Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XIV, 1950

ОБ ОЦЕНКЕ ОБОБЩЕННОГО ИНТЕГРАЛА ДИРИХЛЕ В ПЛОСКОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И В ТРЕХМЕРНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ

Д. Б. Тополянский

(Днепропетровск)

В заметке автора[1] была дана двусторонняя оценка интеграла Дирихле при применении двух определенным образом выбранных вариационных методов приближенного решения задачи Дирихле. Этот результат был затем распространен автором[2] на случай более общего дифференциального уравнения эллиптического типа.

В этой работе дается двусторонняя оценка обобщенного интеграла Дирихле в плоской задаче теории упругости и в трехмерной краевой задаче.

1. С аналитической точки зрения основную плоскую задачу теории упругости можно формулировать как задачу о нахождении таких функций $\varphi_1(x, y)$ и $\varphi_2(x, y)$, которые внутри данной области G непрерывны вместе с их производными первого и второго порядка и удовлетворяют системе уравнений:

$$a \triangle \varphi_1 + b\left(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x\,\partial y}\right) = 0, \qquad a \triangle \varphi_2 + b\left(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2\varphi_2}{\partial y^2}\right) = 0 \tag{1.1}$$

а на контуре Γ данной области принимают соответственно значения φ_1° и φ_2° (символ $\triangle$ — оператор Лапласа, a и b — известные положительные постоянные теории упругости). Систему двух функций $\varphi_1(x, y)$ и $\varphi_2(x, y)$ будем обозначать через $\varphi = \{\varphi_1, \varphi_2\}$, а систему уравнений (1.1) через $L[\varphi] = 0$.

В рассматриваемой задаче φ — вектор деформации, $L[\varphi]$ — вектор-функция, выражающая плотность силового поля, возникающего в результате деформации. Обобщенный интеграл Дирихле, выражающий в плоской задаче удвоенную потенциальную энергию деформации, имеет вид[3]

$$E[\varphi] = \iint\limits_G \left\{a\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right)^2 + a\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right)^2 + b\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right)^2\right\} dx\,dy \tag{1.2}$$

Две другие интегральные формы Гильберта-Куранта в этом случае имеют вид

$$H[\varphi] = \iint\limits_G (\varphi_1^2 + \varphi_2^2)\,dx\,dy \tag{1.3}$$

$$D[\varphi] = \iint\limits_G \left[\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy \tag{1.4}$$

Введение Гильбертом и Курантом линейных функциональных пространств с квадратичной метрикой путем рассмотрения интегральных форм H, D и E и применения этих интегралов для определения классов функций h и d и подпространств d° и f приводит в результате уточнения формулировки граничных условий к такой теореме[3] о существовании решения плоской задачи и о минимуме интеграла E:

для любой заданной вектор-функции φ° из d существует вектор деформации φ из d, имеющий кусочно-непрерывные производные второго порядка, удовлетворяющий системе уравнений $L[\varphi] = 0$ и такой, что вектор-функция

$\varphi - \varphi^\circ$ содержится в пространстве d°. При этом для всякой вектор-функции $\varphi^* \neq \varphi$ из d, для которой $\varphi^* - \varphi^\circ$ содержится в d°, имеет место условие

$$E[\varphi] < E[\varphi^*] \tag{1.5}$$

Это исследование имеет целью дать двустороннюю оценку интеграла E.

Введем *определение*: система вектор-функций ψ пространства f, удовлетворяющих системе уравнений $L[\varphi] = 0$ и на контуре Γ области G условию

$$\int\limits_{\Gamma} \left(\sigma_1 \frac{\partial x}{\partial n} + \sigma_2 \frac{\partial y}{\partial n} \right) ds = 0 \tag{1.6}$$

где n — внешняя нормаль,

$$\sigma_1 = (\psi_1 - \psi_1^\circ) \left[a \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x} - \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \right) + b \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \right) \right] + a (\psi_2 - \psi_2^\circ) \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \right)$$

$$\sigma_2 = a (\psi_1 - \psi_1^\circ) \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \right) + (\psi_2 - \psi_2^\circ) \left[- a \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x} - \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \right) + b \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \right) \right]$$

а ψ° — любая заданная вектор-функция из d, образует класс Φ^{**}.

С функциями, принадлежащими этому классу, встретимся, например, расширяя применение метода Треффтца для приближенного решения этой же задачи.

Если φ^* — приближенное решение плоской задачи по методу Ритца, удовлетворяющее контурному условию, но не удовлетворяющее системе (1.1), а φ — точное решение задачи, то, введя обозначение для погрешности $\omega^* = \varphi^* - \varphi$, можно показать, что при приближенном решении плоской задачи по методу Ритца одновременно с минимизацией интегрального выражения $E[\varphi^*]$ минимизируется также интегральное выражение $E[\omega^*]$.

Преобразуем интегральное выражение $E[\varphi^*]$:

$$E[\varphi^*] = E[\varphi + \omega^*] = E[\varphi] + 2E[\varphi, \omega^*] + E[\omega^*] \tag{1.7}$$

Так как на контуре $\omega^* = 0$, то в этом случае обобщенная формула Грина будет

$$E[\varphi, \omega^*] = -H[L[\varphi], \omega^*] \tag{1.8}$$

Исходя из того, что $L[\varphi] \equiv 0$, получим $E[\varphi, \omega^*] = 0$. Тогда из (1.7) следует

$$E[\varphi^*] = E[\varphi] + E[\omega^*] \tag{1.9}$$

т. е. два неотрицательных интегральных выражения $E[\varphi^*]$ и $E[\omega^*]$ разнятся лишь на постоянную неотрицательную величину $E[\varphi]$, что и приводит к вышеизложенному утверждению. Исходя из этого, приближенное решение данной задачи другим методом будем искать в виде системы линейных комбинаций функций:

$$\varphi^{**} = \{\varphi_1^{**}, \varphi_2^{**}\}, \qquad \varphi_1^{**} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k s_k^{(1)}(x, y), \qquad \varphi_2^{**} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k s_k^{(2)}(x, y)$$

удовлетворяющих системе (1.1), определив коэффициенты a_k $(k = 1, \ldots, n)$ из условия минимизации интегрального выражения $E[\omega^{**}]$, т. е.

$$\frac{\partial E[\omega^{**}]}{\partial \alpha_k} = 0 \quad (k = 1, \ldots, n) \quad (\omega^{**} = \varphi^{**} - \varphi) \tag{1.10}$$

Система уравнений (1.10) перепишется так:

$$E[s_k, \omega^{**}] \equiv \iint\limits_{G} \left\{ a \left(\frac{\partial \omega_1^{**}}{\partial x} - \frac{\partial \omega_2^{**}}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial s_k^{(1)}}{\partial x} - \frac{\partial s_k^{(2)}}{\partial y} \right) + a \left(\frac{\partial \omega_1^{**}}{\partial y} + \frac{\partial \omega_2^{**}}{\partial x} \right) \times \right.$$

$$\left. \times \left(\frac{\partial s_k^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial s_k^{(2)}}{\partial x} \right) + b \left(\frac{\partial \omega_1^{**}}{\partial x} + \frac{\partial \omega_2^{**}}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial s_k^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial s_k^{(2)}}{\partial y} \right) \right\} dx\, dy = 0 \tag{1.11}$$

Воспользуемся обобщенной формулой Грина, которую запишем так:

$$E[s_k, \omega^{**}] = -H[L[s_k], \omega^{**}] + \int_\Gamma \left(\sigma_1' \frac{\partial x}{\partial n} + \sigma_2' \frac{\partial y}{\partial n}\right) ds \tag{1.12}$$

где n — внешняя нормаль,

$$H[L[s_k], \omega^{**}] = \iint_G \left\{ \left[a\triangle s_k^{(1)} + b\left(\frac{\partial^2 s_k^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s_k^{(2)}}{\partial x\,\partial y}\right)\right] \omega_1^{**} + \right.$$

$$\left. + \left[a\triangle s_k^{(2)} + b\left(\frac{\partial^2 s_k^{(1)}}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 s_k^{(2)}}{\partial y^2}\right)\right] \omega_2^{**} \right\} dy\, dy$$

$$\sigma_1' = \omega_1^{**} \left[a\left(\frac{\partial s_k^{(1)}}{\partial x} - \frac{\partial s_k^{(2)}}{\partial y}\right) + b\left(\frac{\partial s_k^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial s_k^{(2)}}{\partial y}\right)\right] + \omega^{**} a \left(\frac{\partial s_k^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial s_k^{(2)}}{\partial x}\right)$$

$$\sigma_2' = \omega_1^{**} a \left(\frac{\partial s_k^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial s_k^{(2)}}{\partial x}\right) + \omega_2^{**} \left[-a\left(\frac{\partial s_k^{(1)}}{\partial x} - \frac{\partial s_k^{(2)}}{\partial y}\right) + b\left(\frac{\partial s_k^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial s_k^{(2)}}{\partial y}\right)\right]$$

Исходя из того, что $L[s_k] \equiv 0$, имеем

$$E[s_k, \omega^{**}] = \int_\Gamma \left(\sigma_1' \frac{\partial x}{\partial n} + \sigma_2' \frac{\partial y}{\partial n}\right) ds \tag{1.13}$$

Тогда система уравнений (1.11) для определения α_k будет иметь вид

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \int_\Gamma \left[\left\{ s_j^{(1)} \left[a\left(\frac{\partial s_k^{(1)}}{\partial x} - \frac{\partial s_k^{(2)}}{\partial y}\right) + b\left(\frac{\partial s_k^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial s_k^{(2)}}{\partial y}\right)\right] + \right.\right.$$

$$+ s_j^{(2)} a \left(\frac{\partial s_k^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial s_k^{(2)}}{\partial x}\right) \right\} \frac{\partial x}{\partial n} + \left\{ s_j^{(1)} a \left(\frac{\partial s_k^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial s_k^{(2)}}{\partial x}\right) + \right.$$

$$\left.\left. + s_j^{(2)} \left[-a\left(\frac{\partial s_k^{(1)}}{\partial x} - \frac{\partial s_k^{(2)}}{\partial y}\right) + b\left(\frac{\partial s_k^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial s_k^{(2)}}{\partial y}\right)\right]\right\} \frac{\partial y}{\partial n}\right] ds =$$

$$= \int_\Gamma \left[\left\{ \varphi_1^\circ \left[a\left(\frac{\partial s_k^{(1)}}{\partial x} - \frac{\partial s_k^{(2)}}{\partial y}\right) + b\left(\frac{\partial s_k^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial s_k^{(2)}}{\partial y}\right)\right] + \right.\right.$$

$$+ \varphi_2^\circ a \left(\frac{\partial s_k^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial s_k^{(2)}}{\partial x}\right) \right\} \frac{\partial x}{\partial n} + \left\{ \varphi_1^\circ a \left(\frac{\partial s_k^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial s_k^{(2)}}{\partial x}\right) + \right.$$

$$\left.\left. + \varphi_2^\circ \left[-a\left(\frac{\partial s_k^{(1)}}{\partial x} - \frac{\partial s_k^{(2)}}{\partial y}\right) + b\left(\frac{\partial s_k^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial s_k^{(2)}}{\partial y}\right)\right]\right\} \frac{\partial y}{\partial n}\right] ds$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n)$$

Докажем теперь *лемму*: если φ° заданная вектор-функция из d, а φ вектор деформации из d, имеющий кусочно-непрерывные производные второго порядка, удовлетворяющий системе $L[\varphi] = 0$ и такой, что вектор-функция $\varphi - \varphi^\circ$ содержится в d°, то для всякой вектор-функции $\varphi^{**} \neq \varphi$ из класса Φ^{**} имеет место неравенство

$$E[\varphi^{**}] < E[\varphi] \tag{1.14}$$

Преобразуем выражение для $E[\varphi]$:

$$E[\varphi] = E[\varphi^{**} - \omega^{**}] = E[\varphi^{**}] - 2E[\varphi^{**}, \omega^{**}] + E[\omega^{**}] \tag{1.15}$$

и воспользуемся обобщенной формулой Грина (1.12), а именно:

$$E[\varphi^{**}, \omega^{**}] = -H[L[\varphi^{**}], \omega^{**}] + \int_\Gamma \left(\sigma_1'' \frac{\partial x}{\partial n} + \sigma_2'' \frac{\partial y}{\partial n}\right) ds$$

где обозначения σ_1'' и σ_2'' очевидны.

В силу того, что φ^{**} принадлежит классу Φ^{**}, получим $E[\varphi^{**}, \omega^{**}] = 0$. Следовательно, имеем

$$E[\varphi] = E[\varphi^{**}] + E[\omega^{**}] \tag{1.16}$$

Отсюда приходим к неравенству (1.14). Наконец, объединив результаты (1.5) и (1.14), получим

$$E[\varphi^{**}] < E[\varphi] < E[\varphi^{*}] \tag{1.17}$$

2. Рассмотрим трехмерную краевую задачу: найти функцию $u(x, y, z)$, удовлетворяющую внутри некоторой ограниченной пространственной области G дифференциальному уравнению эллиптического типа

$$M(u) \equiv (pu_x)_x + (pu_y)_y + (pu_z)_z - q^* u = 0 \tag{2.1}$$

где

$$q^* = q - a_x - b_y - c_z$$

и принимающую на границе S этой области заданные значения

$$u / S = u_0 \tag{2.2}$$

Предполагается, что:

1) величины p, q, a, b, c, u_0 — непрерывные функции в области $G + S$;

2) величина q имеет непрерывные производные первого порядка, a, b, c — непрерывные производные до второго порядка, а величина p имеет производные до третьего порядка включительно в области G;

3) и, кроме того, $p > 0$ и $q \geqslant 0$ в области $G + S$.

Известно, что в общем случае (для любой области) эта задача в строгом смысле является неразрешимой (пример Лебега), т. е. можно указать области, внутри которых не существует функции, удовлетворяющей уравнению (2.1) и принимающей на границе заданные непрерывные краевые значения, в смысле действительного достижения этих значений в каждой отдельной точке границы. Следует, однако, отметить, что основная задача Дирихле становится разрешимой в несколько иной постановке, исходящей из исследований Винера.

В дальнейшем предполагается, что решение сформулированной задачи существует. В этом случае в классе функций U^*, непрерывных вместе с их первыми и вторыми производными в области $G + S$ и удовлетворяющих граничному условию (2.2), решением уравнения (2.1) является та, которая минимизирует обобщенный интеграл Дирихле

$$K[u] = \boldsymbol{D[u]} + \iiint\limits_G (2auu_x + 2buu_y + 2cuu_z + qu^2)\, dx\, dy\, dz \tag{2.3}$$

где

$$D[u] = \iiint\limits_G p\,({u_x}^2 + {u_y}^2 + {u_z}^2)\, dx\, dy\, dz \tag{2.4}$$

В отношении всего подинтегрального выражения для $K[u]$ вводится так называемое *условие определенности*: предполагается, что для заданной области G существует такая положительная постоянная μ, что для любой точки области $G + S$ и при любых значениях параметров ξ, η, ζ, χ имеет место неравенство

$$p(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) + 2a\xi\chi + 2b\eta\chi + 2c\zeta\chi + q\chi^2 \geqslant \mu(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) \tag{2.5}$$

Таким образом, если u^* — функция, удовлетворяющая граничному условию (2.2), но не удовлетворяющая дифференциальному уравнению (2.1), а u — точное решение данной краевой задачи, то

$$K[u] < K[u^*] \tag{2.6}$$

Представляет известный интерес указать двустороннюю оценку обобщенного интеграла Дирихле.

Докажем *лемму*: среди функций класса U^{**}, удовлетворяющих внутри области G уравнению (2.1), а на границе S этой области условию

$$\iint\limits_S (U^{**} - u_0)\left\{p\frac{\partial U^{**}}{\partial \nu} + U^{**}\left(a\frac{\partial x}{\partial \nu} + b\frac{\partial y}{\partial \nu} + c\frac{\partial z}{\partial \nu}\right)\right\} dS = 0 \tag{2.7}$$

где u_0 — некоторая данная совокупность значений, а ν — внешняя нормаль, получает значения u_0 на поверхности S та, которая дает обобщенному интегралу Дирихле K, распространенному на область G, наибольшее значение.

Пусть u^{**} функция, принадлежащая классу U^{**}, но не получающая значений u_0 на поверхности, а u точное решение данной краевой задачи.

Обозначим $u^{**} - u = \delta$ и составим обобщенный интеграл Дирихле для u:

$$K[u] = K[u^{**} - \delta] = K[u^{**}] - 2K[u^{**}, \delta] + K[\delta] \tag{2.8}$$

где

$$K[u^{**}, \delta] = D[u^{**}, \delta] + \iiint\limits_G \{a(u^{**}\delta_x + \delta u_x^{**}) +$$

$$+ b(u^{**}\delta_y + \delta u_y^{**}) + c(u^{**}\delta_z + \delta u_z^{**}) + qu^{**}\delta\}\, dx\, dy\, dz \tag{2.9}$$

$$D[u^{**}, \delta] = \iiint\limits_G \left(\frac{\partial u^{**}}{\partial x}\frac{\partial \delta}{\partial x} + \frac{\partial u^{**}}{\partial y}\frac{\partial \delta}{\partial y} + \frac{\partial u^{**}}{\partial z}\frac{\partial \delta}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz$$

Воспользуемся обобщенной формулой Остроградского; тогда

$$K[u^{**}, \delta] = -H[M[u^{**}], \delta] + \iint\limits_S \delta\left\{p\frac{\partial u^{**}}{\partial \nu} +\right.$$

$$\left. + u^{**}\left(a\frac{\partial x}{\partial \nu} + b\frac{\partial y}{\partial \nu} + c\frac{\partial z}{\partial \nu}\right)\right\} dS \tag{2.10}$$

где

$$H[M[u^{**}], \delta] = \iiint\limits_G M[u^{**}]\,\delta\, dx\, dy\, dz$$

Первый интеграл правой части формулы (2.10) равен нулю, так как u^{**} удовлетворяет дифференциальному уравнению (2.1), второй интеграл равен нулю вследствие условия (2.7). Отсюда

$$K[u] = K[u^{**}] + K[\delta] \tag{2.11}$$

и так как $K[\delta] > 0$, то

$$K[u^{**}] < K[u] \tag{2.12}$$

Объединив результаты (2.6) и (2.12), получим

$$K[u^{**}] < K[u] < K[u^*] \tag{2.13}$$

В частном случае при $p = 1$ и $a = b = c = q = 0$ получается двусторонняя оценка для интеграла Дирихле в трехмерной задаче

$$D[u^{**}] < D[u] < D[u^*] \tag{2.14}$$

Рассмотрим пример получения приближенного решения данной краевой задачи в виде u^{**}.

Метод Треффтца, предложенный им для решения частной задачи Дирихле на плоскости, а именно, для уравнения Лапласа, в известной мере исходит из того, что вместе с минимизацией интеграла Дирихле по Ритцу минимизируется также интеграл Дирихле для погрешности. Покажем, что в случае данной трехмерной краевой задачи одновременно с минимизацией обобщенного интеграла Дирихле по Ритцу минимизируется также обобщенный интеграл Дирихле для погрешности.

Пусть, следуя методу Ритца или родственным ему другим вариационным методам, найдено приближенное решение данной краевой задачи в виде

$$u^* = u_1(x, y, z) + \sum_{k=1}^{n} c_k^* \, t_k^*(x, y, z) \tag{2.15}$$

где u_1 удовлетворяет условию (2.2), t_k^* $(k = 1, 2, \ldots, n)$ — совокупность функций, анулирующихся на поверхности S, а коэффициенты c_k^* получены из условия минимизации интеграла $K[u^*]$.

Обозначим через $\delta_1 = u^* - u$ погрешность приближенного решения. Тогда

$$K[u^*] = K[u + \delta_1] = K[u] + 2K[u, \delta_1] + K[\delta_1] \tag{2.16}$$

Исходя из того, что $M[u] \equiv 0$ и что $\delta_1 = 0$ на поверхности S, пользуясь обобщенной формулой Остроградского, получим

$$K[u, \delta_1] = -H[M[u], \delta_1] + \iint_S \delta_1 \left\{ p \frac{\partial u}{\partial \nu} + u \left(a \frac{\partial x}{\partial \nu} + b \frac{\partial y}{\partial \nu} + c \frac{\partial z}{\partial \nu} \right) \right\} dS = 0$$

и, следовательно,

$$K[u^*] = K[u] + K[\delta_1] \tag{2.17}$$

т. е. два неотрицательных интегральных выражения $K[u^*]$ и $K[\delta]$ разнятся на постоянную неотрицательную величину $K[u]$, откуда следует наше утверждение. Это и приводит к идее другого вариационного метода: будем искать приближенное решение данной краевой задачи в виде линейной комбинации функций

$$u^{**} = \sum_{k=1}^{n} c_k^{**} \, t_k^{**}(x, y, z) \tag{2.18}$$

удовлетворяющих уравнению (2.1), определив коэффициенты из условия минимизации интеграла $K[\delta]$, где $\delta = u^{**} - u$, т. е. из условия

$$\frac{\partial K[\delta]}{\partial c_k^{**}} = 0 \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{2.19}$$

Тогда, воспользовавшись формулой Остроградского, получим для нахождения коэффициентов c_k^{**} систему уравнений:

$$\iint_S (u^{**} - u_0) \left\{ p \frac{\partial t_k^{**}}{\partial \nu} + t_k^{**} \left(a \frac{\partial x}{\partial \nu} + b \frac{\partial y}{\partial \nu} + c \frac{\partial z}{\partial \nu} \right) \right\} dS = 0 \quad (k = 1, \ldots, n) \tag{2.20}$$

или

$$\sum_{j=1}^{n} c_j^{**} \iint_S t_j^{**} \left\{ p \frac{\partial t_k^{**}}{\partial \nu} + t_k^{**} \left(a \frac{\partial x}{\partial \nu} + b \frac{\partial y}{\partial \nu} + c \frac{\partial z}{\partial \nu} \right) \right\} dS =$$

$$= \iint_S u_0 \left\{ p \frac{\partial t_k^{**}}{\partial \nu} + t_k^{**} \left(a \frac{\partial x}{\partial \nu} + b \frac{\partial y}{\partial \nu} + c \frac{\partial z}{\partial \nu} \right) \right\} dS \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{2.21}$$

и, таким образом, приходим к осуществлению условия (2.7) для u^{**} (2.18), а следовательно, и к неравенству (2.12).

Поступила 17 I 1949

ЛИТЕРАТУРА

1. Тополянский Д. Б. Об оценке интеграла Дирихле. ПММ. 1947. Т. XI. Вып. 5.
2. Тополянский Д. Б. О применении вариационных методов при приближенном решении краевых задач для дифференциальных уравнений эллиптического типа. ПММ. 1949. Т. XIII. Вып. 3
3. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. 1945. Т. II.