Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XIV, 1950

РЕШЕНИЕ ОБЩЕЙ ЗАДАЧИ ИЗГИБА ОПЕРТОЙ УПРУГОЙ ПЛАСТИНКИ

З. И. Халилов

(Баку)

Общая задача об изгибе плоской упругой изотропной однородной тонкой пластинки с заделанными краями в литературе исследована различными методами[1,2]. Общую задачу об изгибе той же пластинки со свободными краями исследовал И. Н. Векуа, которому удалось свести последнюю ко второй основной задаче плоской теории упругости[3]. Последняя исчерпывающим образом изучена в работах Н. И. Мусхелишвили[2] и других авторов[4].

В настоящей работе рассматривается общая задача об изгибе плоской упругой изотропной однородной тонкой пластинки с опертыми краями[1].

§ 1. Постановка задачи. В дальнейшем под пластинкой будем понимать плоскую упругую изотропную однородную тонкую пластинку.

Пусть срединная поверхность пластинки занимает конечную односвязную область[2] S плоскости xy, ограниченную замкнутой, простой, гладкой кривой L. За положительное направление L будем считать то, которое оставляет область S слева. Пусть $p(x, y)$ — нормальная нагрузка.

В приближенной теории тонких пластинок показывается, что прогиб срединной поверхности $w(x, y)$ удовлетворяет уравнению [6]

$$D \triangle\triangle w = p(x, y) \qquad \left(D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \right) \tag{1.1}$$

где D — цилиндрическая жесткость пластинки, E — модуль упругости, μ — коэффициент Пуассона, h — толщина пластинки, которая по сравнению с остальными линейными размерами последней предполагается малой.

Для пластинки, опертой по краям, граничные условия будут [6]:

$$w = 0 \tag{1.2}$$

$$G(w) \equiv \mu \triangle w + (1-\mu)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cos^2\vartheta + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\sin^2\vartheta + 2\frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y}\cos\vartheta \sin\vartheta\right] = 0$$

где ϑ — угол, составленный внешней нормалью n с осью x.

В этой работе будем предполагать, что $p(x, y)$ — функция, определенная в S, непрерывная вместе с частными производными первого порядка; далее будем предполагать, что L имеет дифференцируемую кривизну, производная по дуге L которой удовлетворяет условию Гельдера[3].

---

[1] Первое сообщение было сделано авторомв статье [5].

[2] Здесь конечная односвязная область принимается для простоты.

[3] Отметим, что эти условия не вытекают из существа задачи, а продиктованы методом исследования.

Для последнего достаточно, чтобы $t'''(s)$, $t \in L$, была функцией, удовлетворяющей условию Гельдера.

Основная задача настоящей работы заключается в следующем: *найти функцию* $w \equiv w(x, y)$, *непрерывную в* S *вместе со своими всеми частными производными порядка* $\leqslant 4$, *непрерывную вместе со всеми своими частными производными порядка* $\leqslant 3$ *в* $S + L$, *удовлетворяющую в* S *уравнению* (1.1) *и на* L *граничным условиям* (1.2), *где под производными в* (1.2) *предполагается равномерный предел соответствующей производной в* S, *когда точка* (x, y) *изнутри* S *стремится к соответствующей точке* L.

Эту задачу будем называть задачей (R_1). Под решением уравнения (1.1) всегда будем понимать всякое решение, представляющее функцию, непрерывную в S вместе со всеми частными производными порядка $\leqslant 4$ (*регулярное решение*).

В дальнейшем будет удобно рассматривать граничную задачу с однородным уравнением. Этого можно добиться следующим методом.

Пусть w_0 — какое-либо частное регулярное решение уравнения (1.1), непрерывное вместе с производными порядка $\leqslant 3$ в области $S + L$. Пусть w — решение задачи (R_1). Тогда $u = w - w_0$ будет решение задачи (R_2): *найти решение уравнения* $\triangle\triangle u = 0$, *удовлетворяющее условиям* $u = g(s)$, $G(u) = h(s)$, *где* s — *длина дуги контура* L, *отсчитываемая от некоторой фиксированной точки в положительном направлении* L.

Очевидно, что $g(s) = -[w_0]_L$, $h(s) = -[G(w_0)]_L$, причем $g(s)$ непрерывна и имеет непрерывные производные по s вплоть до третьего порядка, $h(s)$ непрерывна и имеет непрерывную производную первого порядка.

Очевидно задачи (R_1) и (R_2) эквивалентны.

Для определения указанного частного решения w_0 можно пользоваться, например, формулой[7]

$$w_0(x, y) = \frac{1}{8\pi D} \iint\limits_S p(\xi, \eta)\, r^2 \log r \, d\xi \, d\eta \qquad \left(r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}\right) \qquad (1.3)$$

Если $p(x, y)$ — аналитическая функция, гораздо удобнее для нахождения упомянутого частного решения пользоваться формулой[3]

$$w_0(x, y) = \frac{1}{16D} \int\limits_{z_0}^{z} (z - \zeta)\, d\zeta \int\limits_{\bar{z}_0}^{\bar{z}} (\bar{z} - \bar{\zeta})\, p\left(\frac{\zeta + \bar{\zeta}}{2}, \frac{\zeta - \bar{\zeta}}{2i}\right) d\bar{\zeta} \qquad (1.4)$$

где $z = x + iy$, $\zeta = \xi + i\eta$, $z_0 \in S$.

В дальнейшем исследовании нам понадобится еще рассматривать следующую внешнюю задачу $(R_2)^*$.

Пусть S^* — область, дополняющая область S до плоскости xy.

Внешнюю задачу $(R_2)^*$ сформулируем так: *найти функцию* $w \equiv w(x, y)$, *определенную в* S^*, *непрерывную вместе с производными порядка* $\leqslant 4$, *непрерывную вместе с производными порядка* $\leqslant 3$ *вплоть до контура* L, *удовлетворяющую в* S^* *уравнению* $\triangle\triangle w = 0$, *а на* L *удовлетворяющую условиям* $w = g_1(s)$, $G(w) = h_1(s)$, *где в левых частях стоят пределы соответствующих выражений извне контура* L.

Если, кроме того, при любом стремлении точки (x, y) к бесконечности для функции w величина

$$w \frac{\partial \triangle w}{\partial n} - (1-\mu) \frac{\partial w}{\partial s} H_1(w) - \frac{\partial w}{\partial n} G(w) \tag{1.5}$$

определенная на гладкой замкнутой линии L, бесконечно расширяющейся, стремится к нулю, то это решение будем называть *регулярным в бесконечности*; величина $H_1(w)$ в (1.5) определена формулой

$$H_1(w) \equiv \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \cos\vartheta \sin\vartheta + \frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y} (\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta) \tag{1.6}$$

§ 2. Единственность решения задачи (R_2). Для доказательства единственности сначала установим одно интегральное равенство.

При условиях, накладываемых на область S и ее контур L для всякой непрерывной в S вместе со своими частными производными до четвертого порядка и непрерывной в $S+L$ вместе с производными до третьего порядка функции $v \equiv v(x, y)$, имеет место равенство

$$\int_L \left[v \frac{\partial \triangle v}{\partial n} - (1-\mu) \frac{\partial v}{\partial s} H_1(v) - \frac{\partial v}{\partial n} G(v) \right] ds = \tag{2.1}$$

$$= \iint_S [v \triangle\triangle v - \{\mu (\triangle v)^2 + (1-\mu) [(v_{xx})^2 + (v_{yy})^2 + 2(v_{xy})^2]\}]\, dx\, dy$$

Равенство (2.1) доказывается на основании известной формулы[8], устанавливающей связь между криволинейным интегралом по замкнутому контуру L и двойным интегралом по S. Отметим, что

$$\frac{\partial \triangle w}{\partial n} + (1-\mu) \frac{\partial}{\partial s} H_1(w) = 0$$

есть второе граничное условие краевой задачи изгиба свободной пластинки[6]. На основании равенства (2.1) можно исследовать единственность решения всех трех основных краевых задач изгиба пластинки.

Здесь рассматривается только задача (R_2). Пусть имеем однородную задачу (R_2^0), т. е. полагаем $g(s) \equiv h(s) \equiv 0$. Пусть u — решение этой однородной задачи; тогда интеграл по L в равенстве (2.1) равен нулю и

$$\iint \{\mu (\triangle u)^2 + (1-\mu) [(u_{xx})^2 + (u_{yy})^2 + 2(u_{xy})^2]\}\, dx\, dy = 0 \tag{2.2}$$

Отсюда в силу того, что $\mu < 1$, имеем

$$\triangle u \equiv 0, \qquad u_{xx} \equiv u_{yy} \equiv u_{xy} \equiv 0 \qquad \text{в } S$$

Но так как на L функция $u = 0$, то $u \equiv 0$ по теореме о единственности решения первой краевой задачи теории гармонических функций[9].

Из этого следует единственность решения произвольной неоднородной задачи (R_2), следовательно, и задачи (R_1).

Нетрудно показать теперь, что задача (R_2)* также имеет единственное регулярное в бесконечности решение, если решение искать в классе решений, для которых величина

$$u \frac{\partial \triangle u}{\partial n} - (1-\mu) \frac{\partial u}{\partial s} H_1(u) - \frac{\partial u}{\partial n} G(u)$$

имеет порядок $r^{-(1+\varepsilon)}$, где ε — некоторое положительное число.

Это условие в дальнейшем будем называть условием (A).

В самом деле, при наших условиях имеет место равенство

$$\int_L \left[v \frac{\partial \triangle v}{\partial n} - (1-\mu) \frac{\partial v}{\partial s} H_1(v) - \frac{\partial v}{\partial n} G(v) \right] ds = \tag{2.3}$$

$$= \iint_{S^*} \{ v \triangle \triangle v - \mu (\triangle v)^2 - (1-\mu) [(v_{xx})^2 + (v_{yy})^2 + 2 (v_{xy})^2] \} \, dx \, dy$$

Отсюда вытекает доказательство единственности решения задачи (R_2)*.

В самом деле, из (2.3) вытекает, что $v = ax + by + c$, причем это выражение приближается к нулю при приближении точки (x, y) к точке контура L. Следовательно, $v \equiv 0$.

Замечание. Очевидно, все утверждения настоящего параграфа остаются в силе, если везде условие существования непрерывных вплоть до L производных порядка $\leqslant 3$ заменить условием: существуют все непрерывные производные порядка $\leqslant 2$ и $\partial \triangle u / \partial x$, $\partial \triangle u / \partial y$ вплоть до L. Это условие назовем условием (B) и решение — решением из класса (K).

§ 3. Приведение задачи (R_2) к задаче (R_4). Рассмотрим задачу (R_3):

$$\triangle \triangle u = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial s} = g'(s), \qquad G(u) = h(s) \tag{3.1}$$

На основании теоремы единственности (см. § 2) решение задачи (R_3), если оно существует, определено с точностью до произвольного постоянного слагаемого. Следовательно, всякое решение u задачи (R_3) является решением задачи (R_2) с точностью до постоянного слагаемого, т. е. удовлетворяет уравнениям

$$\triangle \triangle u = 0, \qquad u = g(s) + C, \qquad G(u) = h(s) \tag{3.2}$$

где C — некоторая постоянная. Тогда $u - C$ будет решением задачи (R_2).

Далее очевидно, если известны u и $G(u)$ на контуре L, то всегда можно определить величины

$$\frac{\partial u}{\partial s}, \qquad G^*(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{1}{1-\mu} G(u) \qquad \text{на } L$$

Зная значения величин $\partial u / \partial s$, $G^*(u)$ на L, можно определить значение $G(u)$, а также значение u с точностью до постоянного слагаемого[1].

Рассмотрим задачу (R_4): *найти в* S *регулярное решение* $u \equiv u(x, y)$ *уравнения* $\triangle\triangle u = 0$ *из класса* (K), *удовлетворяющее на* L *условию*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{1}{1-\mu} G(u) + \frac{i}{\rho} \frac{\partial u}{\partial s} = f_1(s) \tag{3.3}$$

где $f_1(s)$ — заданная достаточно гладкая функция, ρ — радиус кривизны контура L в точке s. Если под $f_1(s)$ понимать

$$g''(s) + \frac{1}{1-\mu} h(s) + \frac{i}{\rho} g'(s)$$

то, очевидно, задачи (R_2) и (R_4) эквивалентны с точностью до произвольного постоянного слагаемого.

---

[1] Для задачи механики (R_1) это слагаемое, очевидно, не имеет значения.

§ 4. Приведение задачи (R_4) к функциональному уравнению. В дальнейшем будем искать решение задачи (R_1) из класса (K).

Известно, что всякое регулярное решение уравнения $\Delta\Delta u = 0$ имеет следующее общее комплексное представление:

$$u = z\overline{\varphi(z)} + \bar{z}\varphi(z) + \chi(z) + \overline{\chi(z)} \tag{4.1}$$

где $\varphi(z)$, $\chi(z)$ — голоморфные функции в области S комплексного переменного $z = x + iy$ (формула Э. Гурса [1]).

Известно также, что, не ограничивая общности, можно принять

$$\varphi(0) = 0, \qquad \operatorname{Im}\varphi'(0) = 0, \qquad \operatorname{Im}\chi(0) = 0 \tag{4.2}$$

где считается, что точка $z = 0$ находится внутри S, при этом соответствие между u и двумя функциями (φ, χ) будет взаимно однозначным.

Найдем теперь граничные условия для искомых функций $\varphi(z)$ и $\chi(z)$.

Нетрудно проверить, что

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\alpha = g'(s) \tag{4.3}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos^2\alpha + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\cos\alpha\sin\alpha + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\sin^2\alpha - \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial u}{\partial y}\cos\alpha - \frac{\partial u}{\partial x}\sin\alpha\right] \tag{4.4}$$

где α — угол между касательной к L и осью x; при этом $1/\rho = \partial\alpha/\partial s$ — кривизна кривой L. При помощи операторов

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \qquad \frac{\partial}{\partial y} = i\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) \tag{4.5}$$

введем в (4.3), (4.4) комплексные переменные z и $\bar{z}$. Тогда имеем

$$\frac{\partial u}{\partial s} = in\frac{\partial u}{\partial t} - i\bar{n}\frac{\partial u}{\partial \bar{t}} = g'(s) \qquad (n = e^{i\vartheta}) \tag{4.6}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = -n^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \bar{n}^2\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{t}^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial\bar{t}} - \frac{1}{\rho}\left[n\frac{\partial u}{\partial t} + \bar{n}\frac{\partial u}{\partial \bar{t}}\right] = g''(s) \tag{4.7}$$

Далее имеем

$$G(u) = 2(\mu + 1)\frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial\bar{t}} + (1 - \mu)\left[n^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \bar{n}^2\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{t}^2}\right] = h(s) \tag{4.8}$$

Из равенств (4.7) и (4.8) имеем (4.9)

$$G^*(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{1}{1-\mu}G(u) \equiv b_1\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial\bar{t}} - \frac{1}{\rho}\left[n\frac{\partial u}{\partial t} + \bar{n}\frac{\partial u}{\partial \bar{t}}\right] = g''(s) + \frac{1}{1-\mu}h(s)$$

где $b_1 = 4/(1-\mu)$ имеет значение, большее 4. Из (4.6) и (4.9) имеем

$$b\frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial\bar{t}} - \frac{2\mu}{\rho}\frac{\partial u}{\partial t} = g''(s) + \frac{1}{1-\mu}h(s) + i\frac{g'(s)}{\rho} \tag{4.10}$$

Таким образом, приходим к следующей задаче (R_5): *найти вещественную регулярную бигармоническую функцию* $u \equiv u(z, \bar{z})$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial z^2\,\partial\bar{z}^2} = 0 \tag{4.11}$$

удовлетворяющую на L *граничному условию* (4.10).

Нетрудно показать, что задачи (R_3) и (R_5) эквивалентны с точностью до постоянного слагаемого.

По теореме единственности для задачи (R_1) задача (R_5) обладает свойством: *если* u_0 — *какое-либо решение задачи* (R_5), *то всякое ее решение* *имеет вид* $u_0 + C$, *где* C — *произвольная постоянная, т. е. два решения задачи, если они существуют, отличаются постоянным слагаемым.*

В дальнейшем понадобится выражение $H_1(w)$ в переменных z и $\bar{z}$.

$$H_1(w) \equiv in^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \bar{i}\bar{n}^2 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{t}^2} \tag{4.12}$$

Используя представление (4.1), имеем

$$\alpha(t)\overline{\varphi'(t)} + \beta(t)\varphi'(t) - \overline{\varphi(t)} - \psi(t) = f(t) \tag{4.13}$$

где t — аффикс точки контура L,

$$\alpha(t) = b\rho\bar{n}, \qquad \beta(t) = \alpha(t) - \bar{t} \qquad \left(b = \frac{b_1}{2}\right) \tag{4.14}$$

$$\psi(z) = \chi'(z) \tag{4.15}$$

$$f(t) = \frac{\rho\bar{n}}{2}\left[g''(s) + \frac{h(s)}{1-\mu} + \frac{t}{\rho} g'(s)\right] \tag{4.16}$$

Таким образом, задача (R_3) свелась к следующей эквивалентной ей граничной задаче (R_6) теории функций комплексного переменного: *найти две голоморфные в* S *функции*[1] $[\varphi(z), \psi(z)]$, *непрерывные в* $S + L$ *вместе с производными* $\varphi'(z)$, $\varphi''(z)$, *и удовлетворяющие на* L *условию* (4.13).

Исследуем проблему единственности для задачи (R_6).

Рассмотрим однородную задачу (R_6^0), т. е. полагая $f(t) \equiv 0$. Очевидно, этой однородной задаче соответствует однородная задача (R_3). Тогда соответствующее решение однородной задачи (R_3) будет $u = \text{const}$.

С другой стороны, по (4.1) имеем, что

$$\Delta u \equiv 8 \operatorname{Re} \varphi'(z) \tag{4.17}$$

Отсюда

$$\varphi'(z) = ik \tag{4.18}$$

где k — вещественное постоянное. Следовательно,

$$\varphi(z) = ikz + C_1 \tag{4.19}$$

Из (4.13) получаем, что

$$\psi(z) = -\bar{C}_1 \tag{4.20}$$

Следовательно, общее решение однородной задачи (R_6) будет иметь вид (4.19), (4.20). Аналогичным рассуждением получаем, что решение однородной внешней задачи (R_6)*, которой соответствует решение u задачи (R_3)*, регулярное в бесконечности и удовлетворяющее условию (A), также имеет вид (4.19) и (4.20). Из (4.20) имеем

$$\chi(z) = -\bar{C}_1 z + C_2 \tag{4.21}$$

Таким образом, функциям $\varphi(z)$ и $\chi(z)$, определяемым равенствами (4.19) и (4.20), соответствует решение задачи (R_3)

$$u \equiv \text{const} = 2 \operatorname{Re} C_2$$

Следовательно, числа k и C_1 можно фиксировать произвольно, т. е. можно, например, положить, что $k = \operatorname{Im} \varphi'(0) = 0$, $\varphi(z_0) = 0$, где z_0 — произвольная точка $S + L$.

---

[1] См. замечание, сделанное в конце § 2, условие (B).

§ 5. Приведение задачи (R_6) к интегральному уравнению. Пусть $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ — решение задачи (R_6). Они должны удовлетворять условию (4.13). Умножая обе части равенства (4.13) на $1/2\pi i(t-z^*)$, где z^* — произвольная точка области S^*, и интегрируя по контуру L, найдем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\alpha(t)\overline{\varphi'(t)}}{t-z^*}dt+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\beta(t)\varphi'(t)}{t-z^*}dt-\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\varphi(t)}}{t-z^*}dt=A(z^*) \tag{5.1}$$

где

$$A(z^*)=\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(t)}{t-z^*}dt \tag{5.2}$$

Пусть точка z^* извне S стремится к какой-нибудь точке t_0 контура L. Тогда на основании формулы Привалова [12]

$$\lim_{z^*\to t_0}\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{F(t)\,dt}{t-z^*}=-\frac{1}{2}F(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{F(t)}{t-t_0}dt \tag{5.3}$$

где $F(t)$ — функция точки t контура L, удовлетворяющая условию Гельдера, интеграл в правой части равенства имеет главное значение.

По условию $\alpha(t)$ и $f(t)$ — функции из класса H. Тогда имеем

$$-\frac{1}{2}\alpha(t_0)\overline{\varphi'(t_0)}+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\alpha(t)\overline{\varphi'(t)}}{t-t_0}dt-\frac{1}{2}\beta(t_0)\varphi'(t_0)+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\beta(t)\varphi'(t)}{t-t_0}dt-\frac{1}{2}\overline{\varphi(t_0)}+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\varphi(t)}}{t-t_0}dt=A_l(t_0) \tag{5.4}$$

где

$$A_l(t_0)=\lim_{z^*\to t_0}A(z^*) \tag{5.5}$$

Таким образом, мы показали: *если $[\varphi(z),\psi(z)]$ — решение задачи* (R_6), *то граничное значение $\varphi(t)$ является решением сингулярного интегро-дифференциального уравнения* (5.4).

Рассмотрим теперь следующее регулярное интегро-дифференциальное уравнение:

$$-\alpha(t_0)\overline{\varphi'(t_0)}+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\alpha(t)-\alpha(t_0)}{t-t_0}\overline{\varphi'(t)}\,dt+ \tag{5.6}$$

$$+\frac{\alpha(t_0)}{2\pi i}\int_L \overline{\varphi'(t)}\,d\log\frac{\overline{t-t_0}}{t-t_0}+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\beta(t)-\beta(t_0)}{t-t_0}\varphi'(t)\,dt+\overline{\varphi(t_0)}+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_L \overline{\varphi(t)}\,d\log\frac{\overline{t}-\overline{t_0}}{t-t_0}+\frac{1}{2\pi i}\int_L\left[\frac{\varphi'(t)}{t}dt+\frac{\overline{\varphi'(t)}}{\overline{t}}\,d\overline{t}\right]=A_l(t_0)$$

При наших условиях, накладываемых на $p(x,y)$ и L, всякое решение $\varphi(t)$ интегро-дифференциального уравнения (5.6) имеет непрерывные производные до второго порядка.

Докажем, что *всякое решение $\varphi(t)$ уравнения* (5.6) *из класса* H *является решением уравнения* (5.4) *и представляет собою граничное значение голоморфной в S функции $\varphi(z)$, удовлетворяющей условию* $\operatorname{Im}\varphi'(0)=0$.

В самом деле, уравнение (5.6) можно записать так:

$$\lim_{z^*\to t_0} \overline{\varphi_1(z^*)} - \alpha(t_0) \lim_{z^*\to t_0} \overline{\varphi_1'(z^*)} + \beta(t_0) \lim_{z^*\to t_0} \varphi_1'(z^*) - \lim_{z^*\to t_0} \psi_1(z^*) = 0 \tag{5.7}$$

где

$$\varphi_1(z^*) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t - z^*} dt \tag{5.8}$$

$$\psi_1(z^*) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\alpha(t)\overline{\varphi'(t)}}{t - z^*} dt + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\beta(t)\varphi'(t)}{t - z^*} dt -$$

$$- \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\overline{\varphi(t)}}{t - z^*} dt - \frac{1}{2\pi i} \int \left[\frac{\varphi'(t)}{t} dt + \frac{\overline{\varphi'(t)}}{\overline{t}} \overline{dt}\right] - A(z^*) \tag{5.9}$$

Если ввести функции $\varphi^*(z^*) = i\varphi_1(z^*)$, $\psi^*(z^*) = i\psi_1(z^*)$, то (5.7) можно переписать так:

$$\alpha(t)\overline{\varphi^{*\prime}(t)} + \beta(t)\varphi^{*\prime}(t) - \overline{\varphi^*(t)} - \psi^*(t) = 0 \tag{5.10}$$

Следовательно, две функции $\varphi^*(z^*), \psi^*(z^*)$ являются решением внешней задачи $(R_6)^*$, которому соответствует решение $(R_2)^*$, регулярное в бесконечности и удовлетворяющее условию (A). Тогда

$$\varphi^*(z^*) = ikz^* + C, \qquad \psi^*(z^*) = -\overline{C}$$

С другой стороны, непосредственно из (5.8) видно, что $\varphi^*(\infty) = 0$. Следовательно, $\varphi^*(z^*) \equiv 0$, $\psi^*(z^*) \equiv 0$. Тогда получаем, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)\, dt}{t - z^*} \equiv 0 \tag{5.11}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\alpha(t)\overline{\varphi'(t)}}{t - z^*} dt + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\beta(t)\varphi'(t)}{t - z^*} dt -$$

$$- \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\overline{\varphi(t)}}{t - z^*} dt - \frac{1}{2\pi i} \int_L \left[\frac{\varphi'(t)}{t} dt + \frac{\overline{\varphi'(t)}}{\overline{t}} \overline{dt}\right] - A(z^*) \equiv 0 \tag{5.12}$$

Из равенства (5.11) следует, что всякое решение уравнения (5.6) представляет собой граничное значение голоморфной в S функции $\varphi(z)$. Из (5.12) следует, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\alpha(t)\overline{\varphi'(t)}}{t - z^*} dt + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\beta(t)\varphi'(t)}{t - z^*} dt - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\overline{\varphi(t)}}{t - z^*} dt = A(z^*) \tag{5.13}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \left[\frac{\varphi'(t)}{t} dt + \frac{\overline{\varphi'(t)}}{\overline{t}} \overline{dt}\right] = 0 \tag{5.14}$$

Из (5.13) заключаем, что если функцию $\psi(z)$ взять в виде

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\alpha(t)\overline{\varphi'(t)}}{t - z} dt + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\beta(t)\varphi'(t)}{t - z} dt - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\overline{\varphi(t)}}{t - z} dt - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(t)}{t - z}$$

то функция $\psi(z)$ и функция (5.15)

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)\, dt}{t - z}$$

составляют решение задачи (R_6). Решение $\varphi(t)$ уравнения (5.6) удовлетворяют еще условию (5.14), т. е. $\operatorname{Im}\varphi'(0)=0$.

Следовательно, *интегро-дифференциальное уравнение* (5.6) *эквивалентно задаче* (R_6); *всякое его решение* $\varphi(t)$ *непрерывно вместе с производными* $\varphi'(t), \varphi''(t)$ *и удовлетворяет условию* $\operatorname{Im}\varphi'(0)=0$.

Уравнение (5.6) напишем вкратце так:

$$\overline{\varphi'(t_0)}-\frac{1}{\alpha(t_0)}\overline{\varphi(t_0)}+\int_L R_1(t_0,t)\overline{\varphi'(t)}\,dt+$$
$$+\int_L R_2(t_0,t)\varphi'(t)\,dt+\int_L R_3(t_0,t)\overline{\varphi(t)}\,dt=-\frac{A_l(t_0)}{\alpha(t_0)} \qquad (5.16)$$

Нетрудно интегро-дифференциальное уравнение (5.16) привести к интегральному

$$\overline{\Phi(t_0)}+\int_L K_1(t_0,t)\overline{\Phi(t)}\,ds+\int_L K_2(t_0,t)\Phi(t)\,ds=b(t_0) \qquad (5.17)$$

где $\Phi(t)=\varphi'(t)$. Отсюда

$$\varphi(t)=\int_{t_0'}^{t}\Phi(\tau)\,d\tau \qquad (5.18)$$

где положено[1], что $\varphi(t_0')=0$.

Ядра интегрального уравнения (5.17) определяются формулами:

$$K_1(t_0,t)=-\frac{1}{2\pi i\alpha(t_0)}\,\frac{\alpha(t)-\alpha(t_0)}{t-t_0}\,\frac{dt}{ds}-\frac{1}{2\pi i}\,\frac{d}{ds}\log\frac{t-t_0}{\bar t-\bar t_0}- \qquad (5.19)$$
$$-\frac{1}{2\pi i\alpha(t_0)}\,\frac{1}{\bar t}\,\frac{d\bar t}{ds}-\frac{1}{2\pi i\alpha(t_0)}\,\frac{dt}{ds}\int_s^l d\log\frac{\bar\tau-\bar t_0}{\tau-t_0}-\Theta(\sigma,s)$$

$$K_2(t_0,t)=-\frac{1}{2\pi i\alpha(t_0)}\left[\frac{\beta(t)-\beta(t_0)}{t-t_0}+\frac{1}{t}\right]\frac{d\bar t}{ds}$$

где

$$\Theta(\sigma,s)=\begin{cases}-\dfrac{1}{\alpha(t_0)}\dfrac{d\bar t}{ds} & (0<s<\sigma)\\ 0 & (\sigma<s<l)\end{cases} \qquad (5.20)$$

В формулах (5.19) — (5.20) l — длина контура,

$$t=t(s),\qquad t_0'=t(0),\qquad t_0=t(\sigma),\qquad \tau=t(s_1)$$

Свободный член уравнения (5.17) будет

$$b(t_0)=-\frac{A_l(t_0)}{\alpha(t_0)} \qquad (5.21)$$

§ 6. Теорема существования. Предположим, что однородное интегральное уравнение, соответствующее (5.17), имеет некоторое решение $\Phi_0(t)$, $\Phi_0(t)\not\equiv 0$; этой функции будет соответствовать некоторое решение однородного интегро-дифференциального уравнения, соответствующего (5.16):

$$\varphi_0(t)=\int_{t_0'}^{t}\Phi_0(\tau)\,d\tau \qquad (6.1)$$

---

[1] См. замечание, сделанное в конце § 4.

По доказанному выше $\varphi_0(t)$ — первая функция решения однородной задачи (R_6). По теореме единственности для однородной задачи (R_6) имеем

$$\varphi_0(z) = ikz + C \tag{6.2}$$

Отсюда

$$\varphi_0'(z) = ik \tag{6.3}$$

С другой стороны, мы знаем, что всякое решение уравнения (5.16) удовлетворяет условию $\operatorname{Im} \varphi'(0) = 0$. Следовательно, $k = 0$. Тогда

$$\Phi_0(t) \equiv 0 \tag{6.4}$$

По альтернативе Фредгольма *неоднородное интегральное уравнение* (5.17) *имеет единственное решение при любой правой части* [9].

Следовательно, задача (R_1) *имеет решение из класса* (K), *причем единственное для любых функций* $p(x, y)$ *и контура* L, *удовлеторяющих указанным в* § 1 *условиям.*

Покажем теперь, как найти решение исходной задачи (R_1). Решая интегральное уравнение (5.17), получаем функцию $\Phi(t)$ и согласно (5.18) $\varphi(t)$. По формуле (5.15) определяем функции $\varphi(z)$, $\psi(z)$.

Подставляя их в равенство (4.1), получаем решение задачи (R_1), определенное с точностью до постоянного слагаемого.

Подбирая соответствующим образом указанное постоянное, можно получить решение исходной задачи (R_1).

Замечание. Задачу (R_1) интересно рассмотреть в случае, когда S — многосвязная область (см. [4]). Было бы очень удобно применить метод Д. И. Шермана [11] для решения задачи (R_1). Задачу (R_1) интересно рассмотреть в случае, когда L имеет угловые точки (см. [10]).

Поступила в редакцию
21 XI 1949

Институт физики и математики
АН Азербайджанской ССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. АН СССР. 1949.
2. Мусхелишвили Н. И. Новый общий способ решения основных контурных задач плоской теории упругости. ДАН СССР. 1934. Т. III. № 1, 2.
3. Векуа И. Н. Об изгибе пластинки со свободным краем. Сообщения АН Грузинской ССР. 1942. Т. III. № 7.
4. Шерман Д. И. Статические плоские задачи теории упругости. Труды Тбилисского математического института. 1937. Т. II.
5. Халилов З. И. Решение общей задачи изгиба опертой упругой пластинки. Изв. АзФАН. 1943. № 1.
6. Стрэтт Дж. В. Теория звука. ГИЗ. 1940. Т. I.
7. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. 1933. Т. I.
8. Немыцкий В. и др. Курс математического анализа. 1944. Т. II.
9. Привалов И. И. Интегральные уравнения. 1935.
10. Магнарадзе Л. Г. Основные задачи плоской теории упругости для контуров с угловыми точками. Труды Тбилисского математ института. 1938. Т. III.
11. Шерман Д. И. Плоская деформация в изотропной неоднородной среде. ПММ. 1943. Т. VII. Вып. 4.
12. Привалов И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного. 1948.