Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XIV, 1950

ФУНКЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ В ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

В. И. Блох

(Харьков)

В настоящей статье приводятся результаты общего исследования вопроса о функциях напряжений в теории упругости, вводимых в качестве общего решения дифференциальных уравнений равновесия в напряжениях. Известно несколько форм таких решений, среди которых отметим предложения Максвелла [1], Морера [2] и [4] и Бельтрами [3]. Касаясь решения Максвелла, О. Тедоне в своей обзорной статье [5] отмечает недостаточную изученность этого вопроса. На это же указывает также и Е. Треффтц [6].

Как следует из приводимых ниже соображений, можно получить неограниченное количество различных форм таких решений, среди которых можно отметить определенное число простейших форм с тремя функциями напряжений. Предложений Б. Г. Галеркина, П. Ф. Папковича и других, исходными для которых служат дифференциальные уравнения равновесия не в напряжениях, а в перемещениях, мы здесь не касаемся. Некоторые частные вопросы общей рассматриваемой далее задачи о функциях напряжений обсуждались ранее нами в статьях [7–9]. Вывод основных уравнений теории упругости в тензорной форме можно найти, например, в нашей статье [10].

§ 1. Общее решение дифференциальных уравнений равновесия. Пусть ρ обозначает плотность тела, $\mathbf{V}$ — вектор массовых сил и пусть объемные силы имеют потенциал, т. е. принимаем, что они могут быть представлены в виде градиента некоторой скалярной функции F

$$\rho\mathbf{V} = \nabla F \tag{1.1}$$

где ∇ — оператор Гамильтона. Будем считать, что все вводимые в рассмотрение функции дифференцируемы необходимое число раз.

Если σ — тензор напряжений и I — единичный тензор, то общее решение дифференциального уравнения равновесия в напряжениях, как это отмечено в нашей статье [9], получает следующий вид:

$$\sigma + FI = -\nabla\times\varphi\times\nabla \tag{1.2}$$

где φ — произвольный симметрический тензор второй валентности, а $\times$ — знак векторного умножения.

В прямолинейной системе ортогональных координат выражение (1.2) дает следующие равенства, по три каждого типа:

$$\begin{aligned} \sigma_{ii} + F &= \frac{\partial^2\varphi_{kk}}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2\varphi_{jj}}{\partial x_k^2} - 2\frac{\partial^2\varphi_{jk}}{\partial x_j\partial x_k} \\ \sigma_{jk} &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(-\frac{\partial\varphi_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial\varphi_{ki}}{\partial x_j} + \frac{\partial\varphi_{ij}}{\partial x_k}\right) - \frac{\partial^2\varphi_{ii}}{\partial x_j\partial x_k} \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} i,\ j,\ k = 1, 2, 3 \\ i\neq j\neq k \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

Правые части этих выражений совпадают по форме с решением Бельтрами [3], отличаясь от него лишь уменьшенными вдвое значениями членов, содержащих φ_{mn} при $m\neq n$.

Очевидно, не нарушая равенства (1.2), к тензору φ можно прибавить любой другой симметрический тензор φ°, являющийся общим решением однородного уравнения $\nabla \times \varphi^\circ \times \nabla = 0$. Таковым решением является выражение

$$\varphi^\circ = \nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla \tag{1.4}$$

представляющее собой сумму правого и левого градиентов произвольной вектор-функции $\mathbf{v}$.

Так как компоненты тензора φ° определяются заданием трех произвольных скалярных функций, являющихся координатными компонентами вектора $\mathbf{v}$, то их можно выбрать таким образом, чтобы некоторые три компоненты из шести тензора φ в результате присоединения к нему тензора φ° приняли определенную, заранее заданную форму. При этом соответствующим образом изменятся три остальные компоненты тензора φ. Количество различных форм тензора φ, решающих указанные уравнения равновесия, таким образом становится неограниченным.

Исследование показывает, что не любые три компоненты тензора φ можно задавать таким образом по своему усмотрению, а лишь такие, на вид которых можно влиять тремя компонентами вектор-функции $\mathbf{v}$. Так, например, детальным рассмотрением можно установить, что при использовании прямолинейной системы координат компоненты φ_{11}, φ_{12} и φ_{22} тензора φ по произволу, вообще говоря, заданы быть не могут, так как соответствующие компоненты тензора φ°, которыми на них можно оказать влияние, зависят только от двух функций, v_1 и v_2 — координатных компонент вектора $\mathbf{v}$.

Назовем простейшими или основными формами общего решения такие, у которых три компоненты из шести в первообразном тензоре φ аннулированы. Тогда, как следует из соответствующего рассмотрения, можно составить в декартовых координатах пять таких основных форм решения, причем в число их входят, как оказывается, также формы Максвелла и Морера.

Приводим ниже выражения для компонент тензора напряжений, получающиеся в этих случаях.

1. Форма решения Максвелла:

$$\sigma_{11} + F = \frac{\partial^2 \varphi_{33}}{\partial {x_2}^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{22}}{\partial {x_3}^2}, \qquad \sigma_{23} = -\frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial x_2 \partial x_3}$$

$$\sigma_{22} + F = \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial {x_3}^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{33}}{\partial {x_1}^2}, \qquad \sigma_{31} = -\frac{\partial^2 \varphi_{22}}{\partial x_3 \partial x_1}$$

$$\sigma_{33} + F = \frac{\partial^2 \varphi_{22}}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial {x_2}^2}, \qquad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \varphi_{33}}{\partial x_1 \partial x_2}$$

2. Форма решения Морера:

$$\sigma_{11} + F = -2\frac{\partial^2 \varphi_{23}}{\partial x_2 \partial x_3}, \qquad \sigma_{23} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(-\frac{\partial \varphi_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varphi_{12}}{\partial x_3}\right)$$

$$\sigma_{22} + F = -2\frac{\partial^2 \varphi_{31}}{\partial y_3 \partial x_1}, \qquad \sigma_{31} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(-\frac{\partial \varphi_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varphi_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial \varphi_{23}}{\partial x_1}\right)$$

$$\sigma_{33} + F = -2\frac{\partial^2 \varphi_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}, \qquad \sigma_{12} = \frac{\partial}{\partial x_3}\left(-\frac{\partial \varphi_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial \varphi_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_{31}}{\partial x_2}\right)$$

3. Третья форма:

$$\sigma_{11} + F = \frac{\partial^2 \varphi_{22}}{\partial {x_3}^2}, \qquad \sigma_{23} = \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial \varphi_{12}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial x_2}\right)$$

$$\sigma_{22} + F = \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial {x_3}^2}, \qquad \sigma_{31} = \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial \varphi_{12}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varphi_{22}}{\partial x_1}\right)$$

$$\sigma_{33} + F = \frac{\partial^2 \varphi_{22}}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial {x_2}^2} - 2\frac{\partial^2 \varphi_{12}}{\partial x_3 \partial x_2}, \qquad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \varphi_{12}}{\partial {x_3}^2}$$

4. Четвертая форма:

$$\sigma_{11} + F = -2\frac{\partial^2\varphi_{23}}{\partial x_2 \partial x_3}, \qquad \sigma_{23} = \frac{\partial^2\varphi_{31}}{\partial x_1\partial x_2} - \frac{\partial^2\varphi_{23}}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2\varphi_{11}}{\partial x_2\partial x_3}$$

$$\sigma_{22} + F = \frac{\partial^2\varphi_{11}}{\partial x_3^2} - 2\frac{\partial^2\varphi_{31}}{\partial x_3\partial x_1}, \qquad \sigma_{31} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial\varphi_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial\varphi_{31}}{\partial x_2}\right)$$

$$\sigma_{33} + F = \frac{\partial^2\varphi_{11}}{\partial x_2^2}, \qquad \sigma_{12} = \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial\varphi_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial\varphi_{31}}{\partial x_2}\right)$$

5. Пятая форма:

$$\sigma_{11} + F = \frac{\partial^2\varphi_{22}}{\partial x_3^2} - 2\frac{\partial^2\varphi_{23}}{\partial x_2\partial x_3}, \qquad \sigma_{23} = -\frac{\partial^2\varphi_{23}}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2\varphi_{11}}{\partial x_2\partial x_3}$$

$$\sigma_{22} + F = \frac{\partial^2\varphi_{11}}{\partial x_3^2}, \qquad \sigma_{31} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial\varphi_{23}}{\partial x_2} - \frac{\partial\varphi_{22}}{\partial x_3}\right)$$

$$\sigma_{33} + F = \frac{\partial^2\varphi_{22}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\varphi_{11}}{\partial x_2^2}, \qquad \sigma_{12} = \frac{\partial^2\varphi_{23}}{\partial x_1\partial x_3}$$

Соответствующее исследование для произвольной системы координат показывает, что в этом случае можно составить 20 различных простейших форм решения. Если же обратиться, например, к цилиндрической системе координат, то из общего числа 20 две формы первообразного тензора, а именно: 1) $\varphi_{\vartheta\vartheta}$, $\varphi_{\vartheta z}$, $\varphi_{r\vartheta}$ и 2) φ_{zz}, $\varphi_{\vartheta z}$, φ_{zr}, где r — координатный радиус, ϑ — координатный угол и z — аппликата, оказываются запрещенными. В случае же осевой симметрии, т. е. при независимости решения от координатного угла ϑ, количество возможных основных форм первообразного тензора уменьшается с 18 до 10. Возможные формы для этого случая будут:

1) φ_{rr}, $\varphi_{\vartheta\vartheta}$, $\varphi_{\vartheta z}$; 2) φ_{rr}, $\varphi_{r\vartheta}$, φ_{zz}; 3) φ_{rr}, $\varphi_{\vartheta z}$, φ_{zz}; 4) φ_{rr}, $\varphi_{r\vartheta}$, φ_{zr}; 5) φ_{rr}, $\varphi_{\vartheta z}$, φ_{zz}

6) $\varphi_{r\vartheta}$, $\varphi_{\vartheta\vartheta}$, φ_{zz}; 7) $\varphi_{r\vartheta}$, $\varphi_{\vartheta\vartheta}$, φ_{zr}; 8) $\varphi_{\vartheta\vartheta}$, $\varphi_{\vartheta z}$, φ_{zr}; 9) $\varphi_{\vartheta\vartheta}$, $\varphi_{r\vartheta}$, φ_{zr}; 10) $\varphi_{\vartheta\vartheta}$, $\varphi_{\vartheta z}$, φ_{zz}

При использовании сферических координат можно обнаружить, что из 20 простых форм запрещенной будет одна: $\varphi_{\vartheta\vartheta}$, $\varphi_{r\vartheta}$, $\varphi_{\vartheta\alpha}$, где r — координатный радиус, ϑ — долгота и α — широта, отсчитываемая от нормали к плоскости отсчета долгот.

В дальнейшем мы не будем ограничивать себя выбором определенной формы решения и будем предполагать наличие всех компонент в первообразном тензоре. Результаты можно будет применить к различным допустимым формам решения.

§ 2. Условия совместности для первообразного тензора. 1. В нашей статье [9] было показано, что условия совместности Бельтрами-Мичелла при использовании тензора φ могут быть представлены в виде

$$\nabla \times \left(\Delta\varphi - \frac{1}{1+\mu}SI + \frac{1-2\mu}{1+\mu}FI\right) \times \nabla = 0 \tag{2.1}$$

где μ — коэффициент Пуассона, $\triangle \equiv \operatorname{div}\operatorname{grad}$ и

$$S = \triangle\varphi_{\mathrm{I}} - \nabla^2 \cdot\cdot\, \varphi \tag{2.2}$$

Здесь φ_{I} — первый инвариант тензора φ, а точка, поставленная между векторными и тензорными обозначениями,— знак скалярного умножения, две точки — дважды скалярно умноженное; при отсутствии точек или косого креста между указанными обозначениями умножение понимается диадное.

Там же было показано, что интегралом уравнения (2.1) будет

$$\triangle\varphi - \frac{1}{1+\mu}SI + \frac{1-2\mu}{1+\mu}FI = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{w} + \mathbf{w}\nabla) \tag{2.3}$$

где $\mathbf{w}$ — произвольная векторная функция, причем S подчиняется условию

$$\triangle S = 2\frac{1-2\mu}{1-\mu}\triangle F \tag{2.4}$$

2. Введем в рассмотрение произвольную гармоническую скалярную функцию T и ввиду последнего равенства запишем, что

$$S = 2\frac{1-2\mu}{1-\mu}F + (1+\mu)T \tag{2.5}$$

Исходя из зависимости (2.3), можно получить уравнение

$$\triangle\varphi = \left(\frac{1-2\mu}{1-\mu}F + T\right)I + \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{w} + \mathbf{w}\nabla) \tag{2.6}$$

Отсюда в результате свертывания найдем, что

$$\triangle\varphi_I = 3\left(\frac{1-2\mu}{1-\mu}F + T\right) + \nabla\cdot\mathbf{w} \tag{2.7}$$

и затем, исходя из равенств (2.2) и (2.5), получим такую зависимость [9]:

$$\nabla^2\cdot\cdot\varphi = \frac{1-2\mu}{1-\mu}F + (2-\mu)T + \nabla\cdot\mathbf{w} \tag{2.8}$$

3. В отношении вектор-функции $\mathbf{w}$ можно отметить следующее. Если нам известен в каком-либо виде тензор φ, полностью решающий конкретную задачу теории упругости при выбранном выражении для F, то вследствие равенства (2.2) нам будет также известна функция S, а следовательно, ввиду равенства (2.5), и функция T. В этом случае уравнение (2.6) будет определять вектор $\mathbf{w}$ с точностью до линейного слагаемого

$$\mathbf{w}^\circ = \mathbf{a}\times\mathbf{r} + \mathbf{b}$$

где $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — постоянные векторы, а $\mathbf{r}$ — радиус-вектор текущей точки. Таким образом, вектор $\mathbf{w}$ по произволу в этом случае выбираем быть не может.

Наоборот, если мы выберем по своему усмотрению вектор $\mathbf{w}$, то форма тензора φ тем самым определится и мы не сможем выбирать ее в желательном виде.

Максвелл, исходя из других соображений, получил также условия, которым должны удовлетворять введенные им функции напряжений, однако им были пропущены функции, соответствующие у нас вектору $\mathbf{w}$. Морера и Бельтрами вопроса об условиях совместности для введенных ими функций не затрагивали. Указанными выше равенствами вопрос об этих условиях решается в общем виде для любой частной формы тензора φ.

4. С целью использования в решении бигармонических функций введем в рассмотрение скалярную функцию R, вектор-функцию $\mathbf{W}$ и симметрический бигармонический тензор второй валентности B, определяемые (с точностью до соответствующих произвольных гармонических слагаемых) зависимостями

$$\triangle R = F, \qquad \triangle\mathbf{W} = \mathbf{w}, \qquad \triangle(\nabla^2\cdot\cdot B) = T \tag{2.9}$$

Легко показать, что при наличии равенств (2.9) интеграл уравненя (2.6) может быть представлен следующим образом:

$$\varphi = \frac{1-2\mu}{1-\mu}RI + \nabla^2\cdot\cdot BI + \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{W} + \mathbf{W}\nabla) + \Psi \tag{2.10}$$

где Ψ — произвольный симметрический гармонический тензор второй валентности.

Подставляя это значение тензора φ в уравнение (2.8) при учете зависимостей (2.9), найдем

$$\nabla^2\cdot\cdot[(1-\mu)\triangle B - \Psi] = 0$$

Отсюда в результате интегрирования получим такое равенство:

$$(1-\mu)\triangle B - \Psi = I \times \mathbf{u}_0 + \nabla \times \Psi_0 \times \nabla$$

где $\mathbf{u}_0$ — произвольный вектор и Ψ_0 — произвольный тензор второй валентности. Исключая антисимметрические составные части этих выражений и включая симметрические их части в произвольный симметрический гармонический тензор Ψ, последнее равенство приведем к виду

$$(1-\mu)\triangle B = \Psi \tag{2.11}$$

Вследствие этого тензор φ, представленный равенством (2.10), изобразится следующим образом:

$$\varphi = \frac{1-2\mu}{1-\mu} RI + \nabla^2 \cdot\cdot BI + (1-\mu)\triangle B + \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{W} + \mathbf{W}\nabla) \tag{2.12}$$

5. Используя известные представления бигармонических функций через гармонические, мы сможем тензор φ выразить также через гармонический тензор. Так, например, полагая

$$B = z\Phi + \Phi_0 \tag{2.13}$$

где z — аппликата точки, Φ и Φ_0 — два гармонических тензора второй валентности, и замечая, что в силу третьего равенства (2.9), при помощи которого был введен тензор B, произвольная гармоническая слагаемая Φ_0 в равенстве (2.13) несущественна, мы сможем принять $\Phi_0 = 0$ и тогда из равенства (2.12) найдем такое выражение для тензора φ:

$$\varphi = I\left[\frac{1-2\mu}{1-\mu} R + 2(\nabla\cdot\Phi)\cdot\mathbf{e}_z + z(\nabla^2\cdot\cdot\Phi)\right] +$$

$$+ 2(1-\mu)\,\mathbf{e}_z\cdot(\nabla\Phi) + \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{W} + \mathbf{W}\nabla) \tag{2.14}$$

где $\mathbf{e}_z$ — координатный вектор оси z.

§ 3. Напряжения и смещения. 1. Как было показано в нашей статье [9], выражению (1.2) для тензора напряжений σ на основе полученных выше зависимостей можно придать такой вид:

$$\sigma = \nabla^2\cdot\varphi + \varphi\cdot\nabla^2 - \nabla^2\varphi_{\mathrm{I}} + \left(\mu T - \frac{\mu}{1-\mu} F\right)\mathrm{I} - \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{w} + \mathbf{w}\nabla) \tag{3.1}$$

Отсюда, пользуясь равенством (2.12), в результате подстановок и преобразований получим

$$\sigma = \triangle\left[(1-\mu)(\nabla^2\cdot B + B\cdot\nabla^2 - \nabla^2 B_{\mathrm{I}}) + \mu\nabla^2\cdot\cdot B\mathrm{I}\right] -$$

$$- \nabla^4\cdot\cdot B - \frac{1}{1-\mu}\left[(1-2\mu)\nabla^2 R + \mu F\mathrm{I}\right] \tag{3.2}$$

где B_{I} — первый инвариант тензора B.

Если воспользоваться декартовыми координатами и сохранить в тензоре B три диагональные компоненты, то это равенство непосредственно приведет нас к решению М. Г. Слободянского [11–12] при помощи трех бигармонических функций. Однако из наших равенств следует и ряд других возможных форм такого представления.

При использовании представления (2.14) можно получить следующее выражение для тензора напряжений через гармонический тензор Φ:

$$\sigma = 2\mathbf{e}_z\cdot\nabla\left[(1-\mu)(\nabla^2\cdot\Phi + \Phi\cdot\nabla^2 - \nabla^2\Phi_{\mathrm{I}}) - \mu\nabla^2\cdot\cdot\Phi\mathrm{I}\right] - 2(\nabla^3\cdot\Phi)\cdot\mathbf{e}_z -$$

$$- \mathbf{e}_z(\nabla^3\cdot\cdot\Phi) - (\nabla^3\cdot\cdot\Phi)\,\mathbf{e}_z - z(\nabla^4\cdot\cdot\Phi) - \frac{1}{1-\mu}\left[(1-2\mu)\nabla^2 R + \mu F\mathrm{I}\right] \tag{3.3}$$

где Φ_{I} — первый инвариант тензора Φ. Очевидно, и здесь возможны различные частные формы решений.

2. Как следует из той же статьи [9], вектор смещений $\mathbf{u}$ может быть представлен через первообразный тензор φ следующим образом:

$$\mathbf{u} = \frac{1+\mu}{E}\left(2\nabla\cdot\varphi - \nabla\varphi_{\mathrm{I}} - \mathbf{w}\right) \tag{3.4}$$

Если воспользоваться декартовыми координатами, а в тензоре φ согласно указанному выше о формах решения сохранить только диагональные компоненты, то отсюда придем к выражениям, полученным ранее Максвеллом [1], но с добавлением трех функций w_i, им упущенных, являющихся компонентами вектора $\mathbf{w}$.

При использовании указанным способом бигармонического тензора найдем

$$\mathbf{u} = \frac{1+\mu}{E}\left[(1-\mu)\triangle(2\nabla\cdot B - \nabla B_{\mathrm{I}}) - \nabla^3\cdot\cdot B - \frac{1-2\mu}{1-\mu}\nabla R\right] \tag{3.5}$$

Для указанного способа использования гармонического тензора Φ получим

$$\mathbf{u} = \frac{1+\mu}{E}\Big[2(1-\mu)\mathbf{e}_z\cdot\nabla(2\nabla\cdot\Phi - \nabla\Phi_{\mathrm{I}}) -$$

$$- 2(\nabla^2\cdot\Phi)\cdot\mathbf{e}_z - \mathbf{e}_z(\nabla^2\cdot\cdot\Phi) - z(\nabla^3\cdot\cdot\Phi) - \frac{1-2\mu}{1-\mu}\nabla R\Big] \tag{3.6}$$

§ 4. Условия на поверхности. 1. Проведем внутри рассматриваемого тела произвольную кусочно-гладкую двухстороннюю ограниченную поверхность f и напишем, что главный вектор $\mathbf{P}$ всех распределенных на одной ее стороне усилий, обусловливаемых напряженным состоянием, определяется равенством

$$\mathbf{P} = \int_f \sigma\cdot d\mathbf{f} \tag{4.1}$$

где $d\mathbf{f}$ — внешне направленный элемент этой поверхности.

Исходя из равенства (1.2) и принимая во внимание теорему Стокса, преобразуем это выражение так:

$$\mathbf{P} + \int_f F d\mathbf{f} = -\oint d\mathbf{l}\cdot(\varphi\times\nabla) \tag{4.2}$$

где $d\mathbf{l}$ — положительно ориентированный элемент кривой, ограничивающей поверхность.

Будем поверхность f проводить внутри тела так, чтобы она своим краевым контуром опиралась на внешнюю граничную поверхность S тела. Если эта внутренняя поверхность не является барьером для многосвязного объема рассматриваемого тела, то из условия равновесия отсеченной части этого тела заключаем, что главный вектор сил напряжений, действующих на внутреннюю поверхность f, должен быть равен по величине главному вектору внешних сил, действующих на отсеченную часть наружной поверхности S, являющейся границей рассматриваемого объема, и обратен ему по направлению. Этот последний вектор при заданной внешней загрузке тела можно считать известным. При задании вектор-функции $\rho\mathbf{V}$ объемных сил потенциальная функция F, определяемая равенством (1.1), может считаться также известной. В результате в уравнении (4.2) левая часть может рассматриваться как известная и задача будет заключаться в нахождении тензора φ, удовлетворяющего для любого замкнутого контура на наружной поверхности тела, не являющегося границей барьерного сечения многосвязности, уравнению (4.2). При отсутствии на некотором участке поверхности S внешних нагрузок и отсутствии объемных сил мы из равенства (4.2) получим, что на этом участке для любого кусочно-гладкого с указанным исключением замкнутого контура должно выполняться условие

$$\oint d\mathbf{l}\cdot(\varphi\times\nabla) = 0 \tag{4.3}$$

Подинтегральную функцию в этом случае на указанном участке поверхности можно рассматривать как градиент некоторого вектора $\mathbf{t}$, являющегося функцией точки поверхности S:

$$(\varphi \times \nabla)_s = \nabla \mathbf{t} \tag{4.4}$$

а тензор φ на поверхности ввиду его симметричности можно представить в виде

$$\varphi_S = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{s} + \mathbf{s}\nabla) \tag{4.5}$$

где $\mathbf{s}$ — также некоторая вектор-функция точки указанного участка поверхности S. Отдельные же точки приложения сосредоточенных сил на таком участке можно рассматривать как полюсы многозначности вектора

$$\mathbf{t} = -\frac{1}{2}\nabla \times \mathbf{s} \tag{4.6}$$

При указанном способе использования бигармонического тензора мы вместо равенства (4.2) получим такую зависимость:

$$\mathbf{P} + \int_f F d\mathbf{f} + \frac{1-2\mu}{1-\mu}\oint d\mathbf{l} \times \nabla R =$$

$$= -\oint d\mathbf{l} \times \nabla^3 \cdot\cdot B - (1-\mu)\oint d\mathbf{l}\cdot(\triangle B \times \nabla) \tag{4.7}$$

Если же воспользоваться указанным способом гармоническим тензором Φ, то найдем, что

$$\mathbf{P} + \int_f F d\mathbf{f} + \frac{1-2\mu}{1-\mu}\oint d\mathbf{l} \times \nabla R = \tag{4.8}$$

$$= -\oint d\mathbf{l} \times \nabla[2(\nabla\cdot\Phi)\cdot\mathbf{e}_z + z(\nabla^2\cdot\cdot\Phi)] - 2(1-\mu)\oint d\mathbf{l}\cdot[\mathbf{e}_z\cdot(\nabla\Phi\times\nabla)]$$

2. Главный момент $\mathbf{M}$ сил напряжений, распределенных на одной стороне поверхности f, проведенной внутри тела, будет

$$\mathbf{M} = \int_f \mathbf{r} \times \sigma \cdot d\mathbf{f} \tag{4.9}$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, проведенный в текущую точку поверхности f из некоторой фиксированной точки, относительно которой определяется момент $\mathbf{M}$. Принимая же во внимание равенство (1.2), отсюда найдем, что

$$\mathbf{M} + \int_f F\mathbf{r} \times d\mathbf{f} = \oint d\mathbf{l}\cdot\varphi + \oint d\mathbf{l}\cdot(\varphi \times \nabla) \times \mathbf{r} \tag{4.10}$$

Сделанные выше замечания относительно определимости главного вектора $\mathbf{P}$ для случая, когда поверхность f опирается своим контуром на внешнюю поверхность S тела, можно с соответствующими видоизменениями перенести и сюда.

Так же как и выше, при отсутствии на некотором участке поверхности S внешних нагрузок и отсутствии объемных сил мы заключаем, что на любом кусочно-гладком с указанным исключением замкнутом контуре этого участка должно выполняться условие

$$\oint d\mathbf{l}\cdot\varphi + \oint d\mathbf{l}\cdot(\varphi\times\nabla)\times\mathbf{r} = 0 \tag{4.11}$$

Легко проверить, что, если тензор φ на этом участке может быть представлен в виде выражения (4.5), условие (4.11) будет тождественно выполняться. Точки многозначности на этом участке для главного вектора будут являться также точками многозначности для главного момента. Однако главный момент может иметь и свои точки многозначности, которые не будут являться таковыми для главного вектора. Такими точками, очевидно, могут явиться точки приложений сосредоточенных пар.

Для возможности этого необходимо, чтобы тензор φ на указанном участке поверхности S имел вид:

$$\varphi s = \nabla^2 \phi \tag{4.12}$$

где ϕ — скалярная функция точки поверхности S. При этом будут тождественно выполняться как условие (4.3), так и условие (4.11), причем в последнем два суммируемых криволинейных интеграла будут аннулироваться в отдельности. Однако первое из этих слагаемых имеет в качестве неопределенного интеграла выражение $\mathbf{m} = \nabla\phi$, и, следовательно, точки многозначности этого выражения будут являться указанными точками приложения сосредоточенных пар.

Можно показать, что существует ось, имеющая направление вектора $\mathbf{P}$, для точек которой главный момент будет определяться равенством

$$\mathbf{M} = \oint d\mathbf{l}\cdot\varphi \tag{4.13}$$

3. Если на внешней поверхности тела заданы значения напряжений, то в качестве граничных условий в этом случае могут также служить граничные значения выражений, получаемых в результате скалярного умножения равенства (1.2), (3.1), (3.2) или (3.3) на вектор внешней нормали к поверхности тела. При задании значений смещений на поверхности тела такими условиями будут являться граничные значения выражений (3.4), (3.5) или (3.6).

Поступила в редакцию
30 III 1946

ЛИТЕРАТУРА

1. Maxwell J. Cl. On reciprocal figures, frames and diagrams of forces. Scientific papers. Vol. 2. P. 161—207. Trans. of the R. Soc. of Edinburg. 1870. V. 26. P. 27.
2. Morera G. Soluzione generale delle equazioni indefinite dell'equilibrio di un corpo continuo. Atti della r. Accademia dei Lincei. 1892. Serie 5. Vol. 1. Sem. 1. P. 137—141.
3. Beltrami E. Osservazioni sulla Nota precedente. Там же. P. 141—142.
4. Morera G. Appendice alla Nota: «Sulla soluzione più generale delle equazioni indefinite...» Там же. P. 233—234.
5. Tedone O. Allgemeine Theoreme der mathematischen Elasticitätslehre (Integrationstheorie). Encyklopädie der math. Wissenschaften. Bd. 4, 2, II. S. 55—124.
6. Треффц Е. Математическая теория упругости. Пер. с нем. ОНТИ. 1932.
7. Блох В. И. К вопросу о решении пространственной задачи теории упругости Науч. записки Харьковского мех.-машиностр. ин-та. 1936. Т. II. Кн. 1. Стр. 84—91.
8. Блох В. И. Общее решение пространственной задачи теории упругости. Там же. Стр. 93—128.
9. Блох В. И. Общее решение пространственной задачи теории упругости в инвариантной форме. Труды конференции по оптическому методу изучения напряжений. ОНТИ. 1937. Стр. 69—74.
10. Блох В. И. Основные уравнения теории упругости в обобщенном виде. Научные записки Харьковского мех.-машиностроит. ин-та. 1940. Стр. 27—54.
11. Слободянский М. Г. Функции напряжений для пространственной задачи теории упругости. Уч. записки Моск. универс. 1938. Вып. 24. Стр. 184—190.
12. Слободянский М. Г. Выражение решений дифференциальных уравнений упругости с помощью одной, двух и трех функций и доказательство общности этих решений. Там же. Стр. 191—202.