

**ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ НЕСТАЦИОНАРНОГО
 ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ**

А. М. Кочетков (Москва)

В настоящей заметке рассматриваются две задачи нестационарного движения вязко-пластической среды: задача об ударе жестким цилиндром по пластинке, которой занимался Ф. А. Бахшиян [1], и задача о вращательном движении вязко-пластической среды.

Указанные задачи могут быть рассмотрены путем численного интегрирования; первая задача таким образом была решена автором в его диссертации, а вторая В. В. Соколовским [2]. Однако, как было указано В. В. Соколовским [2], к их решению может быть также применен приближенный прием, разработанный М. Е. Швецом [3] для аналогичных задач гидродинамики пограничного слоя.

§ 1. Приближенное интегрирование уравнения вязко-пластического течения при ударе цилиндра по пластинке. Напомним постановку задачи. Пусть цилиндр радиуса R и массы M ударяется с достаточно большой скоростью v_0 о бесконечную пластинку, толщина которой h . Предполагаем, что пластинка работает только на сдвиг, причем напряжения сдвига по толщине пластинки постоянны. Напряжение и деформированное состояние пластинки определяется компонентой напряжения τ_{rz} и компонентой деформации γ_{rz} , являющимися функциями только координаты r и времени t . При решении задачи примем зависимости между компонентой напряжения τ_{rz} и компонентой деформации γ_{rz} , предложенные А. Ньюшиным [4]:

$$\frac{d\gamma_{rz}}{dt} = 0 \quad \text{при } \tau_{rz} \leq \tau_s, \quad \frac{d\gamma_{rz}}{dt} = \frac{1}{\mu} (\tau_{rz} - \tau_s) \quad \text{при } \tau_{rz} \geq \tau_s \quad (1.1)$$

Здесь τ_s — предел текучести на сдвиг, μ — коэффициент вязкости.

Уравнение движения имеет вид (λ — плотность материала):

$$\lambda \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} \quad (1.2)$$

Скорость смещения v по оси z и деформация γ_{rz} связаны со смещением u так:

$$v = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \frac{\partial \gamma_{rz}}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial r} \quad (1.3)$$

Уравнения (1.1) и (1.2) при помощи (1.3) дают систему параболического типа:

$$\mu \frac{\partial v}{\partial r} = \varphi (\tau_{rz} - \tau_s), \quad \lambda \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} \quad (1.4)$$

для определения напряжения τ_{rz} и скорости v .

Деформация определяется из уравнения

$$\mu \frac{\partial \gamma_{rz}}{\partial t} = \varphi (\tau_{rz} - \tau_s) \quad (1.5)$$

Здесь функция φ определена равенствами

$$\varphi(z) = 0 \quad \text{при } z \leq 0, \quad \varphi(z) = z \quad \text{при } z \geq 0$$

Введем безразмерные переменные

$$\rho = \frac{\sqrt{n\lambda\tau_s}}{\mu} r, \quad \rho_0 = \frac{\sqrt{n\lambda\tau_s}}{\mu} R, \quad \tau = \frac{n\tau_s}{\mu} t$$

$$T = \frac{\tau_{rz}}{\tau_s}, \quad \gamma = n\gamma_{rz}, \quad V = \sqrt{\frac{n\lambda}{\tau_s}} v, \quad U = \frac{n}{\mu} \sqrt{n\lambda\tau_s} u$$

Здесь n — некоторое наперед выбранное число, введенное для удобства. Уравнения (1.4) в безразмерных переменных примут вид:

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} = \frac{\partial T}{\partial \rho} + \frac{T}{\rho}, \quad \frac{\partial V}{\partial \rho} = \varphi(T-1) \quad (1.6)$$

Эти уравнения параболического типа и, следовательно, имеют одно семейство характеристик $\tau = \text{const}$. Уравнение (1.5) в безразмерных переменных будет

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \tau} = \varphi(T-1)$$

Уравнения (1.6) определяют T и V и могут быть представлены в виде

$$T = \frac{1}{2} V'(\tau) \rho + \frac{C(\tau)}{\rho}, \quad V = V(\tau) \quad \text{при } T \leq 1 \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} = \frac{\partial T}{\partial \rho} + \frac{T}{\rho}, \quad \frac{\partial V}{\partial \rho} = T-1 \quad \text{при } T \geq 1 \quad (1.8)$$

Из уравнения (1.8) следует

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} = \frac{\partial V}{\partial \tau} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \quad (1.9)$$

Решение уравнения (1.9) должно удовлетворять граничным и начальным условиям, которые в безразмерных переменных имеют вид:

$$V(\rho_0, \tau) = V_0, \quad V(\delta, \tau) = 0 \quad (1.10)$$

Здесь $\delta = \delta(\tau)$ — граница вязко-пластической и жесткой зон.

Первое приближение уравнения (1.9) находим, решая уравнение $\partial^2 V / \partial \rho^2 = 0$ при граничных условиях (1.10). Это приближение имеет вид:

$$V = V_0 \frac{\delta - \rho}{\delta - \rho_0} \quad (1.11)$$

Подставляя первое приближение для V в первую часть уравнения (1.9) и осуществляя две квадратуры, получим второе приближение:

$$V = V_0 \frac{\delta - \rho}{\delta - \rho_0} + \frac{V_0 - \delta + \rho_0}{(\delta - \rho_0)^2} \ln \left[\left(\frac{\rho}{\delta} \right)^{\rho \delta} \left(\frac{\delta}{\rho_0} \right)^{\delta \rho_0} \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^{\rho_0 \rho} \right] + \frac{V_0(\rho - \rho_0)}{6} \delta' \left[\left(\frac{\rho - \rho_0}{\delta - \rho_0} \right)^2 - 1 \right] \quad (1.12)$$

Напряжение T находится из (1.8) в виде

$$T = \frac{V_0 - \delta + \rho_0}{(\delta - \rho_0)^2} \ln \left[\left(\frac{\rho}{\delta} \right)^{\delta} \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^{\rho_0} \right] + \frac{V_0 \delta'}{6} \left[3 \left(\frac{\rho - \rho_0}{\delta - \rho_0} \right)^2 - 1 \right] \quad (1.13)$$

Граница вязко-пластического течения $\delta = \delta(\tau)$ определяется из условия

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \rho} \right)_{\rho=\delta} = 0 \quad (1.14)$$

Последнее условие дает

$$\frac{d\delta}{d\tau} = \frac{3}{V_0} \left[1 + \frac{V_0 - \delta + \rho_0}{(\delta - \rho_0)^2} \rho_0 \ln \frac{\delta}{\rho_0} \right] \quad (1.15)$$

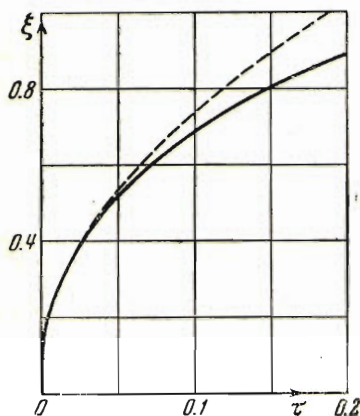
Обозначим $\delta - \rho_0 = \xi$, $\rho - \rho_0 = x$; формулы (1.12), (1.13) и (1.15) примут вид:

$$V = V_0 \frac{\xi - x}{\xi} + \frac{V_0 - \xi}{\xi^2} \ln \left[\left(\frac{\rho_0 + x}{\rho_0} \right)^{\xi \rho_0} \left(\frac{\rho_0 + x}{\rho_0 + \xi} \right)^{\xi x} \left(\frac{\rho_0}{\rho_0 + \xi} \right)^{\xi} \right] - \frac{x}{2} \left(1 - \frac{x^2}{\xi^2} \right) \left(\zeta = \frac{\rho_0 x}{2} \left[3 - \frac{x^2}{\xi^2} \right] \right) \quad (1.16)$$

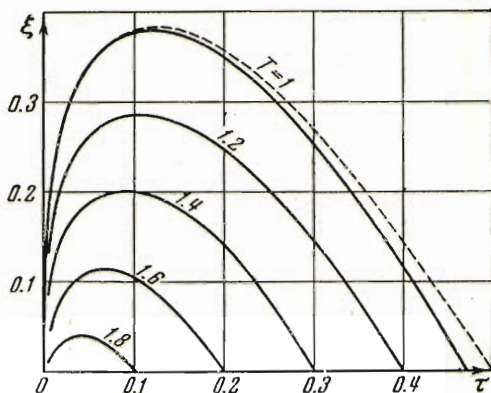
$$T = \frac{V_0 - \xi}{\xi^2} \ln \left[\left(\frac{\rho_0 + x}{\rho_0 + \xi} \right)^{\xi} \left(\frac{\rho_0}{\rho_0 + \xi} \right)^{\chi} \right] + \frac{3}{2} \left(\frac{x^2}{\xi^2} - \frac{1}{3} \right) \left(\chi = \frac{3\rho_0}{2} \left[1 - \frac{x^2}{\xi^2} \right] \right) \quad (1.17)$$

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \frac{3}{V_0} \left[1 + \frac{V_0 - \xi}{\xi^2} \rho_0 \ln \frac{\rho_0 + \xi}{\rho_0} \right] \quad (1.18)$$

На фиг. 1 показана граница вязко-пластической и жесткой зон, построенная по уравнению (1.18) при $V_0 = -1$ и $\rho_0 = 1$. Пунктиром показана граница вязко-пластической и жесткой зон, подсчитанная другим способом.



Фиг. 1



Фиг. 2

§ 2. Приближенное интегрирование уравнений вращательного течения вязко-пластической среды. Рассмотрим напряженное и деформированное состояние вязко-пластической среды, занимающей внешность круга $r > R$ и ограниченной окружностью $r = R$, на которой задано касательное напряжение

$$\tau_{r\theta} = \tau_{r\theta}^0 \left(1 - \frac{t}{t_0}\right) \quad (2.1)$$

Такое течение определяется компонентой напряжения $\tau_{r\theta}$, компонентой деформации $\gamma_{r\theta}$, скоростью v_θ и смещением u_θ , причем все эти величины суть только функции от r и t . Как показал В. В. Соколовский [2], напряженное и деформированное состояние в этом случае определяется уравнениями

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} = \frac{\partial T}{\partial \rho} + \frac{2T}{\rho}, \quad \frac{\partial V}{\partial \rho} - \frac{V}{\rho} = \varphi(T-1) \quad (2.2)$$

Эти уравнения определяют величины T и V и принадлежат к параболическому типу. Деформация определяется из равенства

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \tau} = \varphi(T-1) \quad (2.3)$$

Уравнения (2.2) можно представить так:

$$T = \frac{A(\tau)}{\rho^2} + \frac{\rho^2}{4} B'(\tau), \quad V = \rho B(\tau), \quad \text{при } T \leq 1 \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} = \frac{\partial T}{\partial \rho} + \frac{2T}{\rho}, \quad \frac{\partial V}{\partial \rho} = \frac{V}{\rho} + T - 1 \quad \text{при } T \geq 1$$

Начальные и граничные данные могут быть представлены в виде

$$V(\rho_0, 0) = 0, \quad T = T_0 \left(1 - \frac{\tau}{\tau_0}\right) \quad (2.5)$$

После исключения функций V из последних двух уравнений (2.4) будем иметь

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \rho^2} = \frac{\partial T}{\partial \tau} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial T}{\partial \rho} + \frac{4T}{\rho^2} \quad (2.6)$$

Будем интегрировать это уравнение приближенно при граничных условиях

$$T(\rho_0 \tau) = T_0 \left(1 - \frac{\tau}{\tau_0}\right), \quad T(\delta, \tau) = 1 \quad (2.7)$$

Первое приближение для уравнения (2.6) находим, решая уравнение $\partial^2 T / \partial \rho^2 = 0$ при граничных условиях (2.7). Это приближение имеет вид:

$$T = 1 + \left(\frac{\delta - \rho}{\delta - \rho_0} \right) \left[T_0 \left(1 - \frac{\tau}{\tau_0} \right) - 1 \right]$$

Подставляя первое приближение в правую часть уравнения (2.6) и осуществляя две квадратуры, получим второе приближение:

$$T^p = 1 + \frac{T_0 (\delta - \rho) (\rho - \rho_0) (2\delta - \rho - \rho_0)}{6 \tau_0 (\delta - \rho_0)} + \frac{4}{\delta - \rho_0} \ln \left[\left(\frac{\rho}{\delta} \right)^{\rho_0} \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^\delta \left(\frac{\delta}{\rho_0} \right)^\rho \right] + \left[T_0 \left(1 - \frac{\tau}{\tau_0} \right) - 1 \right] \Phi(\rho, \delta, \rho_0) \quad (2.8)$$

В жесткой области согласно уравнению (2.4) имеем $T^e = \delta^2 / \rho^2$.

Граница вязко-пластического течения определяется из условия

$$\left(\frac{\partial T^e}{\partial \rho} \right)_{\rho=\delta} = \left(\frac{\partial T^p}{\partial \rho} \right)_{\rho=\delta} \quad (2.9)$$

Из равенства (2.9) получаем

$$\frac{d\delta}{d\tau} = 3 \left\{ \frac{8}{\delta - \rho_0} - \frac{4\delta + 2\rho_0}{(\delta - \rho_0)^2} \ln \frac{\delta}{\rho_0} + \frac{1}{T_0 (1 - \tau/\tau_0) - 1} \left[\frac{2}{\delta} + \frac{T_0}{6\tau_0} (\delta - \rho_0) - \frac{4}{\delta - \rho_0} \ln \frac{\delta}{\rho_0} \right] \right\} \quad (2.10)$$

Если обозначить $\delta - \rho_0 = \xi$ и $\rho - \rho_0 = x$, то формулы (2.8) и (2.10) примут вид:

$$T = 1 + \frac{T_0 x}{6\tau_0 \xi} (\xi - x) (2\xi - x) + \frac{4}{\xi} \ln \left[\left(\frac{\rho_0 + \xi}{\rho_0} \right)^x \left(\frac{\rho_0}{\rho_0 + x} \right)^\xi \right] + \left[T_0 \left(1 - \frac{\tau}{\tau_0} \right) - 1 \right] \Phi(x, \xi, \rho_0) \quad (2.11)$$

$$\frac{d\xi}{d\tau} = 3 \left\{ \frac{8}{\xi} - \frac{4\xi + 7\rho_0}{\xi^2} \ln \frac{\rho_0 + \xi}{\rho_0} + \frac{1}{T_0 (1 - \tau/\tau_0) - 1} \left[\frac{2}{\rho_0 + \xi} + \frac{T_0}{6\tau_0} \xi - \frac{4}{\xi} \ln \frac{\rho_0 + \xi}{\rho_0} \right] \right\} \quad (2.12)$$

Здесь

$$\Phi(x, \xi, \rho_0) = \frac{\xi - x}{\xi} + \frac{x}{6} \left(\frac{x^2}{\xi^2} - 1 \right) \frac{d\xi}{d\tau} + \ln \left[\left(\frac{\rho_0 + \xi}{\rho_0} \right)^{\frac{x}{\xi} \left(1 + \frac{\rho_0}{\xi} \right)} \left(\frac{\rho_0}{\rho_0 + x} \right)^{\left(4 + 7 \frac{\rho_0}{\xi} + 3 \frac{x}{\xi} \right)} \right]$$

На фиг. 2 показана граница вязко-пластической и жесткой зон, построенная по уравнению (2.12) при $T_0 = 2$, $\tau_0 = 1$, $\rho_0 = 1$. На той же фиг. 2 даны линии равных напряжений по формуле (2.11). Пунктиром дана граница вязко-пластической и жесткой зон, подсчитанная в работе^[2].

Поступила 3 IV 1950

Институт механики
Академии Наук СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Бахшиян Ф. А. К вязко-пластическому течению при ударе цилиндра по пластинке. ПММ. 1948. Т. XII. Вып. 1.
2. Соколовский В. В. Одномерное нестационарное движение вязко-пластической среды. ПММ. 1949. Т. XIII. Вып. 6.
3. Швед М. Е. О приближенном решении некоторых задач гидродинамики пограничного слоя. ПММ. 1949. Т. XIII. Вып. 3.
4. Ильюшин А. А. К вопросу о вязко-пластическом течении металла. Труды конференции по пластическим деформациям. 1938.