Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XIV, 1950

ИЗГИБ ТОНКОЙ ИЗОТРОПНОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛИТЫ С ВПАЯННОЙ КРУГЛОЙ ИЗОТРОПНОЙ ШАЙБОЙ ИЗ ДРУГОГО МАТЕРИАЛА

М. М. Фридман (Саратов)

1. Тонкая изотропная прямоугольная плита с впаянной круглой изотропной шайбой радиуса a из другого материала изгибается постоянными изгибающими скручивающими моментами, распределенными вдоль ее сторон.

Срединную плоскость плиты примем за плоскость xy; начало координат поместим в центре плиты, оси x и y направим параллельно сторонам плиты, ось Z — вертикально вниз.

Предполагая радиус шайбы малым по сравнению с расстоянием от центра до краев плиты, будем решать задачу об изгибе прямоугольной плиты под действием постоянных моментов, распределенных вдоль ее сторон, приближенно, как задачу об изгибе бесконечной плиты моментами M_x^∞, M_y^∞, H_{xy}^∞ на бесконечности.

Пусть, как обычно, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, D — жесткость, w — прогиб, M_r и M_θ — изгибающие, $H_{r\theta}$ — скручивающий моменты, N_r и N_θ — перерезывающие силы в полярной системе координат r, θ для плиты; те же величины для шайбы будем отмечать кружочком наверху. Тогда [1, 3]

$$w = 2\,\mathrm{Re}\,[\bar{z}\varphi(z) + \chi(z)] \tag{1.1}$$

$$\begin{gathered} M_\theta - M_r + 2iH_{r\theta} = 4(1-\nu)\,De^{2i\theta}\,[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)] \\ M_r + M_\theta = -8(1+\nu)\,D\,\mathrm{Re}\,\Phi(z) \\ N_r - iN_\theta = -8\,De^{i\theta}\,\Phi'(z) \end{gathered} \tag{1.2}$$

Здесь $\varphi(z)$ и $\chi(z)$ — функции комплексного переменного $z = x + iy$, голоморфные при $|z| > a$; функции

$$\Phi(z) = \varphi'(z), \qquad \Psi(z) = \chi'(z)$$

голоморфны и однозначны при $|z| > a$, включая $z = \infty$.

Для w°, M_r°, M_θ°, $H_{r\theta}^\circ$, N_r° и N_θ° имеют место аналогичные формулы, где $\varphi^\circ(z)$, $\chi^\circ(z)$, $\Phi^\circ(z)$ и $\Psi^\circ(z)$ будут функциями, голоморфными и однозначными при $|z| < a$.

Так как шайба предполагается впаянной в плиту, то при $r = a$ должно быть

$$w^\circ = w, \qquad \frac{\partial w^\circ}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial r}, \qquad M_r^\circ = M_r, \qquad H_{r\theta}^\circ = H_{r\theta}, \qquad N_r^\circ = N_r \tag{1.3}$$

Между тем удовлетворить всем пяти условиям невозможно. Однако, заменив два последних условия, следуя принципу Сен-Венана, одним условием

$$N_r^\circ + \frac{1}{a}\frac{\partial H_{r\theta}^\circ}{\partial \theta} = N_r + \frac{1}{a}\frac{\partial H_{r\theta}}{\partial \theta} \tag{1.4}$$

мы получим четыре условия, удовлетворить которым возможно. Отвлекаясь от жестких перемещений, эти условия удобно записать в комплексной форме [4]

$$\begin{gathered} M_r^\circ - ia\int_0^\theta \left(N_r^\circ + \frac{1}{a}\frac{\partial H_{r\theta}^\circ}{\partial\theta}\right)d\theta = M_r - ia\int_0^\theta \left(N_r + \frac{1}{a}\frac{\partial H_{r\theta}}{\partial\theta}\right)d\theta \\ \frac{\partial}{\partial\theta}\left[e^{-i\theta}\left(\frac{\partial w^\circ}{\partial r} - \frac{i}{a}\frac{\partial w^\circ}{\partial\theta}\right)\right] = \frac{\partial}{\partial\theta}\left[e^{-i\theta}\left(\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{i}{a}\frac{\partial w}{\partial\theta}\right)\right] \end{gathered} \tag{1.5}$$

Итак, при $r = a$

$$D^\circ\{(1-\nu^\circ)\,\Phi^\circ(z) - (3+\nu^\circ)\,\overline{\Phi}^\circ(\overline{z}) - (1-\nu^\circ)\,e^{2i\theta}\,[\overline{z}\Phi^{\circ\prime}(z) + \Psi^\circ(z)]\} =$$
$$= D\{(1-\nu)\,\Phi(z) - (3+\nu)\,\overline{\Phi}(\overline{z}) - (1-\nu)\,e^{2i\theta}\,[\overline{z}\Phi'(z) + \Psi(z)]\} + iC_1 \qquad (1.6)$$
$$\Phi^\circ(z) + \overline{\Phi}^\circ(\overline{z}) - e^{2i\theta}\,[\overline{z}\Phi^{\circ\prime}(z) + \Psi^\circ(z)] =$$
$$= \Phi(z) + \overline{\Phi}(\overline{z}) - e^{2i\theta}\,[\overline{z}\Phi'(z) + \Psi(z)]$$

где C_1 — действительная постоянная. Далее имеем [3]

$$\Phi^\circ(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \qquad \Psi^\circ(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k' z^k \qquad (|z| < a)$$
$$\Phi(z) = B + \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^{-k}, \qquad \Psi(z) = B' + iC' + \sum_{k=1}^{\infty} b_k' z^{-k} \qquad (|z| > a) \qquad (1.7)$$

Здесь можно считать $a_0 - \overline{a}_0 = 0$; через величины B, B' и C' выражаются напряжения на бесконечности

$$M_x^\infty = -2D\,[2(1+\nu)\,B + (1-\nu)\,B']$$
$$M_y^\infty = -2D\,[2(1+\nu)\,B - (1-\nu)\,B'] \qquad (1.8)$$
$$H_{xy}^\infty = 2(1-\nu)\,DC'$$

Подставив ряды (1.7) в (1.6) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях $e^{i\theta}$ в правой и левой частях обоих равенств, получим бесконечную систему уравнений относительно a_k, a_k', b_k и b_k'; решая эту систему, найдем

$$a_0 = \frac{2DB}{D^\circ(1+\nu^\circ) + D(1-\nu)}, \qquad a_0' = \frac{4D(B' + iC')}{D^\circ(1-\nu^\circ) + D(3+\nu)}$$
$$b_2 = \frac{D^\circ(1-\nu^\circ) - D(1-\nu)}{D^\circ(1-\nu^\circ) + D(3+\nu)}\,a^2(B' - iC')$$
$$b_2' = \frac{D^\circ(1+\nu^\circ) - D(1+\nu)}{D^\circ(1+\nu^\circ) + D(1+\nu)}\,2a^2B$$
$$b_4' = \frac{D^\circ(1-\nu^\circ) - D(1-\nu)}{D^\circ(1-\nu^\circ) + D(3+\nu)}\,3a^4(B' - iC') \qquad (1.9)$$

Остальные коэффициенты a_k, a_k', b_k и b_k' равны нулю. Рассмотрим некоторые частные случаи.

2. Если прямоугольная плита с впаянной круглой шайбой радиуса a изгибается моментами M, равномерно распределенными по двум сторонам, параллельным оси y, а две другие стороны свободны от усилий, то

$$M_r^\circ = M\left[\frac{E^\circ}{E^\circ(1+\nu) + E(1-\nu^\circ)} + \frac{2E^\circ(1+\nu)\cos 2\theta}{E^\circ(1-\nu^2) + E(1+\nu^\circ)(3+\nu)}\right]$$
$$M_\theta^\circ = M\left[\frac{E^\circ}{E^\circ(1+\nu) + E(1-\nu^\circ)} - \frac{2E^\circ(1+\nu)\cos 2\theta}{E^\circ(1-\nu^2) + E(1+\nu^\circ)(3+\nu)}\right] \qquad (2.1)$$
$$H_{r\theta}^\circ = -M\,\frac{2E^\circ(1+\nu)\sin 2\theta}{E^\circ(1-\nu^2) + E(1+\nu^\circ)(3+\nu)}, \qquad N_r^\circ = 0, \qquad N_\theta^\circ = 0$$

$$M_r = \frac{M}{2}\left\{1 + \frac{E^\circ(1-\nu) - E(1-\nu^\circ)}{E^\circ(1+\nu) + E(1-\nu^\circ)}\frac{a^2}{r^2} + \right. \tag{2.2}$$

$$+\left[1 + 4\nu\frac{E^\circ(1+\nu) - E(1+\nu^\circ)}{E^\circ(1-\nu^2) + E(1+\nu^\circ)(3+\nu)}\frac{a^2}{r^2} + \right.$$

$$\left.\left. + 3(1-\nu)\frac{E^\circ(1+\nu) - E(1+\nu^\circ)}{E^\circ(1-\nu^2) + E(1+\nu^\circ)(3+\nu)}\frac{a^4}{r^4}\right]\cos 2\theta\right\}$$

$$M_\theta = \frac{M}{2}\left\{1 - \frac{E^\circ(1-\nu) - E(1-\nu^\circ)}{E^\circ(1+\nu) + E(1-\nu^\circ)}\frac{a^2}{r^2} + \right.$$

$$+\left[-1 + 4\frac{E^\circ(1+\nu) - E(1+\nu^\circ)}{E^\circ(1-\nu^2) + E(1+\nu^\circ)(3+\nu)}\frac{a^2}{r^2} - \right.$$

$$\left.\left. - 3(1-\nu)\frac{E^\circ(1+\nu) - E(1+\nu^\circ)}{E^\circ(1-\nu^2) + E(1+\nu^\circ)(3+\nu)}\frac{a^4}{r^4}\right]\cos 2\theta\right\}$$

$$H_{r\theta} = \frac{M}{2}\left[-1 - 2(1-\nu)\frac{E^\circ(1+\nu) - E(1+\nu^\circ)}{E^\circ(1-\nu^2) + E(1+\nu^\circ)(3+\nu)}\frac{a^2}{r^2} + \right.$$

$$\left. + 3(1-\nu)\frac{E^\circ(1+\nu) - E(1+\nu^\circ)}{E^\circ(1-\nu^2) + E(1+\nu^\circ)(3+\nu)}\frac{a^4}{r^4}\right]\sin 2\theta$$

$$N_r = -4M\frac{E^\circ(1+\nu) - E(1+\nu^\circ)}{E^\circ(1-\nu^2) + E(1+\nu^\circ)(3+\nu)}\frac{a^2}{r^3}\cos 2\theta$$

$$N_\theta = -4M\frac{E^\circ(1+\nu) - E(1+\nu^\circ)}{E^\circ(1-\nu^2) + E(1+\nu^\circ)(3+\nu)}\frac{a^2}{r^3}\sin 2\theta$$

Вдоль места спайки ($r = a$) момент M_r достигает максимального значения при $\theta = 0°$, $\theta = 180°$, момент M_θ достигает максимального значения в точках $\theta = 90°$, $\theta = 270°$, если $E^\circ\nu - E(1+\nu) > 0$, и в точках $\theta = 0°$, $\theta = 180°$, если $E^\circ\nu - E(1+\nu) < 0$. Момент $H_{r\theta}$ достигает наибольшей по абсолютному значению величины в точках $\theta = 45°$, $\theta = 135°$, $\theta = 225°$, $\theta = 315°$:

$$(M_r)_{\max} = M\left[\frac{E^\circ}{E^\circ(1+\nu) + E(1-\nu^\circ)} + \frac{2E^\circ(1+\nu)}{E^\circ(1-\nu^2) + E(1+\nu^\circ)(3+\nu)}\right]$$

$$(M_\theta)_{\max} = M\left[\frac{E^\circ\nu + E(1-\nu^\circ)}{E^\circ(1+\nu) + E(1-\nu^\circ)} \pm 2\frac{E^\circ\nu(1+\nu) - E(1+\nu^\circ)(1+\nu)}{E^\circ(1-\nu^2) + E(1+\nu^\circ)(3+\nu)}\right] \tag{2.3}$$

$$(H_{r\theta})_{\max} = \frac{2ME(1+\nu^\circ)}{E^\circ(1-\nu^2) + E(1+\nu^\circ)(3+\nu)}$$

Здесь знак плюс соответствует случаю, когда $E^\circ\nu - E(1+\nu^\circ) > 0$, знак минус случаю $E^\circ\nu - E(1+\nu^\circ) < 0$.

Формулы (2.2) для случая $E^\circ \to 0$ (плита с круговым отверстием радиуса a) и для случая $E^\circ \to \infty$ (плита с абсолютно жесткой шайбой радиуса a) были впервые получены С. Г. Лехницким [2].

3. В том случае, когда прямоугольная плита с впаянной круглой шайбой радиуса a изгибается моментами M, равномерно распределенными по всем сторонам:

$$M_r^\circ = M_\theta^\circ = \frac{2ME^\circ}{E^\circ(1+\nu) + E(1-\nu^\circ)} \tag{3.1}$$

$$M_r = M\left[1 + \frac{E^\circ(1-\nu) - E(1-\nu^\circ)}{E^\circ(1+\nu) + E(1-\nu^\circ)}\frac{a^2}{r^2}\right],\ M_\theta = M\left[1 - \frac{E^\circ(1-\nu) - E(1-\nu^\circ)}{E^\circ(1+\nu) + E(1-\nu^\circ)}\frac{a^2}{r^2}\right] \tag{3.2}$$

Скручивающие моменты и перерезывающие силы равны нулю.

Отметим, что в рассматриваемом случае всестороннего изгиба мы имеем точное удовлетворение всех пяти условий (1.3)

4. Если прямоугольная плита с впаянной круглой шайбой радиуса a скручивается моментами H, равномерно распределенными по всем четырем сторонам, то

$$
\begin{aligned}
&M_r{}^\circ = \frac{4\,HE^\circ(1+\nu)\sin 2\theta}{E^\circ(1-\nu^2)+E(1+\nu^\circ)(3+\nu)}, \qquad M_\theta{}^\circ = -M_r{}^\circ \\
&H_{r\theta}{}^\circ = \frac{4\,HE^\circ(1+\nu)\cos 2\theta}{E^\circ(1-\nu^2)+E(1+\nu^\circ)(3+\nu)}, \qquad N_r{}^\circ = 0, \qquad N_\theta{}^\circ = 0
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

$$
\begin{aligned}
M_r = H\Bigg[1 &+ 4\nu\frac{E^\circ(1+\nu)-E(1+\nu^\circ)}{E^\circ(1-\nu^2)+E(1+\nu^\circ)(3+\nu)}\frac{a^2}{r^2} + \\
&+ 3(1-\nu)\frac{E^\circ(1+\nu)-E(1+\nu^\circ)}{E^\circ(1-\nu^2)+E(1+\nu^\circ)(3+\nu)}\frac{a^4}{r^4}\Bigg]\sin 2\theta
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

$$
\begin{aligned}
M_\theta = H\Bigg[-1 &+ 4\frac{E^\circ(1+\nu)-E(1+\nu^\circ)}{E^\circ(1-\nu^2)+E(1+\nu^\circ)(3+\nu)}\frac{a^2}{r^2} - \\
&- 3(1-\nu)\frac{E^\circ(1+\nu)-E(1+\nu^\circ)}{E^\circ(1-\nu^2)+E(1+\nu^\circ)(3+\nu)}\frac{a^4}{r^4}\Bigg]\sin 2\theta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H_{r\theta} = H\Bigg[1 &+ 2(1-\nu)\frac{E^\circ(1+\nu)-E(1+\nu^\circ)}{E^\circ(1-\nu^2)+E(1+\nu^\circ)(3+\nu)}\frac{a^2}{r^2} - \\
&- 3(1-\nu)\frac{E^\circ(1+\nu)-E(1+\nu^\circ)}{E^\circ(1-\nu^2)+E(1+\nu^\circ)(3+\nu)}\frac{a^4}{r^4}\Bigg]\cos 2\theta
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

$$
\begin{aligned}
N_r &= -8H\frac{E^\circ(1+\nu)-E(1+\nu^\circ)}{E^\circ(1-\nu^2)+E(1+\nu^\circ)(3+\nu)}\frac{a^2}{r^3}\sin 2\theta \\
N_\theta &= 8H\frac{E^\circ(1+\nu)-E(1+\nu^\circ)}{E^\circ(1-\nu^2)+E(1+\nu^\circ)(3+\nu)}\frac{a^2}{r^3}\cos 2\theta
\end{aligned}
$$

Вдоль места спайки ($r = a$) моменты M_r и M_θ достигают наибольшей по абсолютному значению величины в точках $\theta = 45°$, $\theta = 135°$, $\theta = 225°$, $\theta = 315°$; момент $H_{r\theta}$ достигает максимальной по абсолютному значению величины при $\theta = 0°$, $\theta = 90°$, $\theta = 180°$, $\theta = 270°$; при этом имеем

(4.3)

$$
\begin{aligned}
(M_r)_{\max} &= 4H\frac{E^\circ(1+\nu)}{E^\circ(1-\nu^2)+E(1+\nu^\circ)(3+\nu)} \\
(M_\theta)_{\max} &= -4H\frac{E^\circ\nu(1+\nu)-E(1+\nu^\circ)(1+\nu)}{E^\circ(1-\nu^2)+E(1+\nu^\circ)(3+\nu)} \\
(H_{r\theta})_{\max} &= 4H\frac{E(1+\nu^\circ)}{E^\circ(1-\nu^2)+E(1+\nu^\circ)(3+\nu)}
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

Поступила 20 III 1950

Саратовский государственный
университет

ЛИТЕРАТУРА

1. Лехницкий С. Г. О некоторых вопросах, связанных с теорией изгиба тонких плит. ПММ. 1938. Т. II Вып. 2.
2. Лехницкий С. Г. О некоторых случаях изгиба изотропной пластинки, ослабленной круговым отверстием. Вестник инженеров и техников. 1936. № 12.
3. Фридман М. М. О некоторых задачах теории изгиба тонких изотропных плит. ПММ. 1941. Т. V. Вып. 1.
4. Фридман М. М. Изгиб тонкой изотропной плиты с криволинейным отверстием. ПММ. 1945. Т. IX. Вып. 4.