой $y = y(x_k)$.



Фиг. 2

При достижении границы устойчивости возможны два случая: 1) с касательной совпадает определяющая прямая и 2) с касательной совпадает вторая, неопределяющая прямая.

В первом случае граница устойчивости *опасная*, так как длина той части кривой $y = y(x_k)$, которая примыкает к точке $x_k = 0$ и расположена вне луча, при переходе значением b границы устойчивости не стягивается к нулю, как бы мало ни были нарушены условия устойчивости.

Во втором случае граница устойчивости *безопасная*, так как в этом случае длина той части кривой $y = y(x_k)$, которая примыкает к точке $x_k = 0$ и расположена вне луча, при нарушении условий устойчивости оказывается сколь угодно малой, если условия устойчивости нарушены достаточно мало ².

Таким образом, в частном случае системы (1) для отделения опасных участков границы устойчивости от безопасных требуется лишь выяснить, какая из прямых на фиг. 1, определяющая или неопределяющая, совпадает с касательной $y = ax_k$ при достижении границы устойчивости.

2. Построим в плоскости ab границу устойчивости системы (1.2) ³. Проведем в плоскости ab какую-либо прямую $b = b^* = \text{const}$, пересекающую границу устойчивости. Следуя вдоль этой прямой из точки $a = -\infty$ к точке $a = +\infty$, последовательно отметим цифрами 1, 2, 1, 2, ... точки пересечения прямой $b = b^*$ с границей устойчивости. Примеры даны на фиг. 2.

¹ Если только одно из чисел a_1 или a_2 не равно $+\infty$ или $-\infty$.

² Эти утверждения можно теперь доказать, исходя из уравнения (5.5) работы А. Шурье, публикуемой в этом же выпуске журнала.

³ Для такого построения может быть использован прием, указанный Ю. И. Неймарком [3].

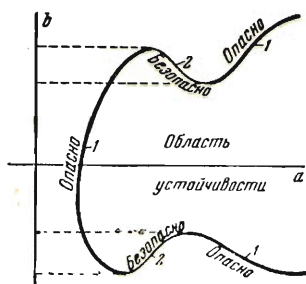
Если существует такое $M > 0$, что при любом $a < -M$ и при $b = b^*$ система устойчива, то точка $b = b^*$, $a = -\infty$ считается первой точкой пересечения прямой $b = b^*$ с границей устойчивости и ей приписывается индекс 1 (фиг. 2, б).

Изменим значение b , положив $b = b^{**}$, и вновь отметим таким же образом 1, 2, 1, 2, ... точки пересечения прямой $b = b^{**}$ с границей устойчивости.

Если таким образом перемещать прямую $b = \text{const}$ от $b = -\infty$ до $b = +\infty$, то на границе устойчивости выделятся участки с отметкой 1 и участки с отметкой 2 (фиг. 2). Разделяют эти участки все те точки, в которых прямая $b = \text{const}$ касается границы устойчивости.

Теперь непосредственно видно, что участки, имеющие отметку, совпадающую с индексом у углового коэффициента определяющей прямой на фиг. 2, являются *опасными*, а участки, у которых отметка не совпадает с индексом у углового коэффициента определяющей прямой, — *безопасными*.

Так, например, если какая-либо система (1.1) содержит нелинейную функцию $y = y(x_k)$, показанную на фиг. 1, а, а граница устойчивости в плоскости ab имеет



Фиг. 3

вид, представленный на фиг. 3, то эта граница устойчивости разбивается на участки с отметками 1 и 2 так, как это показано на фигуре. Участки с отметками 1 — опасные, с отметками 2 — безопасные.

Изложенное справедливо не только для системы (1), но и для более сложных систем, у которых одна и та же нелинейная функция $y = y(\sigma)$ содержится в нескольких уравнениях, а ее аргументом служит сумма

$$\sigma = \sum_{j=1}^n r_j x_j + h_j \dot{x}_j \quad (2.1)$$

где r_j и h_j — постоянные.

3. Рассмотрим в качестве первого примера обычную систему непрямого регулирования с сервомотором, имеющим жесткую обратную связь, при условии, что единственной нелинейностью служит нелинейная характеристика сервомотора.

Исследуем поведение системы при переходе через границу устойчивости, вызванном уменьшением коэффициента неравномерности. Уравнения движения будут

$$\begin{aligned} (T_g p + \delta_g) x_g &= -x_c \\ (T_r p^2 + T_k p + \delta_r) x_r &= x_g \\ \sigma &= x_r - x_c \end{aligned} \quad \left(p = \frac{d}{dt} \right) \quad (3.1)$$

К этим уравнениям должно быть добавлено уравнение сервомотора

$$\begin{aligned} p x_c &= y(\sigma) && \text{при учете нелинейности} \\ p x_c &= a \sigma && \text{при линейном приближении} \end{aligned} \quad (3.2)$$

В этих уравнениях T — постоянные времена, δ — коэффициенты неравномерности, x — отклонения обобщенных координат, σ — смещение золотника. Индексы относятся: g — к регулируемому объекту (предполагается, что он обладает самовывравниванием и $\delta_g > 0$), r — к чувствительному элементу, c — к сервомотору.

Характеристическое уравнение линеаризованной системы будет

$$(T_g p + \delta_g) (T_r^2 p^2 + T_k p + \delta_r) \left(\frac{1}{a} p + 1 \right) + 1 = 0 \quad (3.3)$$

Для того чтобы воспользоваться готовыми построениями границ областей устойчивости, приведенными в работе^[4], это уравнение представим в следующем виде:

$$(T_g^* p + 1) (T_r^{*2} p^2 + T_k^* p + 1) (T p + 1) + K = 0 \quad (3.4)$$

В уравнении (3.4) приняты следующие обозначения:

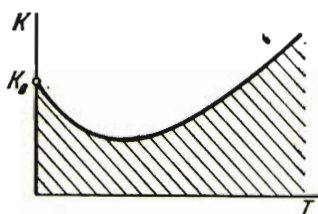
$$T = \frac{1}{a}, \quad K = \frac{1}{\delta_g \delta_r}, \quad T_g^* = \frac{T_g}{\delta_g}, \quad T_r^{*2} = \frac{T_r^2}{\delta_r}, \quad T_k^* = \frac{T_k}{\delta_r}$$

В плоскости TK граница области устойчивости протекает так^[4], как это показано на фиг. 4.

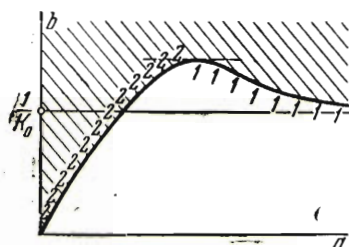
Примем в качестве изменяемого параметра b произведение $\delta_r \delta_g$. Тогда

$$b = \frac{1}{K}, \quad a = \frac{1}{T}$$

В соответствии с фиг. 4 граница области устойчивости в плоскости ab показана на фиг. 5, где нанесены отметки по указанным выше правилам.



Фиг. 5



Фиг. 4

Если характеристика сервомотора протекает вблизи начала координат в соответствии с фиг. 1, a , то определяющей является прямая $y = a_1 x_k$, ее угловой коэффициент a_1 имеет индекс 1, поэтому в этом случае на фиг. 5 точки с отметкой 1 соответствуют опасной, а точки с отметкой 2 соответствуют безопасной части границы устойчивости; в случае фиг. 1, b — наоборот.

4. В качестве второго примера рассмотрим одноконтурную цепь, состоящую из любого числа одноемкостных и колебательных элементов, предположив, что нелинейна только характеристика катаракта одного из колебательных элементов.

Уравнение такой цепи

$$T_1^2 \ddot{x}_1 + y(\dot{x}_1) + x_1 = -k_1 x_n \quad \left(p = \frac{d}{dt} \right)$$

$$d_j(p) x_j = k_j x_{j-1} \quad (j = 2, 3, \dots, n)$$

В этих уравнениях $d_j(p)$ — операторы следующего вида:

$$d_j(p) = T_j \frac{d}{dt} + 1 \quad \text{или} \quad d_j(p) = T_j^2 \frac{d^2}{dt^2} + T_{k_j} \frac{d}{dt} + 1$$

все T_j и k_j — положительные числа, а функция $y = y(\dot{x}_1)$ протекает в соответствии с фиг. 1.

Уравнение линейного приближения будут

$$T_1^2 \ddot{x}_1 + a \dot{x}_1 + x_1 = -k_1 x_n \quad (j = 2, 3, \dots, n)$$

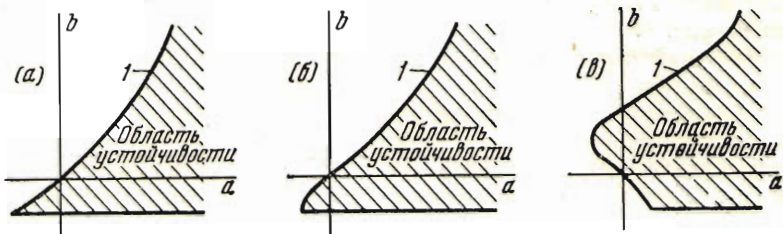
$$d_j(p) x_j = k_j x_{j-1}$$

Примем сначала за параметра b коэффициент усиления разомкнутой цепи

$$b = \prod_{j=1}^n k_j$$

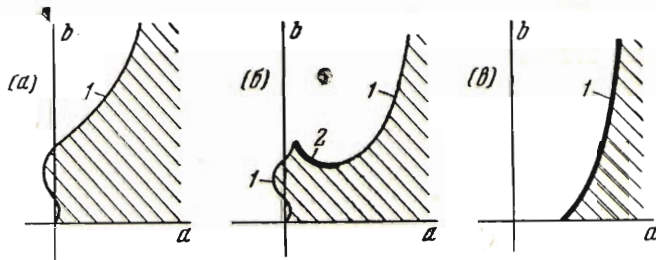
Три возможных случая протекания границы области устойчивости были определены в работе^[4] и показаны на фиг. 6.

Во всех трех случаях нельзя провести горизонтальной касательной к границе области устойчивости. Все точки границы имеют отметку 1 и безопасны, если характеристика катаракта протекает в соответствии с фиг. 1, б. Все эти точки опасны, если характеристика соответствует фиг. 1, а.



Фиг. 6

Примем теперь в этой же системе в качестве параметра b величину T_1^2 , т. е. квадрат постоянной времени того же элемента, к которому подключен нелинейный катаракт.



Фиг. 7

Здесь также можно воспользоваться уже готовыми построениями, выполненными в работе^[4]. Они приведены на фиг. 7. Только в случае фиг. 7, а может быть на границе области устойчивости выделен участок с отметкой 2. Для точек с отметкой 1 остаются в силе выводы, сделанные в отношении фиг. 6. Для точек фиг. 7, а с отметкой 2 выводы обратные — этот участок опасный при характеристике фиг. 1, б и безопасный при характеристике фиг. 1, а.

Поступила в редакцию
7 V 1950

ЛИТЕРАТУРА

1. Бау т и н Н. Н. О поведении динамических систем при малых нарушениях условий устойчивости Рауса-Гурвица. ПММ. 1948. Т. XII. Вып. 5. Его же. Критерии опасных и безопасных границ области устойчивости. ПММ. 1948. Т. XII. Вып. 6.
2. Бау т и н Н. Н. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. Гостехиздат. 1949.
3. Ней мар к Ю. И. Об определении значения параметров, при которых система автоматического регулирования устойчива. Автоматика и телемеханика. 1948. Т. IX. Вып. 3.
4. Ней мар к Ю. И. О структуре областей устойчивости одноконтурных систем. Автоматика и телемеханика. 1950. Т. X. Вып. 1.