Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XIX, 1950

О СХОДИМОСТИ МЕТОДА ШВЕЦА

Л. С. Гандин (Ленинград)

1. Цель настоящего сообщения — поставить вопрос о возможности доказательства сходимости метода М. Е. Швеца [1] для некоторых типов задач. Здесь сходимость этого метода доказывается для самой простой из рассмотренных в работе [1] задач. Эта задача сводится к решению уравнения

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial t} = \frac{\partial^2\vartheta}{\partial z^2} \tag{1.1}$$

при граничных условиях

$$(\vartheta)_{z=0} = 0, \qquad (\vartheta)_{z=\infty} = 1$$

Частный характер этой задачи состоит в том, что она:

1) является задачей об асимптотическом пограничном слое, т. е. управляется параболическим уравнением; область изменения аргумента, входящего во вторую производную, полупрямая, и неоднородное граничное условие ставится только по этому аргументу;

2) линейна;

3) может быть сведена к решению обыкновенного уравнения;

4) сводится к решению одного уравнения, а не системы;

5) не содержит ни в уравнении, ни в граничных условиях переменных коэффициентов.

Первое ограничение необходимо для применимости метода Швеца. Второе и третье существенны для элементарного способа доказательства сходимости, примененного ниже. Последние два ограничения непринципиальны.

2. Покажем, что n-е приближение метода Швеца для рассматриваемой задачи дает формулу

$$\frac{\partial\vartheta_n}{\partial z} = \left(\frac{\partial\vartheta_n}{\partial z}\right)_{z=0} \left[1 - \left(\frac{z}{\delta_n}\right)^2\right]^n \tag{2.1}$$

где

$$\delta_n^2 = (1+2n)\,2t, \qquad \left(\frac{\partial\vartheta_n}{\partial z}\right)_{z=0} = \frac{(2n-1)!!}{2n!!}\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\,\frac{1}{\sqrt{t}} \tag{2.2}$$

Приближение z/δ считается нулевым и, разумеется, не описывается выражением (2.1). Выражения (2.1) и (2.2) справедливы для $n=1$ (для второго приближения по М. Е. Швецу), как это видно из работы[1].

Пусть формулы (2.1) и (2.2) выполняются для n-го приближения, найдем тогда $n+1$-е приближение. Имеем

$$\vartheta_n = A_n \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k C_n^k}{2k+1}\left(\frac{z}{\delta}\right)^{2k+1} \tag{2.3}$$

где

$$A_n = \frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}, \qquad C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \tag{2.4}$$

Считая здесь δ неизвестной функцией от t ($\delta = \delta_{n+1}$) и определяя ϑ_{n+1} из соотношений

$$\frac{\partial^2 \vartheta_{n+1}}{\partial z^2} = \frac{\partial \vartheta_n}{\partial t}, \qquad (\vartheta_{n+1})_{z=0} = 0, \qquad (\vartheta_{n+1})_{z=\delta_{n+1}} = 1$$

получим

$$\frac{\partial \vartheta_{n+1}}{\partial z} = \frac{1}{\delta_{n+1}} \left\{ 1 + A_n \left[Q_n - R_n\left(\frac{z}{\delta}\right) \delta_{n+1} \dot{\delta}_{n+1} \right] \right\} \tag{2.5}$$

где обозначено

$$Q_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k C_n^k}{(2k+2)(2k+3)}, \qquad R_n(\alpha) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k C_n^k}{2k+2} \alpha^{2k+2}, \qquad \dot{\delta}_{n+1} = \frac{d\delta_{n+1}}{dt}.$$

Отсюда в силу условия

$$\left(\frac{\partial \vartheta_{n+1}}{\partial z}\right)_{z=\delta} = 0$$

имеем

$$\delta_{n+1}{}^2 = \frac{2t}{A_n [R_n(1) - Q_n]} \tag{2.6}$$

Почленным интегрированием разложения

$$\alpha(1-\alpha^2)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \alpha^{2k+1}$$

легко найти, что

$$\begin{aligned} Q_n &= \frac{1}{2(n+1)} - \frac{(2n)!!}{(2n+3)!!} \\ R_n(\alpha) &= \frac{1}{2(n+1)} \left[1 - (1-\alpha^2)^{n+1}\right] \end{aligned} \tag{2.7}$$

Подставляя (2.7) и выражение (2.4) для A_n сначала в формулу (2.6) для $\delta_{n+1}{}^2$, а затем вместе с полученным результатом в формулу (2.5), получим

$$\frac{\partial \vartheta_{n+1}}{\partial z} = \left(\frac{\partial \vartheta_{n+1}}{\partial z}\right)_{z=0} \left[1 - \left(\frac{z}{\delta_{n+1}}\right)^2\right]^{n+1} \tag{2.8}$$

где

$$\delta_{n+1}{}^2 = (3+2n)\, 2t, \qquad \left(\frac{\partial \vartheta_{n+1}}{\partial z}\right)_{z=0} = \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \sqrt{\frac{2n+3}{2}} \frac{1}{\sqrt{t}} \tag{2.9}$$

Формулы (2.8) и (2.9) получаются из (2.1) и (2.2) заменой n на $n+1$. Этим полностью доказана справедливость последних.

3. Из формулы Валлиса

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \to \infty} \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \frac{1}{2n+1} \tag{3.1}$$

сразу следует, что согласно (2.2) при $n \to \infty$

$$\left(\frac{\partial \vartheta_n}{\partial z}\right)_{z=0} \to \frac{1}{\sqrt{\pi t}}$$

т. е. стремится к точному значению $(\partial \vartheta_n / \partial z)_{z=0}$.

Используя это, найдем, что при $n \to \infty$ величина

$$\frac{\partial \vartheta_n}{\partial z} = \left(\frac{\partial \vartheta_n}{\partial z}\right)_{z=0} \left[1 - \frac{z^2}{(2+4n)t}\right]^n \to \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \exp \frac{-z^2}{4t}$$

Это также совпадает с точным значением этой величины. Доказательство для самой искомой величины ϑ сводится к переходу к пределу под интегралом, здесь, очевидно, допустимому. Наконец, согласно (2.2)

$$\lim \delta_n = \infty \qquad \text{при} \quad n \to \infty$$

Совокупность этих фактов и означает сходимость метода Швеца для рассмотренной задачи.

При доказательстве сходимости можно и не пользоваться знанием точного решения задачи. Можно исходить непосредственно из уравнения

$$\frac{\partial^2 \vartheta_n}{\partial z^2} - \frac{\partial \vartheta_n}{\partial t} = \varepsilon_n \tag{3.2}$$

и показать, что величина ε_n стремится с безграничным ростом n к нулю. Именно, легко получить для ε_n следующее выражение:

$$\varepsilon_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{z}{2\delta_n t} \left[1 - \left(\frac{z}{\delta_n t}\right)^2\right]^{n-1} \left(1 - \frac{z^2}{2t}\right) \tag{3.3}$$

Отсюда видно, что ε_n стремится к нулю при $n \to \infty$ и что $\varepsilon_n = 0$ при $z^2 / 2t = 1$. В последнем обстоятельстве можно видеть причину быстрой сходимости метода Швеца для рассмотренной задачи.

4. Как уже указывалось, приведенное доказательство может быть обобщено на случай систем уравнений и на случай наличия переменных коэффициентов, если только выполняются сформулированные выше первые три ограничения. В частности, уравнение со степенными переменными коэффициентами

$$z^m \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} z^n \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \tag{4.1}$$

заменой

$$\eta = \frac{1}{x} z^{m+2-n} \tag{4.2}$$

может быть преобразовано к обыкновенному уравнению

$$\frac{d^2\vartheta}{d\eta^2} + \left[\frac{1}{(m+2-n)^2} + \frac{m+1}{m+2-n} \frac{1}{\eta}\right] \frac{d\vartheta}{d\eta} = 0 \tag{4.3}$$

и после элементарного преобразования по формулам

$$\eta^\mu \frac{d\vartheta}{d\eta} = \frac{d\varphi}{d\xi}, \qquad \eta = \frac{(m+2-n)^2}{2} \xi^2 \qquad \left(\mu = \frac{m+1}{m+2-n}\right)$$

приведено к виду

$$\frac{d^2\varphi}{d\xi^2} = -\xi \frac{d\varphi}{d\xi} \tag{4.4}$$

к которому сводится также уравнение разобранной задачи, если положить

$$\vartheta = \varphi(\xi), \qquad \xi = \frac{z}{\sqrt{2t}}$$

Поэтому специальное доказательство сходимости метода Швеца для уравнения (4.1) является излишним.

Точно так же не требуется специального доказательства для случая, когда в граничные условия входят переменные величины, поскольку решения соответствующих задач можно получать из решения разобранной задачи, применяя метод суперпозиции.

Поступила в редакцию
15 V 1950

Главная геофизическая
обсерватория

ЛИТЕРАТУРА

1. Швец М. Е. О приближенном решении некоторых задач гидродинамики пограничного слоя. ПММ. 1949. Т. XIII. Вып. 3.