Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XIV, 1950

ПЛОСКОЕ РАВНОВЕСИЕ ПЛАСТИЧЕСКОГО КЛИНА

В. В. Соколовский

(Москва)

Плоское равновесие тел формы клина под действием силы и пары сил, приложенных в вершине, или нагрузки, равномерно распределенной по его грани, при наличии степенного упрочнения материала может быть исследовано достаточно просто. Решение задачи о равновесии клина под действием силы имеет замкнутую форму; решение остальных задач приводит к интегрированию обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений.

Применение того же метода в случае пластичности без упрочнения материала дает возможность получить простое решение упруго-пластической задачи о равновесии полуплоскости.

§ 1. Плоское равновесие клина. Рассмотрим равновесие плоского клина с центральным углом 2γ, принимая цилиндрическую систему координат $r\theta z$, начало которой совпадает с вершиной клина, и будем считать, что напряженное состояние не зависит от координаты z.

Компоненты напряжения $\tau_{rz} = \tau_{\theta z} = 0$, а остальные компоненты σ_r, σ_θ, σ_z, $\tau_{r\theta}$ суть функции от r и θ.

Дифференциальные уравнения равновесия в цилиндрических координатах применительно к этой задаче имеют вид:

$$r\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \sigma_r - \sigma_\theta = 0, \qquad r\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + 2\tau_{r\theta} = 0 \tag{1.1}$$

Зависимость между компонентами деформации и компонентами смещения

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \qquad \varepsilon_\theta = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r\right), \qquad \varepsilon_z = 0$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} \tag{1.2}$$

дают дифференциальное уравнение совместности деформаций

$$r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial \theta^2} + r\frac{\partial}{\partial r}(\varepsilon_\theta - \varepsilon_r) = \frac{\partial^2}{\partial r\,\partial \theta}(r\gamma_{r\theta}) \tag{1.3}$$

а также следующие равенства:

$$\sigma_z = \sigma = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\theta), \qquad \varepsilon_r + \varepsilon_\theta = 0 \tag{1.4}$$

Основные зависимости между компонентами напряжения и деформации, упрощенные допущением в несжимаемости материала, принимаются в обычной форме:

$$\varepsilon_r = \frac{E}{2S}(\sigma_r - \sigma), \qquad \varepsilon_\theta = \frac{E}{2S}(\sigma_\theta - \sigma), \qquad \varepsilon_z = \frac{E}{2S}(\sigma_z - \sigma)$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{E}{S}\tau_{r\theta}, \qquad \gamma_{rz} = \gamma_{\theta z} = 0 \tag{1.5}$$

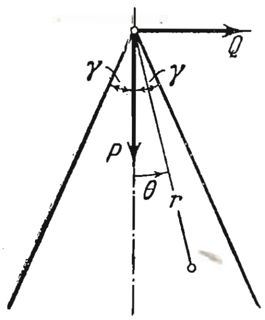
причем $3\sigma = \sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z$, а через S и E обозначены интенсивность касательных напряжений и интенсивность деформаций сдвига:

$$S = \sqrt{\frac{1}{6}\left[(\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 + (\sigma_r - \sigma_\theta)^2\right] + \tau_{r\theta}^2}$$

$$E = \sqrt{\frac{2}{3}\left[(\varepsilon_\theta - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_r)^2 + (\varepsilon_r - \varepsilon_\theta)^2\right] + \gamma_{r\theta}^2}$$

Условие пластичности с упрочнением материала берется в виде степенной зависимости между S и E, содержащей две постоянные K и μ, а именно

$$S = KE^{\mu} \tag{1.6}$$



Фиг. 1

Компоненты напряжения могут быть выражены через три величины: среднее напряжение σ, интенсивность касательных напряжений S и новую величину ψ, следующим образом:

$$\left.\begin{matrix}\sigma_r \\ \sigma_\theta\end{matrix}\right\} = \sigma \pm S\cos\psi, \qquad \tau_{r\theta} = S\sin\psi \tag{1.7}$$

а компоненты деформации — через интенсивность деформаций сдвига и ту же величину ψ в виде

$$\left.\begin{matrix}\varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta\end{matrix}\right\} = \pm\frac{E}{2}\cos\psi, \qquad \gamma_{r\theta} = E\sin\psi \tag{1.8}$$

Отметим попутно, что при наличии объемных сил, которые ранее не учитывались, уравнения равновесия напишутся следующим образом:

$$r\frac{\partial\sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial\theta} + \sigma_r - \sigma_\theta + rR_r = 0$$

$$r\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta} + 2\tau_{r\theta} + rR_\theta = 0$$

Если, однако, объемные силы имеют потенциал, т. е. могут быть представлены так:

$$R_r = \frac{\partial F}{\partial r}, \qquad R_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial\theta}$$

то замена переменных

$$\sigma_r = \sigma_r' - F, \qquad \sigma_\theta = \sigma_\theta' - F$$

сводит эти уравнения равновесия к прежнему виду, не изменяя остальных уравнений.

§ 2. Сжатие и изгиб клина под действием силы, приложенной к вершине[1]. Рассмотрим сначала изгиб и сжатие плоского клина под действием только одной силы, приложенной в вершине, считая, что компоненты ее P и Q заданы (фиг. 1). Будем искать точное решение этой задачи, предполагая, что компоненты напряжения имеют вид:

$$\sigma_r = \sigma_r(r, \theta), \qquad \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0$$

Дифференциальное уравнение равновесия (1.1) принимает такой вид:

$$r\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \sigma_r = 0, \quad \text{или} \quad \frac{\partial}{\partial r}(r\sigma_r) = 0$$

и показывает, что величина $r\sigma_r$ есть функция только от одной независимой переменной θ.

Интенсивность касательных напряжений $S = \frac{1}{2}|\sigma_r|$ и компонента наряжения σ_r могут быть представлены как произведение некоторой функции от θ на r^{-1} или

$$S = \alpha P\frac{t(\theta)}{r}, \qquad \sigma_r = \varkappa 2\alpha P\frac{t(\theta)}{r}, \qquad \varkappa = \pm 1 \tag{2.1}$$

а интенсивность деформации сдвига $E = 2|\varepsilon_r|$ и компоненты деформации ε_r из-за степенного условия пластичности с упрочнением так:

$$E = \left(\frac{\alpha P}{Kr}\right)^{\frac{1}{\mu}} g(\theta), \qquad \varepsilon_r = -\varepsilon_\theta = \varkappa\left(\frac{\alpha P}{Kr}\right)^{\frac{1}{\mu}}\frac{g(\theta)}{2} \tag{2.2}$$

причем t и g также связаны между собой степенной зависимостью $t = g^\mu$.

Произвольный параметр α введен для удобства и позволяет без уменьшения общности наложить на функцию t дополнительное условие, приписав ей какое-нибудь значение при $\theta = 0$, например $t(0) = 1$; в дальнейшем параметр α будет выражен через угол γ.

Подставляя последние выражения в дифференциальное уравнение совместности деформаций (1.3), получим

$$\frac{d^2 g}{d\theta^2} + \frac{2\mu - 1}{\mu^2} g = 0 \tag{2.3}$$

Решение этого дифференциального уравнения содержит две произвольные постоянные C и β и имеет различные виды в зависимости от значения μ; для $\mu = \frac{1}{2}$ величина g есть линейная функция

$$g = C(1 + \beta\theta)$$

а для $\mu \neq \frac{1}{2}$ величина g выражается через тригонометрические и гиперболические функции

$$g = C\cos(m\theta + \beta) \quad \left(\mu > \tfrac{1}{2}\right), \qquad g = C\,\mathrm{ch}(n\theta + \beta) \quad \left(\mu < \tfrac{1}{2}\right)$$

причем m и n связаны с μ так:

$$m^2 = \frac{2\mu - 1}{\mu^2}, \qquad n^2 = \frac{1 - 2\mu}{\mu^2}$$

[1] Основные результаты этой задачи уже приведены в нашей заметке[1].

Теперь найдем величину $t=g^{\mu}$, попутно определяя произвольную постоянную C из условия $t(0)=1$.

Для $\mu=\frac{1}{2}$ величина t имеет вид:

$$t=(1+\beta\theta)^{\frac{1}{2}}$$

а для остальных $\mu\neq\frac{1}{2}$ величина t выражается следующим образом:

$$t=\left[\frac{\cos(m\theta+\beta)}{\cos\beta}\right]^{\mu}\quad\left(\mu>\frac{1}{2}\right),\qquad t=\left[\frac{\operatorname{ch}(n\theta+\beta)}{\operatorname{ch}\beta}\right]^{\mu}\quad\left(\mu<\frac{1}{2}\right)$$

На боковых гранях клина $\theta=\pm\gamma$ напряжения должны отсутствовать, т. е. $\sigma_\theta=\tau_{r\theta}=0$; эти условия выполняются, так как σ_θ и $\tau_{r\theta}$ тождественно равны нулю везде.

Приравнивая компоненты главного вектора усилий, действующих в любом сечении клина цилиндрической поверхностью $r=\text{const}$, заданным компонентам силы P и Q, приложенной в вершине клина, получим равенства:

$$P=-\int_{-\gamma}^{+\gamma}\sigma_r\cos\theta r\,d\theta,\qquad Q=-\int_{-\gamma}^{+\gamma}\sigma_r\sin\theta r\,d\theta \tag{2.4}$$

которые на основании (2.1) и выражений для t дают возможность найти параметры α и β.

Частным случаем предыдущего при $\gamma=\pi/2$, $\beta=0$ является задача о равновесии полуплоскости под действием сосредоточенной силы P, приложенной в точке прямолинейной границы и перпендикулярной к этой границе.

В этом случае для $\mu=\frac{1}{2}$ величина $t=1$, а для остальных $\mu\neq\frac{1}{2}$ величины t представляются функциями

$$t=(\cos m\theta)^{\mu}\quad\left(\mu>\frac{1}{2}\right),\qquad t=(\operatorname{ch} n\theta)^{\mu}\quad\left(\mu<\frac{1}{2}\right)$$

Равенства (2.4) для $\mu=\frac{1}{2}$ устанавливают, что $\alpha=\frac{1}{4}$, а для остальных $\mu\neq\frac{1}{2}$ определяют α в следующем виде:

$$\frac{1}{4\alpha}=\int_0^{\pi/2}(\cos m\theta)^{\mu}\cos\theta\,d\theta\quad\left(\mu>\frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{1}{4\alpha}=\int_0^{\pi/2}(\operatorname{ch} n\theta)^{\mu}\cos\theta\,d\theta\quad\left(\mu<\frac{1}{2}\right)$$

Представляет интерес вид линий равных интенсивностей касательных напряжений $S=\text{const}$, которые вследствие соотношений (2.1) определяются уравнением

$$\frac{t(\theta)}{r}=\text{const}$$

Известная задача об упругом равновесии полуплоскости под действием сосредоточенной силы является частным случаем рассмотренной задачи, когда $\mu=1$.

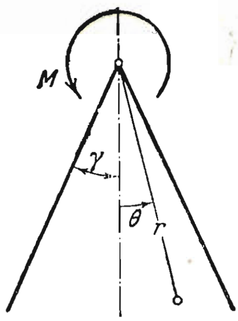
§ 3. Изгиб клина под действием пары сил, приложенной в вершине. Рассмотрим изгиб плоского клина под действием только одной пары сил, приложенной в вершине, считая, что момент пары M задан (фиг. 2).

Будем искать точное решение этой задачи, предполагая, что компоненты напряжения имеют следующий вид:

$$\sigma_r = \sigma_r(r, \theta), \qquad \sigma_\theta = 0, \qquad \tau_{r\theta} = \tau_{r\theta}(r, \theta)$$

Уравнения равновесия могут быть теперь переписаны так:

$$r\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \sigma_r + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} = 0, \qquad r\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + 2\tau_{r\theta} = 0 \quad (3.1)$$



Фиг. 2

или в эквивалентной форме

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\sigma_r) + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial r}(r^2 \tau_{r\theta}) = 0$$

Они удовлетворяются, если принять, что $r^2\sigma_r$ и $r^2\tau_{r\theta}$ суть функции только от θ.

Интенсивность касательных напряжений

$$S = \sqrt{\tfrac{1}{4}\sigma_r^2 + \tau_{r\theta}^2}$$

может быть, следовательно, представлена как произведение некоторой функции от θ на r^{-2}, или

$$S = \alpha M \frac{t(\theta)}{r^2} \tag{3.2}$$

Произвольный параметр α попрежнему введен для удобства и дает возможность без уменьшения общности наложить на функцию t дополнительное условие $t(0) = 1$; он будет впоследствии связан с углом γ.

Интенсивность деформации сдвига $E = \sqrt{4\varepsilon_r^2 + \gamma_{r\theta}^2}$ выражается на основании степенного условия пластичности с упрочнением так:

$$E = \left(\frac{\alpha M}{K r^2}\right)^{\frac{1}{\mu}} g(\theta) \tag{3.3}$$

имея в виду, что вследствие степенного условия пластичности с упрочнением

$$t = g^{\mu} \tag{3.4}$$

Теперь нетрудно видеть, что компоненты напряжения напишутся так:

$$\sigma_r = \frac{\alpha M}{r^2} 2t\cos\psi, \qquad \tau_{r\theta} = \frac{\alpha M}{r^2} t\sin\psi \tag{3.5}$$

а компоненты деформации будут

$$\left.\begin{matrix}\varepsilon_r\\ \varepsilon_\theta\end{matrix}\right\} = \pm\left(\frac{\alpha M}{K r^2}\right)^{\frac{1}{\mu}} g\frac{\cos\psi}{2}, \qquad \gamma_{r\theta} = \left(\frac{\alpha M}{K r^2}\right)^{\frac{1}{\mu}} g\sin\psi \quad (3.6).$$

причем ψ не зависит от r и является функцией от θ, т. е. $\psi = \psi(\theta)$

Граничные условия рассматриваемой задачи таковы: на оси симметрии компонента напряжения σ_r равна нулю, а на боковых граничных плоскостях компоненты напряжения σ_r и $\tau_{r\theta}$ отсутствуют:

$$\sigma_r = 0, \quad \tau_{r\theta} < 0 \quad \text{при} \quad \theta = 0; \qquad \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0 \quad \text{при} \quad \theta = \pm\gamma \tag{3.7}$$

причем одно из этих условий выполняется автоматически, так как компонента напряжения σ_θ тождественно равна нулю.

Условие равенства нулю главного вектора усилий, действующих в любом сечении клина цилиндрической поверхностью $r = \text{const}$:

$$r \int_{-\gamma}^{+\gamma} (\sigma_r \cos\theta - \tau_{r\theta} \sin\theta)\, d\theta = 0, \qquad r \int_{-\gamma}^{+\gamma} (\sigma_r \sin\theta + \tau_{r\theta} \cos\theta)\, d\theta = 0$$

удовлетворяются автоматически. Действительно, на основании уравнений равновесия компонента напряжения

$$\sigma_r = \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial\theta}$$

а потому написанные интегралы могут быть преобразованы к виду

$$\int_{-\gamma}^{+\gamma} \left(\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial\theta} \cos\theta - \tau_{r\theta} \sin\theta\right) d\theta = \int_{-\gamma}^{+\gamma} (\tau_{r\theta} \cos\theta)'\, d\theta = [\tau_{r\theta} \cos\theta]_{-\gamma}^{+\gamma}$$

$$\int_{-\gamma}^{+\gamma} \left(\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial\theta} \sin\theta + \tau_{r\theta} \cos\theta\right) d\theta = \int_{-\gamma}^{+\gamma} (\tau_{r\theta} \sin\theta)'\, d\theta = [\tau_{r\theta} \sin\theta]_{-\gamma}^{+\gamma}$$

причем правые части равны нулю, так как при $\theta = \pm\gamma$ компонента $\tau_{r\theta} = 0$.

Приравнивая главный момент усилий, действующих в любом сечении клина цилиндрической поверхностью $r = \text{const}$, заданному значению момента M в вершине, получим равенство

$$M = -\int_{-\gamma}^{+\gamma} \tau_{r\theta}\, r^2\, d\theta \tag{3.8}$$

дающее на основании (3.5) связь между параметрами α и γ такого вида:

$$\frac{1}{\alpha} = -\int_{-\gamma}^{+\gamma} t \sin\psi\, d\theta = f(\gamma)$$

Внося в уравнение равновесия (3.1) выражения (3.5), получим

$$\frac{d}{d\theta}(t \sin\psi) - 2t \cos\psi = 0 \tag{3.9}$$

а подставляя в дифференциальное уравнение совместности деформаций (1.3) выражения (3.6), будем иметь

$$\mu^2 \frac{d^2}{d\theta^2}(g \cos\psi) - 4(1-\mu)\, g \cos\psi + 2\mu(2-\mu) \frac{d}{d\theta}(g \sin\psi) = 0 \tag{3.10}$$

Система (3.9) и (3.10) для $\mu \neq 1$ совместно с равенством $t = g^\mu$ после введения обозначения

$$\Psi = \mu + (1-\mu)\cos^2\psi$$

Таблица 1

δ	θ	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
0.05	$-\psi$	1.57	0.62	0.30	0.07				
	t	1.00	1.46	1.86	2.22				
0.1	$-\psi$	1.57	0.85	0.48	0.21	0.00			
	t	1.00	1.21	1.50	1.79	2.06			
0.2	$-\psi$	1.57	1.10	0.73	0.43	0.19			
	t	1.00	1.07	1.22	1.41	1.62			
0.4	$-\psi$	1.57	1.32	1.04	0.77	0.50	0.26	0.04	
	t	1.00	1.01	1.04	1.10	1.21	1.35	1.51	
0.6	$-\psi$	1.57	1.40	1.22	1.03	0.82	0.57	0.34	0.12
	t	1.00	1,00	0.99	0.99	1.00	1.05	1.13	1.23

приводят к дифференциальному уравнению второго порядка

$$\operatorname{tg}\psi\frac{d^2\psi}{d\theta^2}-\left(\frac{1-\mu}{\mu}+\frac{2}{\Psi}\right)\left(\frac{d\psi}{d\theta}\right)^2+2\left(1+\frac{2}{\mu\Psi}\right)\frac{d\psi}{d\theta}-\frac{4}{\mu\Psi}=0 \qquad (3.11)$$

и к дифференциальному уравнению первого порядка

$$\frac{d\ln t}{d\theta}+\operatorname{ctg}\psi\left(\frac{d\psi}{d\theta}-2\right)=0 \qquad (3.12)$$

Заметим, что вместо (3.11) можно получить нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка, если принять ψ за независимое переменное, а $d\theta / d\psi = \Theta$ за искомую функцию. Имеем

$$\frac{\operatorname{tg}\psi}{\Theta}\frac{d\Theta}{d\psi}+\left(\frac{1-\mu}{\mu}+\frac{2}{\Psi}\right)-2\left(1+\frac{2}{\mu\Psi}\right)\Theta+\frac{4}{\mu\Psi}\Theta^2=0$$

Определение напряженного состояния пластического клина состоит в решении полученной системы дифференциальных уравнений при соответствующих граничных условиях. Последние на основании (3.5) и (3.7) могут быть представлены в виде

$$\psi=-\frac{\pi}{2}, \quad t=1 \quad \text{при } \theta=0; \qquad \psi=0 \quad \text{при } \theta=\gamma$$

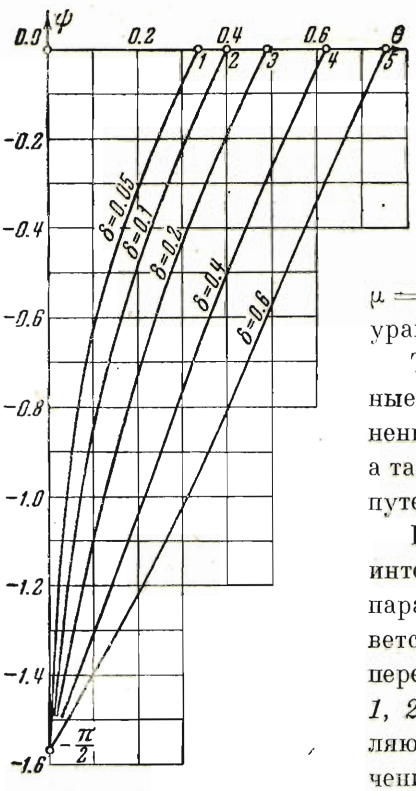
причем, как это следует из (3.11), производная

$$\frac{d\psi}{d\theta}=2 \qquad \text{при} \quad \theta=\gamma$$

Сначала находится решение $\psi=\psi(\theta,\delta)$ дифференциального уравнения (3.11), удовлетворяющее условиям $\psi=-\pi/2$, $d\psi/d\theta=1/\delta$ при $\theta=0$, а далее строится решение $t=t(\theta,\delta)$ дифференциального уравнения (3.12) с условием $t=1$ при $\theta=0$. Эти решения зависят от параметра

$$\delta=\left[\frac{d\theta}{d\psi}\right]_{\theta=0}$$

Последний может быть выражен через угол γ на основании оставшегося условия $\psi=0$ при $\theta=\gamma$. Имеем $\psi(\gamma,\delta)=0$.



Фиг. 3

Что касается до коэффициента α, входящего в выражения компонент напряжения, то он, как уже указывалось, связан с углом γ так:

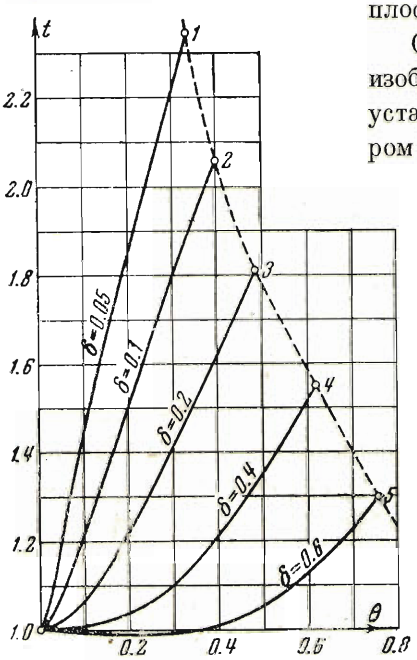
$$\frac{1}{\alpha} = f(\gamma)$$

Выше в табл. 1 приведены результаты численного решения задачи для $\mu = 1/3$. Оно состоит в интегрировании уравнений методом конечных разностей.

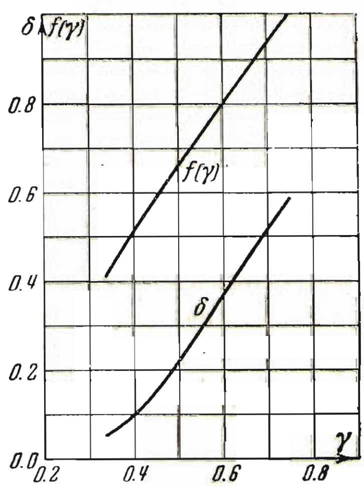
Табл. 1. дает величины ψ, полученные численным интегрированием уравнения (3.11) для $\delta = 0.05$, 0.1, 0.2, 0.4, 0.6, а также величины t, найденные аналогичным путем из уравнения (3.12).

На фиг. 3 и 4. изображены полученные интегральные кривые для тех же значений параметра δ. Прямая $\psi = 0$ на фиг. 3 соответствует граничной плоскости $\theta = \gamma$. Она пересекает интегральные кривые в точках *1*, *2*, *3*, *4*, *5*, абсциссы которых определяют углы γ, отвечающие выбранным значениям δ. Пунктирная кривая, нанесенная на фиг. 4, также изображает граничную плоскость $\theta = \gamma$.

Одна кривая, представленная на фиг. 5, изображает график функции $f(\gamma)$, а другая устанавливает зависимость между параметром δ и углом γ.



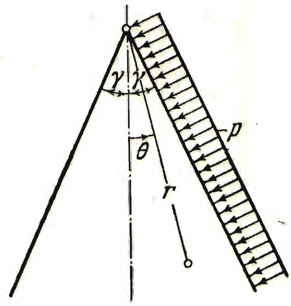
Фиг. 4



Фиг. 5

§ 4. Изгиб клина под действием равномерно распределенной нагрузки. Рассмотрим изгиб плоского клина под действием равномерно распределенной нагрузки p, приложенной вдоль одной из его граней (фиг. 6).

При решении этой задачи естественно предположить, что компоненты напряжений σ_r, σ_θ, $\tau_{r\theta}$ и деформации ε_r, ε_θ, $\gamma_{r\theta}$ не зависит от r и суть функции только от θ.



Фиг. 6

Уравнения равновесия (1.1) упрощается и принимают вид:

$$\frac{d\tau_{r\theta}}{d\theta} + \sigma_r - \sigma_\theta = 0, \qquad \frac{d\sigma_\theta}{d\theta} + 2\tau_{r\theta} = 0 \qquad (4.1)$$

а уравнение совместности (1.3) будет:

$$\frac{d^2\varepsilon_r}{d\theta^2} = \frac{d\gamma_{r\theta}}{d\theta}, \quad \text{или} \quad \frac{d\varepsilon_r}{d\theta} = \gamma_{r\theta} + \text{const} \qquad (4.2)$$

Вместо интенсивности касательных напряжений S, интенсивность деформаций сдвига E и среднего нормального напряжения σ удобно ввести безразмерные величины t, g и s, определенные так

$$S = \alpha p\ t(\theta), \qquad E = \left(\frac{\alpha p}{K}\right)^{\frac{1}{\mu}} g(\theta), \qquad \sigma = \alpha p\, s(\theta) - \frac{p}{2} \qquad (4.3)$$

имея в виду, что на основании степенного условия пластичности с упрочнением

$$t = g^{\mu} \qquad (4.4)$$

Произвольный параметр α, как и ранее, введен для удобства и позволяет наложить на функцию t дополнительное условие $t(0) = 1$; он будет в дальнейшем выражен через угол γ.

Теперь можно переписать компоненты напряжения в виде:

$$\left.\begin{matrix}\sigma_r\\ \sigma_\theta\end{matrix}\right\} = \alpha p\,(s \pm t\cos\psi) - \frac{p}{2}, \qquad \tau_{r\theta} = \alpha p\, t \sin\psi \qquad (4.5)$$

а компоненты деформации представить так:

$$\left.\begin{matrix}\varepsilon_r\\ \varepsilon_\theta\end{matrix}\right\} = \pm\left(\frac{\alpha p}{K}\right)^{\frac{1}{\mu}} g\,\frac{\cos\psi}{2}, \qquad \gamma_{r\theta} = \left(\frac{\alpha p}{K}\right)^{\frac{1}{\mu}} g \sin\psi \qquad (4.6)$$

Заметим, что наложение равномерного растягивающего напряжения $\sigma_r = \sigma_\theta = p/2$ превращает рассматриваемую задачу в кососимметричную относительно вертикальной оси $\theta = 0$. Следовательно, величины $\sigma_r + p/2$ и $\sigma_\theta + p/2$ вместе с ψ и s суть нечетные функции от θ, а величина $\tau_{r\theta}$ вместе с t есть четная функция от того же θ.

Отсюда ясно, что достаточно рассмотреть лишь правую половину клина, а граничные условия для нее можно представить следующим образом:

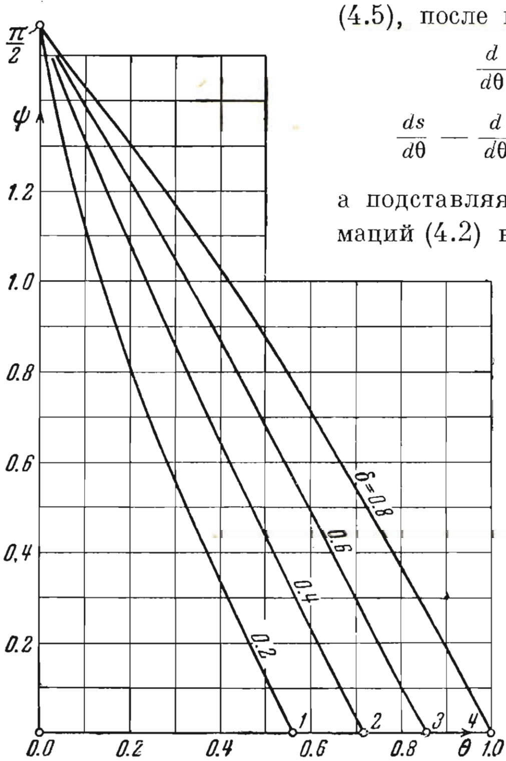
$$\sigma_r = \sigma_\theta = -\frac{p}{2} \ \text{при}\ \theta = 0; \qquad \sigma_\theta = -p, \quad \tau_{r\theta} = 0 \quad \text{при}\ \theta = \gamma \qquad (4.7)$$

Внося в дифференциальные уравнения равновесия (4.1) выражения (4.5), после преобразований получим

$$\frac{d}{d\theta}(t\sin\psi) + 2t\cos\psi = 0$$
$$\frac{ds}{d\theta} - \frac{d}{d\theta}(t\cos\psi) + 2t\sin\psi = 0 \qquad (4.8)$$

а подставляя в уравнение совместности деформаций (4.2) выражения (4.6), будем иметь

$$\frac{d}{d\theta}(g\cos\psi) = 2g\sin\psi + C \qquad (4.9)$$



Фиг. 7

Система (4.8) и (4.9) для $\mu = 1$ интегрируются в замкнутом виде. Учитывая граничные условия (4.7), найдем известные из теории упругости компоненты напряжения

$$\left.\begin{matrix}\sigma_r \\ \sigma_\theta\end{matrix}\right\} = \frac{p}{2}\,\frac{2\theta\cos 2\gamma \pm \sin 2\theta}{\sin 2\gamma - 2\gamma\cos 2\gamma} - \frac{p}{2}$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{p}{2}\,\frac{\cos 2\theta - \cos 2\gamma}{\sin 2\gamma - 2\gamma\cos 2\gamma} \qquad (4.10)$$

Система (4.8) и (4.9) для $\mu \neq 1$ совместно с равенством $t = g^\mu$ после введения обозначения

$$\Psi = \mu + (1-\mu)\sin^2\psi$$

приводят к дифференциальному уравнению второго порядка

$$\operatorname{tg}\psi\,\frac{d^2\psi}{d\theta^2} - \left(\frac{1-\mu}{\mu} + \frac{2}{\Psi}\right)\left(\frac{d\psi}{d\theta}\right)^2 - 2\left(\frac{2-\mu}{\mu} + \frac{2}{\Psi}\right)\frac{d\psi}{d\theta} - \frac{4}{\mu} = 0 \quad (4.11)$$

и к дифференциальным уравнениям первого порядка

$$\frac{ds}{d\theta} + \frac{t}{\sin\psi}\left(\frac{d\psi}{d\theta} + 2\right) = 0, \qquad \frac{d\ln t}{d\theta} + \operatorname{ctg}\psi\left(\frac{d\psi}{d\theta} + 2\right) = 0 \quad (4.12)$$

Заметим, что вместо (4.11) может быть получено нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка, если принять ψ за независимое переменное, а $d\theta / d\psi = -\Theta$ за искомую функцию. Имеем

$$\frac{\operatorname{tg}\psi}{\Theta}\,\frac{d\Theta}{d\psi} + \left(\frac{1-\mu}{\mu} + \frac{2}{\Psi}\right) - 2\left(\frac{2-\mu}{\mu} + \frac{2}{\Psi}\right)\Theta + \frac{4}{\mu}\Theta^2 = 0$$

Определение напряженного состояния клина состоит в решении найденной системы уравнений при соответствующих граничных условиях. Последние вследствие (4.5) и (4.7) могут быть написаны так:

$$\psi = \frac{\pi}{2}, \quad s = 0, \quad t = 1 \text{ при } \theta = 0; \quad \psi = 0, \quad t - s = \frac{1}{2\alpha} \text{ при } \theta = \gamma$$

Таблица 2

δ	θ	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.2	ψ	1.57	1.12	0.81	0.56	0.34	0.12					
	t	1.00	1.06	1.14	1.22	1.28	1.34					
	s	0.90	0.26	0.41	0.51	0.58	0.64					
0.4	ψ	1.57	1.33	1.09	0.87	0.65	0.44	0.24	0.03			
	t	1.00	1.01	1.02	1.04	1.05	1.07	1.08	1.10			
	s	0.00	0.05	0.09	0.12	0.14	0.16	0.17	0.19			
0.6	ψ	1.57	1.40	1.23	1.06	0.87	0.68	0.49	0.29	0.10		
	t	1.00	1.00	0.99	0.98	0.97	0.96	0.94	0.93	0.91		
	$-s$	0.00	0.04	0.06	0.09	0.11	0.13	0.14	0.16	0.17		
0.8	ψ	1.57	1.45	1.32	1.18	1.03	0.88	0.72	0.55	0.37	0.19	0.00
	t	1.00	0.99	0.98	0.96	0.94	0.90	0.87	0.83	0.80	0.76	0.72
	$-s$	0.00	0.08	0.15	0.21	0.27	0.32	0.37	0.41	0.45	0.49	0.53

причем, как это ясно из (4.11), производная

$$\frac{d\psi}{d\theta} = -2 \qquad \text{при} \quad \theta = \pm\gamma$$

Сначала строится решение $\psi = \psi(\theta, \delta)$ уравнения (4.11), удовлетворяющие условиям $\psi = \pi / 2$, $d\psi / d\theta = -1 / \delta$, а далее находятся решения $s = s(\theta, \delta)$, $t = t(\theta, \delta)$ уравнений (4.12) с учетом условий $s = 0$, $t = 1$ при $\theta = 0$. Указанные решения зависят от параметра

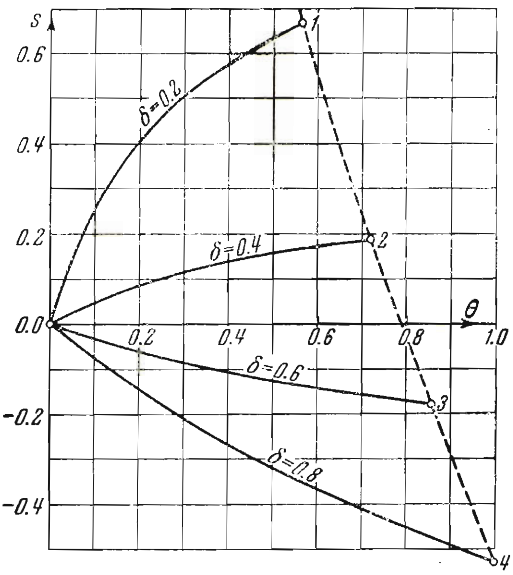
$$\delta = -\left[\frac{d\theta}{d\psi}\right]_{\theta=0}$$

Этот параметр δ, а также коэффициент α, входящий в выражения компонент напряжения, могут быть связаны с углом γ при помощи условий $\psi = 0$, $t - s = 1 / 2\alpha$ при $\theta = \gamma$. Имеем

$$\psi(\gamma, \delta) = 0$$

$$\frac{1}{2\alpha} = t(\gamma, \delta) - s(\gamma, \delta)$$

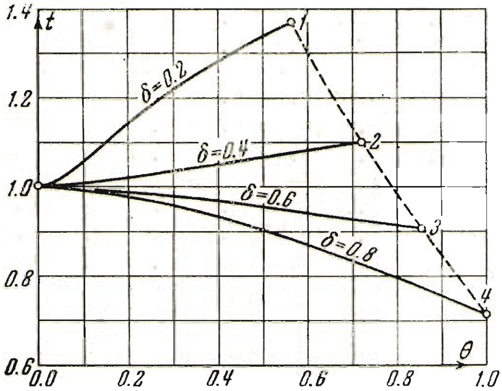
Выше в табл. 2 приведены результаты численного решения разобранной задачи для $\mu = 1/3$. Оно состоит в приближенном интегрировании уравнений методом конечных разностей.



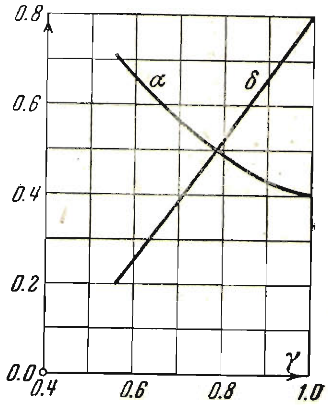
Фиг. 8

Табл. 2 содержит величины ψ, вычисленные при помощи численного интегрирования дифференциального уравнения (4.11) для значений параметра $\delta = 0{,}2$, $0{,}4$, $0{,}6$, $0{,}8$, а также величины s и t, полученные путем численного интегрирования дифференциальных уравнений (4.12).

На фиг. 7—9 изображены найденные интегральные кривые для указанных значений параметра δ. Прямая $\psi = 0$ на фиг. 7 соответствует граничной плоскости $\theta = \gamma$. Она пересекает интегральные кривые в точках *1*, *2*, *3*, *4*; абсциссы этих точек определяют углы γ, соответствующие выбранным значениям параметра. Пунктирные кривые на фиг. 8 и 9 также отвечают граничной плоскости $\theta = \gamma$.

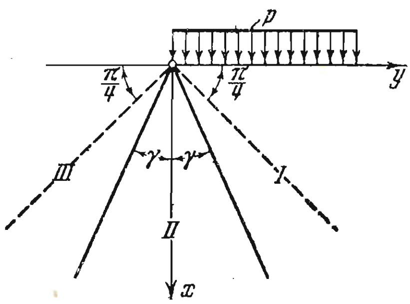


Фиг. 9



Фиг. 10

Кривые, построенные на фиг. 10, дают зависимость между параметром α и углом γ, а также между параметром δ и тем же углом γ.



Фиг. 11

§ 5. Упруго-пластическое равновесие полуплоскости. Предыдущая задача о равновесии клина, у которого одна из граней находится под действием равномерно распределенного давления, будет упруго-пластической, если пластическое состояние определять условием о постоянстве интенсивности касательных напряжений. Однако эта задача имеет простое решение, которое мы приведем для случая, когда клин является полуплоскостью.

Рассмотрим, следовательно, распределение напряжений в полуплоскости $x \geqslant 0$, у которой вдоль положительной полуоси y приложена равномерно распределенная нагрузка $\sigma_x = -p$. Наряду с координатами x, y будем также пользоваться координатами $r\theta$, начало которых совпадает с точкой 0, а радиус $\theta = 0$ совпадает с осью x. Угол γ имеет здесь иной смысл (фиг. 11), чем ранее.

Пока нагрузка p невелика, вся полуплоскость находится в упругом состоянии, а напряженное состояние определяется хорошо известными из теории упругости формулами

$$\left.\begin{array}{l}\sigma_r\\ \sigma_\theta\end{array}\right\} = -\frac{p}{2\pi}\,(2\theta \mp \sin 2\theta) - \frac{p}{2}\,, \qquad \tau_{r\theta} = \frac{p}{2\pi}(1 + \cos 2\theta) \tag{5.1}$$

Отсюда ясно, что интенсивность касательных напряжений

$$S = \sqrt{\tfrac{1}{4}(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + \tau_{r\theta}{}^2} = \frac{p}{\pi}\,|\cos\theta\,|$$

достигает максимума при $\theta = 0$. Поэтому впервые пластическое состояние возникает вдоль радиуса $\theta = 0$, когда $p = k\pi$.

При достаточно большой величине нагрузки p, а именно при $p \geqslant k\pi$, образуется пластическая зона, заполняющая некоторый сектор $-\gamma \leqslant \theta \leqslant +\gamma$, в то время как примыкающие к нему секторы $-\pi/2 \leqslant \theta < -\gamma$ и $\gamma < \theta \leqslant \pi/2$ остаются упругими.

Заметим, что наложение равномерного растягивающего напряжения $\sigma_r = \sigma_\theta = p/2$ не изменяет интенсивности касательных напряжений S, но превращает нашу задачу в кососимметричную относительно вертикальной оси $\theta = 0$. Следовательно, величины $\sigma_r + p/2$ и $\sigma_\theta + p/2$ суть нечетные функции от θ, а величины $\tau_{r\theta}$ и S четные функции от того же θ. Отсюда ясно, что расположение упругих зон симметрично относительно вертикальной оси $\theta = 0$, а при решении задачи можно ограничиться рассмотрением лишь правой половины полуплоскости.

Распределение напряжений в правой упругой зоне будем определять на основании хорошо известных из теории упругости формул, содержащих четыре произвольные постоянные A, B, C, D:

$$\left.\begin{matrix}\sigma_r\\ \sigma_\theta\end{matrix}\right\} = A - D2\theta \pm (B\sin 2\theta + C\cos 2\theta), \qquad \tau_{r\theta} = D + B\cos 2\theta - C\sin 2\theta$$

а распределение напряжений в пластической зоне будем искать, исходя из частного решения уравнений пластичности в полярных координатах, имеющего одну произвольную постоянную H:

$$\sigma_r = \sigma_\theta = -k(2\theta + H), \qquad \tau_{r\theta} = k$$

Пять произвольных постоянных и неизвестный угол γ находятся из граничных данных

$$\sigma_r = \sigma_\theta = -\frac{p}{2} \quad \text{при} \quad \theta = 0; \qquad \sigma_\theta = -p, \quad \tau_{r\theta} = 0 \quad \text{при} \quad \theta = \frac{\pi}{2}$$

и условий непрерывности всех компонент напряжения на границе между правой упругой зоной и пластической зоной

$$\sigma_r{}^e = \sigma_r{}^p, \quad \sigma_\theta{}^e = \sigma_\theta{}^p, \quad \tau_{r\theta}{}^e = \tau_{r\theta}{}^p \quad \text{при} \quad \theta = \gamma$$

Рассмотрим сначала секторы I и III, в которых материал находится в упругом состоянии. После определения произвольных постоянных в секторе I компоненты напряжения принимают вид:

$$\left.\begin{matrix}\sigma_r\\ \sigma_\theta\end{matrix}\right\} = k\,\frac{\sin 2\gamma + (\pi - 2\theta)\cos 2\gamma \pm \sin 2(\theta - \gamma)}{1 + \cos 2\gamma} - p$$

$$\tau_{r\theta} = k\,\frac{\cos 2(\theta - \gamma) + \cos 2\gamma}{1 + \cos 2\gamma} \tag{5.2}$$

Отсюда на основании равенств

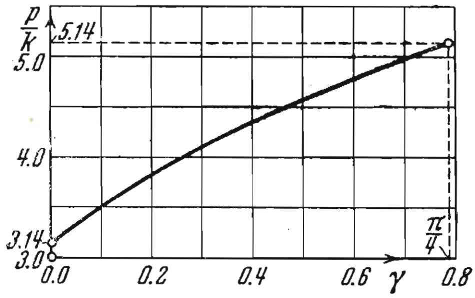
$$\sigma_r{}^{III}(\theta) = -p - \sigma_r{}^{I}(-\theta), \qquad \sigma_\theta{}^{III}(\theta) = -p - \sigma_\theta{}^{I}(-\theta)$$

$$\tau_{r\theta}^{III}(\theta) = \tau_{r\theta}^{I}(-\theta)$$

легко получить компоненты напряжения в секторе III в виде (5.3)

$$\left.\begin{matrix}\sigma_r \\ \sigma_\theta\end{matrix}\right\} = k\,\frac{-\sin 2\gamma - (\pi + 2\theta)\cos 2\gamma \pm \sin 2(\theta + \gamma)}{1 + \cos 2\gamma}, \qquad \tau_{r\theta} = k\,\frac{\cos 2(\theta + \gamma) + \cos 2\gamma}{1 + \cos 2\gamma}$$

Обратимся теперь к сектору II, в котором материал перешел в пластическое состояние. Определяя произвольные постоянные, имеем



Фиг. 12

$$\sigma_r = \sigma_\theta = -2k\theta - \frac{p}{2}$$
$$\tau_{r\theta} = k \qquad (5.4)$$

Входящий в эти формулы угол γ определяет положение прямолинейных границ упругой и пластической зон. Между γ и p имеет место зависимость

$$p = 2k\,\frac{2\gamma + \pi\cos 2\gamma + \sin 2\gamma}{1 + \cos 2\gamma}$$

данная на фиг. 12 графически.

При дальнейшем увеличении нагрузки p пластический сектор расширяется, а угол γ увеличивается; при $p = k(\pi + 2)$ угол $\gamma = \pi/4$.

Остановимся подробнее на предельном состоянии, когда $p = k(\pi + 2)$, а распределение напряжений определяется предыдущими выражениями при $\gamma = \pi/4$. При этом удобно вернуться к прямолинейным прямоугольным координатам x, y, применяя известные формулы преобразования

$$\left.\begin{matrix}\sigma_x \\ \sigma_y\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\theta) \pm \frac{1}{2}(\sigma_r - \sigma_\theta)\cos 2\theta \mp \tau_{r\theta}\sin 2\theta$$

$$\tau_{xy} = \frac{1}{2}(\sigma_r - \sigma_\theta)\sin 2\theta + \tau_{r\theta}\cos 2\theta$$

Окончательно в секторе I получим

$$\sigma_x = -p, \qquad \sigma_y = 2k - p, \qquad \tau_{xy} = 0$$

а в секторе III будем иметь

$$\sigma_x = 0, \qquad \sigma_y = -2k, \qquad \tau_{xy} = 0$$

Следовательно, в этих секторах имеют место равномерные напряженные состояния, причем интенсивность касательных напряжений равна:

$$S = \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2} = k$$

Таким образом, при $p = k(\pi + 2)$ угол $\gamma = \pi/4$, а материал в обоих боковых секторах I и III по всей площади сразу переходит в пластическое состояние, т. е. вся полуплоскость становится пластической.

Поступила в редакцию
30 IV 1950

Институт механики
Академии Наук СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Соколовский В. В. Некоторые задачи теории пластичности со степенным упрочнением материала. ПММ. 1949. Т. XIII. Вып. 6.