

РЕШЕНИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ЗАДАЧ СВОБОДНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ
 ПО ТЕОРИИ ТУРБУЛЕНТНОЙ ДИФФУЗИИ

Г. Л. Гродзовский (Москва)

В 1938 г. Б. Я. Трубчиковым ^[1] было выдвинуто предположение о том, что задачи свободной турбулентности можно решать, принимая закон постоянства коэффициента турбулентной диффузии в поперечном сечении зоны турбулентного перемешивания. На основе этой теории Б. Я. Трубчиковым было получено решение задачи о плоском турбулентном следе за телом, а также проведено экспериментальное исследование, хорошо согласующееся с теоретическим результатом.

Аналогичная предположению Б. Я. Трубчикова гипотеза о постоянстве коэффициента турбулентной диффузии была выдвинута Л. Прандтлем лишь в 1942 г. На основе этой гипотезы Гертлером ^[2] были получены решения ряда плоских задач свободной турбулентности ^[1].

В настоящей работе приведены решения задач о распространении осесимметричной турбулентной струи несжимаемого газа в затопленном пространстве и о турбулентном следе за телом вращения по теории турбулентной диффузии,

1. Распространение осесимметричной турбулентной струи. Рассмотрим истечение струи из отверстия (сопла) бесконечно малого диаметра с бесконечно большой скоростью π и конечном импульсе I . При постоянном давлении в струе теорема импульсов запишется в следующем виде:

$$I = 2\pi\rho \int_0^{\infty} u^2 r dr = \text{const} \quad (1.1)$$

где u — продольная скорость в струе, ρ — плотность. Пренебрегая вязкостью, запишем уравнение движения в цилиндрических координатах в виде

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\pi_{xr}) \quad (1.2)$$

где v — поперечная скорость в струе, π_{xr} — касательное напряжение турбулентного трения. Выражение для турбулентного касательного напряжения принимаем по теории турбулентной диффузии, выдвинутой Б. Я. Трубчиковым [1]:

$$\pi_{xr} = \rho \overline{l_u v'} \frac{\partial u}{\partial r} = \rho \chi R u_m \frac{\partial u}{\partial r} \quad (1.3)$$

Здесь $\overline{l_u v'}$ — коэффициент турбулентной диффузии, постоянный в поперечном сечении потока, l_u — путь смещения скорости, v' — поперечная пульсационная скорость, u_m — скорость на оси струи, χ — экспериментальная константа, зависящая от степени турбулентности потока, R — характерная ширина зоны турбулентного перемешивания. Так как в данной задаче нет ни одной характерной длины, то профили продольных скоростей должны быть подобны.

Введем функцию тока ψ так, что

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad v = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Из анализа размерности уравнений (1.1), (1.2) и (1.3) можно положить

$$R = kx, \quad \eta = \frac{r}{x}, \quad \psi = Ax F(\eta) \quad (1.4)$$

и, следовательно,

$$u = \frac{A}{x} \frac{F'}{\eta}, \quad v = \frac{A}{x} \left(F' - \frac{F}{\eta} \right) \quad (1.5)$$

В соотношениях (1.5) произвольный коэффициент A выбирается так, что на оси струи $F'/\eta \rightarrow 1$ при $\eta \rightarrow 0$, т. е. $u_m = A/x$,

Согласно (1.2), (1.3), (1.4) и (1.5) уравнение для $F(\eta)$ после однократного интегрирования можно записать в виде

$$\frac{FF'}{\eta} = \chi k \left(\frac{F''\eta - F'}{\eta} \right) + \text{const} \quad (1.6)$$

Постоянная интегрирования здесь равна нулю, так как на оси струи скорость u остается конечной, а v и $\partial u / \partial r$ стремятся к нулю, т. е.

$$\frac{F'}{\eta} \rightarrow 1, \quad F \rightarrow 0, \quad \frac{F''\eta - F'}{\eta} \rightarrow 0 \quad \text{при } \eta \rightarrow 0$$

Полученное уравнение (1.6) совпадает с уравнением для ламинарной осесимметричной струи, которое решено путем разложения в ряды [4]. Результат может быть проще получен и в конечной форме. Уравнение (1.6) можно представить в виде

$$-2\chi k (F'\eta)' = (2\chi k - F')^2 \quad (1.7)$$

Интегрируя уравнение (1.7), последовательно получаем

$$F' = 2 \frac{F}{\eta} - \frac{F^2}{2\chi k \eta}, \quad F = \frac{\eta^2}{2(1 + \eta^2/8\chi k)} \quad (8)$$

Теперь согласно (1.5) имеем

$$u = \frac{A}{x} \frac{1}{(1 + \eta^2/8\chi k)^2}, \quad v = \frac{A}{x} \frac{\eta}{2} \frac{1 - \eta^2/8\chi k}{(1 + \eta^2/8\chi k)^2} \quad (1.9)$$

Для нахождения связи константы χ с общепринятой экспериментальной константой свободной турбулентности a составим полученное решение с решением Тольмина [3] по теории «пути смешения». Запишем уравнение для продольной скорости u (1.9) в переменных Тольмина $\eta_T = r/ax$, учитывая, что по решению Тольмина граница струи $R = 3.4 ax$, т. е. $k = 3.4 a$. Имеем

$$u = \frac{A}{x} \frac{1}{(1 + \eta_T^2 a / 27.2\chi)^2}$$

Тогда уравнение импульсов (1.1) запишется в виде

$$I = 2\pi r A^2 a^2 \int_0^\infty \frac{\eta_T d\eta_T}{(1 + \eta_T^2 a / 27.2\chi)^4}$$

Интеграл

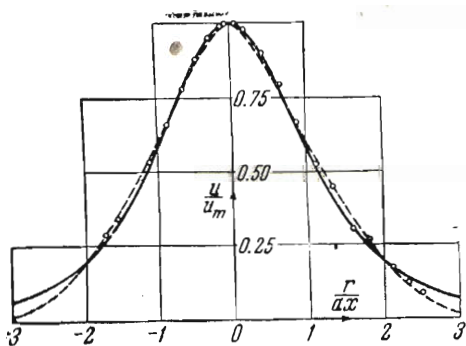
$$\int_0^\infty \frac{\eta_T d\eta_T}{(1 + \eta_T^2 a / 27.2\chi)^4} = 4.53 \frac{\chi}{a}$$

согласно Тольмину равен 0.536. Отсюда

$$\chi = 0.118a, \quad A = \frac{0.965}{a} \sqrt{\frac{I}{\pi r}} \quad (1.10)$$

Вводя константу a , представим решение (1.9) в виде

$$u = \frac{0.965}{ax} \sqrt{\frac{I}{\pi r}} \frac{1}{(1 + 0.312r^2/a^2x^2)^2}, \quad v = \frac{0.48}{x} \sqrt{\frac{I}{\pi r}} \frac{r}{ax} \frac{1 - 0.312r^2/a^2x^2}{(1 + 0.312r^2/a^2x^2)^2}$$



Фиг. 1

При этом на условной границе струи (соответствующей решению Тольмина) при $R = 3.4$ *ax* относительное значение продольной скорости

$$\frac{u}{u_m} = \frac{1}{(1 + 0.312r^2 / a^2x^2)^2}$$

составляет 4.7% к скорости на оси струи. На фиг. 1 сплошной линией дается профиль относительной скорости в струе согласно решению (1.10) и пунктиром профиль по решению Тольмина; точками даны результаты опытов Кунта [3].

Согласно фиг. 1 соответствие определенного теоретического профиля продольной скорости и данных эксперимента вполне удовлетворительное, особенно в центральной части струи. Применение полученного решения для расчетов удобнее, чем решение Тольмина, так как в найденном решении профили скорости заданы аналитически (1.10), тогда как по решению Тольмина они задаются графически или таблицей. Полученное решение может быть использовано для определения по способу Г. Н. Абрамовича [2] параметров струи, вытекающей из сопла. При этом необходимо пользоваться полученными профилями скорости, а все расчетные формулы Г. Н. Абрамовича остаются неизменными.

2. Турбулентный след за телом вращения. Считая, что в безграничном потоке отсутствует продольный градиент давления, и пренебрегая вязкостью, запишем уравнение движения в цилиндрических координатах в виде

$$u_0 \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\pi_{xr}) \quad (2.1)$$

где u_0 — скорость невозмущенного потока, $u_0 - u$ — продольная скорость потока в следе. На большом удалении от тела, пренебрегая в уравнении (2.1) малыми членами с u и v по сравнению с u_0 , запишем уравнение движения в виде

$$u_0 \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\pi_{xr}) \quad (2.2)$$

Как и в случае осесимметричной турбулентной струи, выражение для турбулентного касательного напряжения принимаем по теории турбулентной диффузии

$$\pi_{xr} = \rho l_u \overline{v'} \frac{\partial u}{\partial r} = \rho k R u_m \frac{\partial u}{\partial r} \quad (2.3)$$

Разность количества движения, протекающих в единицу времени через нормальные сечения потока перед телом и в следе, есть величина постоянная, равная сопротивлению обтекаемого тела:

$$W = 2\pi \rho u_0 \int_0^{\infty} u r dr = \text{const} \quad (2.4)$$

Принимая, что профили u в различных сечениях турбулентного следа подобны, из анализа размерности уравнений (2.2), (2.3) и (2.4) можно положить

$$R = kx^{1/2}, \quad \eta = \frac{r}{x^{1/2}}, \quad u = \frac{Au_0}{x^{1/2}} F(\eta) \quad \left(u_m = \frac{Au_0}{x^{1/2}} \right) \quad (2.5)$$

Здесь коэффициент A выбран так, что на оси следа $F' \rightarrow 1$ при $\eta \rightarrow 0$.

Уравнение для $F(\eta)$ согласно (2.2), (2.3), (2.4) и (2.5) имеет вид:

$$F' \eta^2 + 2F\eta = -3\eta k A (F''\eta + F')$$

Интегрируя один раз, имеем

$$F\eta^2 = -3\eta k A F'\eta + \text{const} \quad (2.6)$$

Постоянная интегрирования здесь равна нулю, так как на оси следа скорость u остается конечной, $\partial u / \partial r$ стремится к нулю, т. е. $F \rightarrow 1$, $F' \rightarrow 0$ при $\eta \rightarrow 0$.

Интегрируя уравнение (2.6), получаем

$$F = \exp\left(-\frac{\eta^2}{6\chi k A}\right) = \exp\left(-\frac{\eta^{*2} k}{6\chi A}\right) \quad \left(\eta^* = \frac{\eta}{k} = \frac{r}{R}\right) \quad (2.7)$$

Сопоставим полученный результат с решением^[3] Свайн $F = (1 - \eta^{*3/2})^2$ по теории «пути смешения». Уравнение импульсов (2.4) запишется в виде

$$W = 2\pi\rho A u_0^2 k^2 \int_0^\infty \eta^* \exp\left(-\frac{\eta^{*2} k}{6\chi A}\right) d\eta^* \quad (2.8)$$

Интеграл

$$\int_0^\infty \eta^* \exp\left(-\frac{\eta^{*2} k}{6\chi A}\right) d\eta^* = \frac{3\chi A}{k}$$

по решению Свайн равен 0.128. Отсюда $A = 0.0427 k/\chi$ и из уравнения (2.8), вводя коэффициент лобового сопротивления тела вращения c_x , имеем

$$c_x S = 12 \pi \chi k A^2 \quad \left(c_x S = \frac{W}{\rho u_0^2 / 2}\right) \quad (2.9)$$

По (2.7) и (2.9) определяются значения искомых параметров:

$$F = e^{-3.91\eta^{*2}} \quad k = 2.44 \sqrt[3]{c_x S \chi}, \quad A = 0.104 \sqrt[3]{\frac{c_x S}{\chi^2}}$$

или

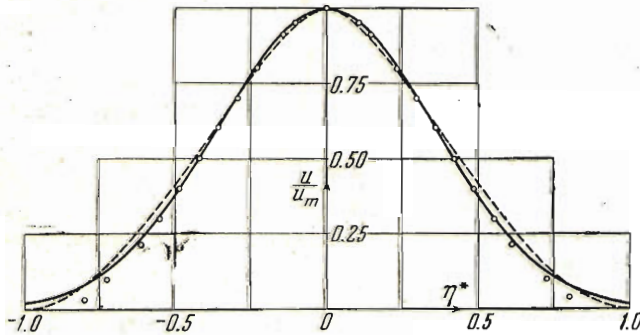
$$R = 2.44 \sqrt[3]{c_x S \chi}, \quad u = 0.104 \sqrt[3]{\frac{c_x S}{\chi^2 x^2}} e^{-3.91\eta^{*2}} \quad (2.10)$$

При этом на условной границе следа (соответствующей решению Свайн) для $r=R$ относительная продольная скорость

$$\frac{u}{u_m} = e^{-3.91\eta^{*2}}$$

составляет 2.0% к скорости на оси следа.

На фиг. 2 сплошной линией дается профиль скорости в следе по уравнению (2.10) и пунктирной линией по решению Свайн; точками даны результаты опытов Холла и Хвасова^[3].



Фиг. 2

Согласно данным фиг. 2 полученное решение согласуется с экспериментом значительно точнее, чем решение Свайн по теории «пути смешения», а также значительно лучше, чем решения Гольдштейна по видоизмененной теории переноса завихренности^[3]. Поэтому полученное простое решение задачи о турбулентном следе за телом вращения может быть успешно применено для приложений (например, при определении методом импульсов сопротивления тел вращения).

Поступила 18 I 1950

ЛИТЕРАТУРА

1. Трубочков Б. Я. Тепловой метод измерения турбуленности в аэродинамических трубах. Труды ЦАГИ. 1938. № 372.
2. Абрамович Г. В. Турбулентные свободные струи жидкостей и газов. 1948.
3. Современное состояние гидроаэродинамики вязкой жидкости под ред. С. Гольдштейна. ГИИЛ. 1948.
4. Лойцянский Л. Г. Аэродинамика пограничного слоя. ГИТТЛ. 1941.